

# Ebene Homogenisierung des periodisch zellularen Verbundmaterials Geozelle-Boden

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von

Daniel Gröger

aus Karlsruhe

genehmigt von der

Fakultät für Energie- und Wirtschaftswissenschaften  
der Technischen Universität Clausthal

Tag der mündlichen Prüfung

06. November 2020

## **Prüfungskommission**

Vorsitzender der

Promotionskommission: Univ. Prof. Dr.-Ing. Oliver Langefeld

Hauptberichterstatter: Univ. Prof. Dr.-Ing. Norbert Meyer

Mitberichterstatter: Univ. Prof. Dr.-Ing. Fokke Saathoff







# Danksagung

Die Thematik des Geokunststoffs Geozelle hat mich seit Beginn meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Geotechnik und Markscheidewesen der Technischen Universität begleitet. Ausgehend von dem speziellen Anwendungsfall der Geozellen auf vertikalen Traggliedern verlagerte sich der Forschungsschwerpunkt aufgrund fehlender Berechnungsansätze im Laufe der Zeit zu grundlegenden Betrachtungen hinsichtlich der allgemeinen mechanischen Abbildbarkeit des dreidimensionalen anisotropen Verbundmaterials Geozelle und Boden. Das Ergebnis dieser Betrachtungen stellt die vorliegende Arbeit dar.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. N. Meyer für die Anregung zu dieser Arbeit, den mir gewährten wissenschaftlichen Freiraum sowie seine ständige Unterstützung.

Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. F. Saathoff danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit. Ebenso danke ich Herrn Univ.-Prof. Dr.-Ing. O. Langefeld für die bereitwillige Übernahme des Vorsitzes der Prüfungskommission.

Ich möchte mich zudem bei allen Mitarbeitern des Institutes und studentischen Hilfskräften, die einen direkten oder indirekten Beitrag zu dieser Arbeit geleistet haben, bedanken. Dies gilt insbesondere meinem Kollegen Herrn Dr.-Ing. A. Emersleben für die zahlreichen Diskussionen und stetigen Anregungen sowie Herrn M. Herrmann für die technische Umsetzung meiner theoretischen Vorstellungen. Weiterhin danke ich Herrn Dipl.-Ing. M.- Kidane, Bundesanstalt für Wasserbau, für die redaktionellen und fachlichen Anmerkungen.

Abschließend gilt ein besonderer Dank meiner Familie und meinen Freunden für deren Unterstützung während des Studiums sowie die Motivation und notwendige Abwechslung während der Promotion. Ganz besonders danke ich meiner Frau Sijie für den stetigen Zuspruch, die Fürsorge und ihr farbenfrohes Wesen in dieser intensiven Zeit.

In Liebe und Erinnerung an meinen Vater

Kurt-Ernst Gröger

Clausthal, im Dezember 2020

Daniel Gröger



# Kurzfassung

Die Anwendungsgebiete von Geokunststoffen sind vielfältig. Dementsprechend existieren eine Vielzahl unterschiedlicher Geokunststoffarten, um die an diese gestellten Anforderungen optimal zu erfüllen. Geozellen stellen hierbei eine Besonderheit dar. Bedingt durch die dreidimensionale, periodische und zellulare Struktur weisen diese ein komplexes Interaktionsverhalten mit dem Füllmaterial aus Boden auf und die Höhe der bewehrten Schicht besitzt einen entscheidenden Einfluss auf die Wirkungsweise. Werden die Geozellen und das Füllmaterial zusammengefasst betrachtet, ergibt sich ein heterogenes und richtungsabhängiges Verbundmaterial mit verbesserten Materialeigenschaften.

Die vorliegende Arbeit behandelt die ebene Homogenisierung und die Abbildung des Verbundmaterials Geozelle-Boden über das mechanische Modell einer Platte und/oder Scheibe. Die Abbildbarkeit als Platte liegt dabei in einer aus der Höhe folgenden Biegesteifigkeit der bewehrten Schicht begründet. Unter Berücksichtigung der strukturellen Materialsymmetrie weist das Verbundmaterial ein orthotropes Materialverhalten auf, zu dessen homogener Beschreibung äquivalente Materialkennwerte notwendig sind. Die Herleitung dieser Kennwerte erfolgt ausgehend von einem flächenbasierten Homogenisierungsverfahren für hexagonale Wabenkerne in Sandwichwerkstoffen. Neben Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte werden Anwendungsgrenzen und über Grenzwertbetrachtungen vereinfachte Formulierungen abgeleitet sowie die Plausibilität der Lösung überprüft.

Ein Vergleich mit Finite-Elemente-Berechnungen bestätigt die Gültigkeit der abgeleiteten Bestimmungsgleichungen. Im allgemeinen Fall erfüllen die äquivalenten Materialkennwerte des homogenen Verbundmaterials Geozelle-Boden die aus der Materialtheorie folgenden Bedingungen nur für bestimmte Lastkombinationen. Im Rahmen einer Parameterstudie werden zusätzlich Gültigkeitsgrenzen für die vereinfachten Bestimmungsgleichungen aufgestellt sowie die wesentlichen Einflussgrößen erläutert. Der Zellwinkel, die Schlankheit der Zellwände und das Steifigkeitsverhältnis des Füllmaterials zu den Wandsteifigkeiten stellen dabei die maßgebenden Einflussfaktoren dar. Zudem werden die grundlegenden Zusammenhänge zwischen den äquivalenten Materialkennwerten, insbesondere die Sonderfälle einer Richtungsunabhängigkeit des Materialverhaltens in der Aufspannebene, aufgezeigt.

Abschließend werden unter Berücksichtigung der Abhängigkeit von den jeweiligen Randbedingungen die äquivalenten Materialkennwerte auf das mechanische Tragwerksmodell einer Scheibe und Platte übertragen. Zur Abbildung als homogene Platte werden ergänzend Gleichungen zu äquivalenten Plattensteifigkeiten hergeleitet sowie deren Anwendung an Zahlenbeispielen verdeutlicht. Die Betrachtung des Verbundmaterials Geozelle-Boden als homogenes Material über das mechanische Modell einer Platte und/oder Scheibe ist somit möglich.



# Abstract

There are a large number of geosynthetics available to meet the requirements in various kinds of application. Usually geosynthetics are flat and their height is very small in comparison with the horizontal dimension. However, geocells with their three-dimensional, periodic and cellular features are a very special type of geosynthetic. The height dimension of geocells cannot be ignored but has a decisive impact on the reinforcement effect. In combination with an infill material, which usually is some type of coarse grained soil without tensile strength, it results in a heterogeneous and anisotropic composite material showing improved material properties. Due to the missing tensile strength of the infill material the in-plane behaviour of the composite material geocell-soil varies when loaded axially in compression or tension.

This thesis presents an in-plane homogenization of the composite material geocell-soil and its application to classical plate as well as shell theory. Test results from literature and the ones presented hereafter indicate that the height of a geocell-reinforced layer causes a plate-like reinforcement effect due to bending stiffness. Taking into account the planes of symmetry the composite material shows an orthotropic material behaviour, which requires equivalent material properties for a homogeneous description. These material properties are derived from a surface-based homogenization technique originally developed for hexagonal honeycombs in sandwich materials. In order to apply this homogenization technique to geocells it is modified and the influence of the infill material is added. An additional limit analysis yields simplified solution for the equivalent material properties and their application limits.

A comparison of the analytical solution with the results of a Finite-Element-Analysis shows very good agreement and proves its validity. In general the equivalent material properties only meet the conditions of orthotropic material theory for certain load combinations. Validity limits for the simplified solution are defined and the main factors influencing the equivalent material properties of the composite material are highlighted in a parameter study. The cell angle, the slenderness of the cell walls and the ratio of the infill material stiffness to the cell wall stiffness depict the most relevant influence factors. In addition, basic relationships between the different equivalent material properties, in particular directional independency of the material behaviour for certain cell geometries, are presented.

The application of the equivalent material properties to classical plate and shell theory is illustrated by several examples. Since the composite material behaves differently when loaded in compression or tension additional equations are developed to calculate equivalent bending stiffnesses for the homogeneous plate approach. As a result of this thesis, it is possible to describe the reinforcement effect of the discrete composite material geocell-soil by a homogeneous model of a plate and/or shell.





# Inhaltsverzeichnis

<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation	1
1.2 Zielstellung	2
1.3 Gliederung	3
<b>2 Geozellen</b>	<b>5</b>
2.1 Allgemeine Beschreibung	5
2.2 Wesentliche Merkmale von Geozellen	8
2.2.1 Geometrische Eigenschaften	8
2.2.2 Materialeigenschaften	11
2.3 Untersuchungen zur Wirkungsweise von Geozellen	13
2.3.1 Experimentelle Untersuchung	13
2.3.2 Numerische Simulation	19
2.3.3 Wesentliche Zusammenhänge	22
2.4 Berechnungsverfahren	25
2.4.1 Betrachtungsweisen	25
2.4.2 Homogenisierte Abbildung	25
2.4.3 Nachweisverfahren zur Tragfähigkeit	34
2.5 Forschungsbedarf	37
2.5.1 Vorversuch zum Biegeverhalten eines Sand befüllten Geozellenstreifens	37
2.5.2 Schlussfolgerung	39
<b>3 Wabenkerne in Sandwichwerkstoffen</b>	<b>43</b>
3.1 Aufbau von Sandwichwerkstoffen mit Wabenkern	43
3.2 Orthotropie des Wabenkerns	44
3.3 Grundlagen zur ebenen Homogenisierung von Wabenkernen	48
3.4 Äquivalente Materialkennwerte des Wabenkerns	50
3.4.1 Grundzustände der äußeren Belastung	50
3.4.2 Unbefüllte Wabenkerne	53
3.4.3 Befüllte Wabenkerne	61
3.5 Übertragbarkeit und allgemeine Vorgehensweise	66
<b>4 Flächenbasierte Homogenisierung von Geozellen</b>	<b>67</b>
4.1 Randbedingungen für die analytische Lösung	67
4.2 Grundzustände I und II bei axialer Belastung	70
4.2.1 Verwendetes RVE in den Grundzuständen I und II	70
4.2.2 Überblick zu den Finite-Elemente-Berechnungen im Grundzustand I und II	70

4.2.3	Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung .....	73
4.2.4	Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung .....	79
4.2.5	Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung .....	84
4.2.6	Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung .....	89
4.2.7	Vereinfachte analytische Lösung für die Grundzustände I und II .....	92
4.3	Grundzustand III bei reiner Schubbelastung .....	97
4.3.1	Vorbemerkung zum Grundzustand III .....	97
4.3.2	Modellbeschreibung zum Grundzustand III .....	99
4.3.3	Äquivalentes statisches Ersatzsystem im Grundzustand III .....	101
4.3.4	Äquivalenter Schubmodul im Grundzustand III .....	108
4.4	Übersicht zu den äquivalenten Materialkennwerten .....	111
4.5	Einfluss der Querdehnung in den Grundzuständen .....	112
4.5.1	Querdehnung des Füllmaterials .....	112
4.5.2	Querdehnung der Zellwände .....	117
<b>5</b>	<b>Plausibilität der analytischen Lösung .....</b>	<b>119</b>
5.1	Nachweis des linearen Materialverhaltens .....	119
5.2	Prüfung der theoretischen Orthotropiebedingungen .....	120
5.3	Prüfung der Lösung zu den äquivalenten Materialkennwerten .....	123
5.3.1	Vorgehensweise zur Prüfung der analytischen Lösung .....	123
5.3.2	Prüfung der äquivalenten Materialkennwerte der Grundzustände I und II .....	124
5.3.3	Prüfung des äquivalenten Schubmoduls im Grundzustand III .....	130
5.4	Prüfung des Querdehnungseinflusses des Füllmaterials .....	133
5.4.1	Vorgehensweise zur Prüfung des Querdehnungseinflusses .....	133
5.4.2	Prüfung der Anwendungsgrenzen der Grundzustände I und II .....	134
5.4.3	Prüfung des Einflusses der Querdehnung für den Grundzustand III .....	140
5.5	Ergebnisübersicht zur Plausibilitätsprüfung .....	141
<b>6</b>	<b>Parameterstudie .....</b>	<b>143</b>
6.1	Wertebereiche .....	143
6.2	Einflussgrößen auf die Kennwerte der Grundzustände I und II .....	144
6.2.1	Beschreibung der wesentlichen Zusammenhänge .....	144
6.2.2	Übersicht zu den Abhängigkeiten .....	153
6.3	Gegenseitige Abbildung der äquivalenten Materialkennwerte .....	154
6.3.1	Grundzustand Ia und IIa bei äußerer Zugbelastung .....	154
6.3.2	Grundzustand Ib und IIb bei äußerer Druckbelastung .....	157
6.4	Einflussgrößen auf den Schubmodul des Grundzustandes III .....	159
6.4.1	Darstellung des äquivalenten Schubmoduls über die Schlankheit $t/l$ .....	159
6.4.2	Darstellung des äquivalenten Schubmoduls über den Zellwinkel $\theta$ .....	160

6.5	Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bestimmungsgleichungen .....	162
6.5.1	Gültigkeitsbereich für die Kennwerte der Grundzustände I und II .....	162
6.5.2	Gültigkeitsbereich für den Grundzustand III .....	165
6.6	Ergebnisübersicht zur Parameterstudie .....	166
<b>7</b>	<b>Anwendung auf mechanische Tragwerksmodelle .....</b>	<b>169</b>
7.1	Ebener Verzerrungszustand.....	169
7.1.1	Scheibenmodell .....	169
7.1.2	Modell des Plattenstreifens.....	174
7.2	Zweidimensionale Betrachtung .....	181
7.2.1	Plattensteifigkeiten für die zweidimensionale schubstarre Plattentheorie .....	181
7.2.2	Klassische Laminattheorie.....	182
7.2.3	Vergleich der Plattensteifigkeiten .....	185
7.3	Ergebnisübersicht zur Anwendung auf Tragwerksmodelle .....	187
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>189</b>
8.1	Zusammenfassung.....	189
8.2	Ausblick.....	191
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>193</b>
<b>Anhang A</b>	<b>.....</b>	<b>201</b>
<b>Anhang B</b>	<b>.....</b>	<b>213</b>
<b>Anhang C</b>	<b>.....</b>	<b>251</b>
<b>Anhang D</b>	<b>.....</b>	<b>281</b>
<b>Anhang E</b>	<b>.....</b>	<b>291</b>
<b>Anhang F</b>	<b>.....</b>	<b>295</b>
<b>Anhang G</b>	<b>.....</b>	<b>313</b>
<b>Anhang H</b>	<b>.....</b>	<b>317</b>
<b>Anhang I</b>	<b>.....</b>	<b>331</b>
<b>Anhang J</b>	<b>.....</b>	<b>335</b>



# Symbolverzeichnis

## Lateinische Großbuchstaben

A	[L <sup>2</sup> ]	Querschnittsfläche
A <sub>ij</sub>	[K/L]	Scheibensteifigkeiten
C	[K]	Federkraft
C <sub>ij</sub>	[K/L <sup>2</sup> ]	Zugeordnete Komponenten der Elastizitätsmatrix
D <sub>0</sub>	[L]	Ausgangsdurchmesser der Geozellen bei rotationssymmetrischer Betrachtung
D <sub>ij</sub>	[K·L]	Plattenbiegesteifigkeiten
E	[K/L <sup>2</sup> ]	Elastizitätsmodul oder lineare Zug- und Druckmodule für das Verbundmaterial Geozelle-Boden
E <sub>ij</sub>	[K/L <sup>2</sup> ]	Ersatzsteifigkeiten bei der Plattentheorie
EA, GA	[K]	Dehn- und Schubsteifigkeit der Waben- oder Zellwände
EI	[K·L <sup>2</sup> ]	Biegesteifigkeit der Waben- oder Zellwände
F	[K]	Punkt- oder Linienlast
F <sub>s,k</sub>	[K]	Charakteristische Schälbeanspruchung der Zellwände (Kraft)
F <sub>t,k</sub>	[K]	Charakteristische Zugbeanspruchung der Zellwände (Kraft)
H	[L]	Balken- oder Plattenhöhe
H <sub>c</sub>	[L]	Zellabmessung der Geozellen in Höhenrichtung
I	[L <sup>4</sup> ]	Flächenmoment zweiten Grades (Flächenträgheitsmoment)
I <sub>D</sub>	[-]	Bezogene Lagerungsdichte
J	[K/L]	Dehnsteifigkeit des Zellwandmaterials aus Kurzzeitzugversuchen
K <sub>p</sub>	[-]	Passiver Erddruckbeiwert
K <sub>u</sub>	[-]	Dimensionsloser Steifigkeitsparameter für unbewehrten Boden
L <sub>c</sub>	[L]	Zellabmessung der Geozelle in Längsrichtung
L <sub>f</sub>	[L]	Federlänge
L <sub>ref</sub>	[L]	Bezugslänge der Federkonstanten im Grundzustand III
M	[K·L]	Biegemoment in Waben- und Zellwänden
N, Q	[K]	Normal- und Querkraft in Waben- und Zellwänden
N <sub>h</sub>	[K]	Normalkraft in Verbindungsstelle bzw. horizontaler Wand
P, T, W	[K]	Resultierende Kräfte in den Grundzuständen der äußeren Belastung
Q <sub>ij</sub>	[K/L <sup>2</sup> ]	Reduzierte Steifigkeiten in klassischer Laminattheorie
R	[K]	Resultierende Reaktionskraft des Füllmaterials
S <sub>ij</sub>	[K/L <sup>2</sup> ]	Zugeordnete Komponenten der Nachgiebigkeitsmatrix
U	[K·L]	Elastische Formänderungsenergie
W <sub>c</sub>	[L]	Zellabmessung der Geozelle in Breitenrichtung
X	[K], [K·L]	Statisch Überzählige als Kraft oder Moment

**Lateinische Kleinbuchstaben**

c	[K/L]	Federkonstante
$c_n$	[K/L]	Resultierende Federkonstante für Grundzustand IIa
$c'$	[K/L <sup>2</sup> ]	Effektive Kohäsion für Peak- oder Restscherfestigkeit
d	[L]	Länge der Verbindungsstelle der Geozellen
h	[L]	Halbe Länge der Verbindungsstelle und Länge der horizontalen Waben- oder Zellwand
$h_c, h_t$	[L]	Höhe des auf Druck oder Zug beanspruchten Balken- oder Plattenquerschnitts
k	[K/L <sup>3</sup> ]	Bettungsmodul
l	[L]	Länge der geneigten Waben- oder Zellwand
$m_{ij}$	[K·L/L]	Schnittmoment von Platte
$n_{ij}$	[K/L]	Normalkraft von Scheibe
p	[K/L]	Linienlast
q	[K/L <sup>2</sup> ]	Flächenlast
s	[L]	Länge der Tragwerkselemente
t	[L]	Einfache Waben- oder Zellwanddicke
u	[L]	Verschiebung
$u_B$	[L]	Wandverschiebung infolge Biegung
$u_s$	[L]	Wandverschiebung infolge Schub
$u_h$	[L]	Längenänderung der Verbindungsstelle bzw. horizontalen Zellwand
w	[L]	Balken- oder Plattendurchbiegung
$x_1, x_2, x_3$	[-]	Kartesische Koordinatenachsen für Verbundwerkstoffe
x, y, z	[-]	Alternative Bezeichnung der kartesischen Koordinatenachsen

*Zeichenerklärung: K  $\equiv$  Dimension der Kraft, L  $\equiv$  Dimension der Länge*

*Anm.: Für Betrachtungen im ebenen Verzerrungszustand werden die Dimensionen einzelner Größen auf den laufenden Meter bezogen.*

**Griechische Buchstaben**

$\alpha, \beta$	[°]	Winkeländerungen bei Gleitung
$\alpha_c$	[°]	Federneigung bei reiner Schubbelastung im Grundzustand III
$\alpha_g$	[°]	Geometrische Hilfsgröße im Grundzustand III
$\alpha_m, \beta_m$	[°]	Mittlere Winkeländerungen bei Gleitung
$\gamma_{ij}$	[-]	Gleitung
$\delta_p$	[°]	Passiver Wandreibungswinkel
$\varepsilon$	[-]	Zugeordnete Verzerrung oder Hauptdehnung
$\varepsilon_{ij}$	[-]	Verzerrungskomponente
$\varepsilon_a$	[-]	Axiale Stauchung bei rotationssymmetrischer Betrachtung einer Geozelle
$\varepsilon_v$	[-]	Volumendehnung
$\theta$	[°]	Zellwinkel bzw. Öffnungswinkel der Geozellen
$\kappa$	[-]	Schubkorrekturfaktor
$\lambda$	[-]	Verbundbeiwert der Reibung
$\nu$	[-]	Querdehnzahl
$\nu_{ij}$	[-]	Querdehnzahl bei orthotropen Materialverhalten
$\xi$	[-]	Lokale Koordinatenachse
$\rho_{ij}$	[L]	Krümmungsradius
$\sigma$	[K/L <sup>2</sup> ]	Zugeordnete Spannung oder Hauptspannung
$\sigma_{ij}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Spannungskomponente
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	[K/L <sup>2</sup> ]	Maximale, mittlere und minimale Hauptspannungskomponente
$\sigma_{1,r}, \sigma_{3,r}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Maximale und minimale Hauptspannung bei rotationssymmetrischer Geozellenummantelung
$\sigma_{1,u}, \sigma_{3,u}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Maximale und minimale Hauptspannung im nicht ummantelten Fall
$\sigma_r$	[K/L <sup>2</sup> ]	Randspannung am repräsentativen Volumenelement
$\sigma_{s,k}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Charakteristische Schälbeanspruchung der Zellwände (Spannung)
$\sigma_{t,k}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Charakteristische Zugbeanspruchung der Zellwände (Spannung)
$\Delta\sigma_3$	[K/L <sup>2</sup> ]	Zusätzlicher Stützdruck aus Geozellenummantelung bei radialer Expansion
$\tau_{ij}$	[K/L <sup>2</sup> ]	Schubspannung
$\Phi$	[rad]	Verdrehung der geneigten Wabenwände im Grundzustand III
$\varphi'$	[°]	Effektiver Winkel der inneren Reibung für Peak- oder Restscherfestigkeit
$\psi$	[rad]	Verdrehung des Balken- oder Plattenquerschnitts
$\psi'$	[°]	Dilatanzwinkel
$\Omega$	[°]	Erhöhter Lastausbreitungswinkel einer geozellenbewehrten Schicht

*Anm.: Spannungen werden grundsätzlich als effektive Größen betrachtet. Eine Indizierung mit einem Apostroph erfolgt nur falls es für das Verständnis erforderlich ist.*

**Indizes**

c	Druckbereich
cw	Zellwandmaterial
f	Füllmaterial
h	Verbindungsstelle bzw. horizontale Zellwand
i, j	Richtungskomponenten im $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ oder x-y-z Koordinatensystem; zugeordnete Spannungs- oder Verzerrungskomponenten
t	Zugbereich
I, II, III	Grundzustand I, II und III der äußeren Belastung
Ia, Ib	Grundzustand Ia bei Zugbelastung und Ib bei Druckbelastung
IIa, IIb	Grundzustand IIa bei Zugbelastung und IIb bei Druckbelastung
*	Äquivalenter Materialkennwert
-	Überstrich zur Kennzeichnung mittlerer Größen
$\perp$	Normal zur Belastungsrichtung
	Parallel zur Belastungsrichtung

**Häufige Abkürzungen**

ESZ	Ebener Spannungszustand
EVZ	Ebener Verzerrungszustand
FE	Finite-Elemente(-Methode)
PvK	Prinzip der virtuellen Kräfte
RVE	Repräsentatives Volumenelement



# 1 Einleitung

## 1.1 Motivation

Das Bauen mit Geokunststoffen hat in den letzten Jahrzehnten zunehmend an Bedeutung gewonnen. Für die unterschiedlichen Anforderungen sind während dieser Zeit verschiedenste Arten von Geokunststoffen entwickelt worden. Die dreidimensionale, periodische und zellulare Struktur von Geozellen stellt bei den verschiedenen Geokunststoffenarten ein Alleinstellungsmerkmal dar. Durch die Befüllung der Geozellen mit einem Füllmaterial entsteht aus den beiden Einzelkomponenten ein heterogener Verbundwerkstoff (Verbundmaterial) mit verbesserten Materialeigenschaften. Die verbesserten Eigenschaften zeichnen sich durch ein richtungsabhängiges und abweichendes Materialverhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung aus.

Hervorgehend aus der dreidimensionalen Struktur besitzt die Höhe des Verbundmaterials Geozelle-Boden, im Gegensatz zu planaren Geokunststoffen wie zum Beispiel Geogitter, einen wesentlichen Einfluss auf die Wirkungsweise. Häufig wird der Einfluss aus der Zelhöhe durch eine Vergleichmäßigung der Belastung auf den Untergrund beschrieben und in bestehenden analytischen Berechnungsansätzen durch den pauschalisierten Ansatz einer erhöhten Lastausbreitung berücksichtigt. Der Nachteil bei dieser Betrachtungsweise besteht in der Vernachlässigung der Interaktion zwischen dem Verbundmaterial und dem Untergrund. Zudem ist der Berechnungsansatz auf den Anwendungsfall einer oberflächennahen Anordnung in Verbindung mit einer vertikalen Belastung beschränkt.

Ein hierzu gleichbedeutender Ansatz wird in der Literatur durch die alternative Betrachtung des Verbundmaterials Geozelle-Boden über das mechanische Modell einer Platte mit einer Berücksichtigung des Höheneinflusses über die Biegesteifigkeit verfolgt. Entsprechend dem gängigen Ansatz des mechanischen Modells einer Membran für planare Geokunststoffe besitzt der Plattenansatz den grundlegenden Vorteil einer direkten Abbildbarkeit der Interaktion mit dem umliegenden Boden. Abweichend zu den bestehenden Berechnungsansätzen zu Geozellen, welche sich vorwiegend auf die Bemessung ungebundener Tragschichten beziehen, lässt sich hierdurch die Bewehrungswirkung des Verbundmaterials auf die Bemessungsaufgaben verschiedenster Anwendungsfälle übertragen. Im Hinblick auf die zunehmende Bedeutung von Geozellen in Einsatzgebieten neben dem Verkehrswegebau, beispielsweise für Stützkonstruktionen oder zur Böschungssicherung, stellt dies eine Notwendigkeit für die Durchführung von Nachweisen zur Tragfähigkeit und zur Gebrauchstauglichkeit dar.

Die Abbildung über ein mechanisches Plattenmodell erfordert die homogenisierte Betrachtung des Verbundmaterials mit der Verwendung äquivalenter Materialkennwerte. Ein Homogenisierung zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte unter Berücksichtigung der wesentlichen Aspekte des Verbundmaterials Geozelle-Boden liegt derzeit jedoch nicht vor.

## 1.2 Zielstellung

Im Zuge dieser Arbeit soll eine Homogenisierung des diskreten Verbundmaterials Geozelle-Boden erfolgen, aus welcher äquivalente Materialkennwerte für eine homogene Betrachtung bestimmt werden können. Die äquivalenten Materialkennwerte sollen die periodisch zellularen und richtungsabhängigen Eigenschaften sowie das abweichende Materialverhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung berücksichtigen. Für eine weitergehende Übertragung des homogenisierten Verbundmaterials auf das mechanische Modell einer Platte sollen ausgehend von den äquivalenten Materialkennwerten analytische Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung von äquivalenten Scheiben- und Plattensteifigkeiten zur Verfügung gestellt werden.

Die wesentlichen Teilziele dieser Arbeit lauten:

- Zusammenfassung der geometrischen und mechanischen Kennwerte von Geozellen
- Ausarbeitung der wesentlichen Eigenschaften und der primären Wirkungsweisen anhand vorhandener Untersuchungen; Bewertung der Wirkungsweise in Abhängigkeit der geltenden Randbedingungen
- Vorstellung der Berechnungsverfahren zu Geozellen mit einer diskreten und homogenisierten Betrachtungsweise; Beurteilung der Eignung für eine weitergehende Homogenisierung
- Prüfung der Plattenwirkung einer geozellenbewehrten Schicht
- Beschreibung des Materialverhaltens des Verbundmaterials Geozelle-Boden unter Berücksichtigung der Materialsymmetrie
- Auswahl und Darstellung der grundlegenden Zusammenhänge eines geeigneten Homogenisierungsverfahrens; Ausarbeitung der Vorgehensweise zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte für periodische Zellstrukturen
- Homogenisierung des Verbundmaterial Geozelle-Boden unter Zuhilfenahme der Finite-Elemente-Methode; Herleitung analytischer Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung äquivalenter Materialkennwerte sowie deren Anwendungsgrenzen
- Plausibilitätsprüfung der abgeleiteten Bestimmungsgleichungen und Anwendungsgrenzen
- Betrachtung der maßgebenden Einflussgrößen auf die äquivalenten Materialkennwerte; Darstellung der wesentlichen Zusammenhänge zwischen diesen Materialkennwerten
- Definition von Gültigkeitsgrenzen für eine vereinfachte analytische Lösung zu den äquivalenten Materialkennwerten
- Übertragung der äquivalenten Materialkennwerte auf mechanische Tragwerksmodelle; Herleitung von analytischen Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der äquivalenten Scheiben- und Plattensteifigkeiten

Am Ende der vorliegenden Arbeit soll die Möglichkeit zur Betrachtung des diskrete Verbundmaterials Geozelle-Boden als homogenes Material über das mechanische Modell einer Platte und/oder Scheibe gegeben sein.

## 1.3 Gliederung

Zur Bearbeitung der verschiedenen Teilziele erfolgt in Kapitel 2 *Geozellen* vorab eine allgemeine Erläuterung zu Geozellen. Anhand ausgewählter Untersuchungsergebnisse aus der Literatur werden die primären Wirkungsweisen vorgestellt und auf die jeweils geltenden Randbedingungen bezogen. Differenziert nach der Betrachtungsweise werden die zu den verschiedenen Wirkungsweisen vorhandenen Berechnungsansätze beschrieben. Zum Abschluss dieses Kapitels wird die Plattenwirkung einer geozellenbewehrten Schicht an dem Verformungsbild eines freihängenden befüllten Zellstreifens untersucht.

Das Hauptaugenmerk von Kapitel 3 *Wabenkerne in Sandwichwerkstoffen* liegt auf der Vorstellung eines geeigneten Homogenisierungsverfahrens für das Verbundmaterial Geozelle und Boden. Hierzu werden sowohl die grundlegenden Eigenschaften von zu Geozellen vergleichbaren Wabenkernen in Sandwichwerkstoffen als auch die Vorgehensweise zu deren Homogenisierung dargestellt.

Eine Übertragung dieser Vorgehensweise auf das Verbundmaterial Geozelle und Boden wird in Kapitel 4 *Flächenbasierte Homogenisierung von Geozellen* beschrieben. Ausgehend von Finite-Elemente-Berechnungen werden die allgemeinen Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten in der Aufspannebene hergeleitet. Zusätzlich werden durch Grenzwertbetrachtungen an den allgemeinen Bestimmungsgleichungen vereinfachte Formulierungen dieser sowie die Definition von Anwendungsgrenzen abgeleitet.

Im nächsten Schritt werden in Kapitel 5 *Plausibilität der analytischen Lösung* die abgeleiteten Bestimmungsgleichungen basierend auf den theoretischen Grundlagen eines orthotropen Materialverhaltens überprüft. Ergänzend werden die analytisch ermittelten Bestimmungsgleichungen zu den Materialkennwerten und die Anwendungsgrenzen mit den Ergebnissen von Finite-Elemente-Berechnungen verglichen.

Eine Einflussuntersuchung der verschiedenen geometrischen und mechanischen Größen des Verbundmaterials wird in Kapitel 6 *Parameterstudie* durchgeführt. In Zuge dessen werden zum einen die wesentlichen Zusammenhänge zwischen den äquivalenten Materialkennwerten beschrieben, zum anderen werden Gültigkeitsgrenzen für die vereinfachten Bestimmungsgleichungen aufgestellt.

In Kapitel 7 *Anwendung auf mechanische Tragwerksmodelle* werden die äquivalenten Materialkennwerte am Beispiel ebener und räumlicher Problemstellungen auf mechanische Tragwerksmodelle übertragen. Die hierzu notwendige Herleitung von Bestimmungsgleichungen zu äquivalenten Plattensteifigkeiten ist ebenfalls Bestandteil dieses Kapitels.

Die Zusammenfassung der wesentlichen Forschungsergebnisse sowie ein Ausblick zu weitergehendem Forschungsbedarf schließen die Arbeit ab.



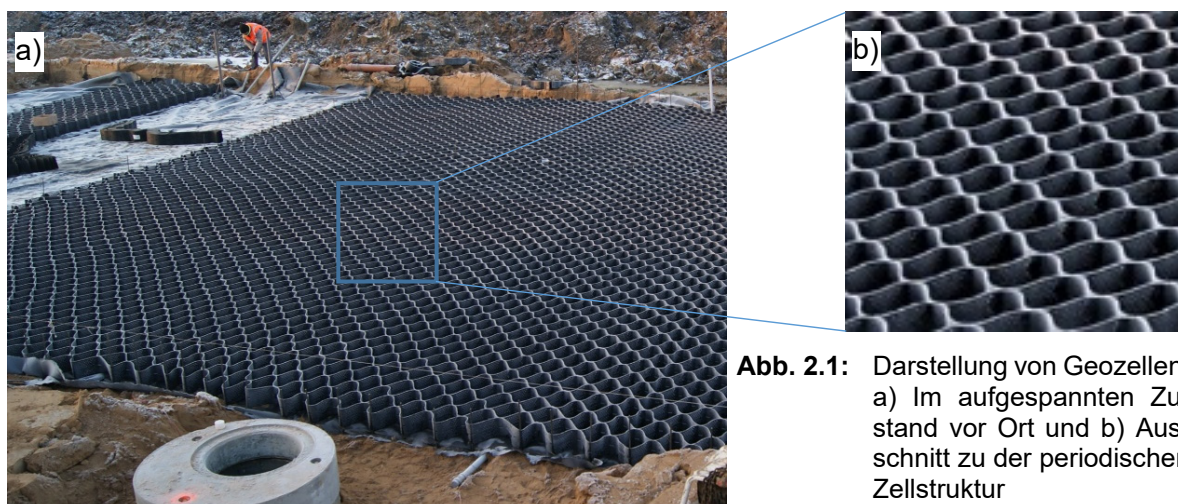
## 2 Geozellen

### 2.1 Allgemeine Beschreibung

Zwar werden Geozellen normativ entsprechend DIN EN ISO 10318 den Geokunststoffen und dort der Untergruppe der geotextilverwandten Produkte zugeordnet, jedoch unterscheiden sich diese gegenüber den restlichen Geokunststoffen durch ein wesentliches geometrisches Merkmal. Während sich die Mehrzahl der Geokunststoffe für gewöhnlich durch eine zweidimensionale Struktur auszeichnen, weisen Geozellen eine dreidimensionale Struktur auf. Die Höhe des Geokunststoffs kann demzufolge, wie eigentlich bei planaren Geokunststoffen üblich, nicht mehr vernachlässigt werden. Für handelsübliche Geozellenprodukte variiert die Zelhöhe dabei zwischen 30 und 300 mm bei Zelllängen von 50 bis 520 mm sowie Zellbreiten von 50 bis 475 mm.

Die dreidimensionale Struktur folgt aus der linien- oder punktwisen Verbindung einzelner Kunststoffstreifen über die Streifenhöhe. Zur Herstellung der Kunststoffstreifen kommen synthetische oder natürliche Polymere zur Anwendung, wobei für den Großteil synthetische Polymere verwendet werden. Die Verbindung der Streifen erfolgt vornehmlich durch Extrusion-, Klebe- oder Heißschmelzverfahren sowie Verfahren der thermischen Verfestigung oder Vernähen (DIN EN ISO 13426-1). Hierbei werden die Verbindungen versetzt angeordnet, wodurch sich ein weiteres Merkmal der Geozellen ergibt. Nach der Installation weisen diese eine periodisch Zellstruktur auf, welche je nach verwendetem Produkt verschiedene Formen annimmt.

Für die Installation der überwiegenden Anzahl von Geozellenprodukten werden diese vor Ort aufgespannt, mit geeignetem Bodenmaterial befüllt und verdichtet. Hierbei ist es gängige Praxis unterhalb der Geozellen ein Geovliesstoff oder ein hierzu vergleichbares Produkt anzuordnen, wodurch eine Vermischung des anstehenden Bodens mit dem Füllmaterial der Geozellen verhindert werden soll (Richardson 2004). Beispielhaft ist in Abbildung 2.1a ein aufgespanntes Geozellensystem vor der Verfüllung dargestellt.



**Abb. 2.1:** Darstellung von Geozellen: a) Im aufgespannten Zustand vor Ort und b) Ausschnitt zu der periodischen Zellstruktur

Der in Abbildung 2.1b dargestellte Ausschnitt verdeutlicht zudem die periodische Zellstruktur der Geozellen nach Installation. Während des Aufspannens wird das Zellsystem üblicherweise mit im Untergrund verankerten Befestigungselementen wie zum Beispiel Stahlstäben fixiert (Richardson 2004). Hierdurch wird das Zellsystem in Position gehalten und ein anschließendes Zusammenziehen vor der Verfüllung vermieden. Neben den flexiblen Geozellensystemen sind auch vorgefertigte plattenartige Produkte erhältlich, bei welchen keine Aufspannung erforderlich ist. Die Zellabmessungen dieser Systeme sind grundsätzlich wesentlich kleiner als die der flexiblen Zellsysteme. Für gewöhnlich werden Geozellen in Einheiten mit einer gewissen Zellenanzahl hergestellt. Die horizontalen Abmessungen der Einheiten sind hierbei vom jeweiligen Produkt abhängig und betragen in der Regel mehrere Meter in Längs- und Querrichtung. Erfordert die Baumaßnahme eine größere Fläche, werden die einzelnen Einheiten kraftschlüssig miteinander verbunden. Als Verbindungselemente kommen hierfür Sonderlösungen, wie beispielsweise der Atra Key®, Kabelbinder, Seile oder ähnliche Lösungen zum Einsatz.

Neben den in vorherigem Absatz beschriebenen vorgefertigten Zelltypen werden den Geozellen auch die sogenannten Gitterzellen zugeordnet, welche durch eine vertikale Aufspannung von planaren Geokunststoffen, vorwiegend Geogitter, in Verbindung mit Stabelementen vor Ort hergestellt werden (Bush et al. 1990). Auch hierbei entsteht nach Aufspannung eine zelluläre Struktur, wobei die Einzelzelle im Allgemeinen Abmessungen im oberen Dezimeter- bis Meterbereich besitzt. Da die unbefüllten Systeme aus Gitterzellen nur in Verbindung mit den Stabelementen eine Eigensteifigkeit aufweisen und eine Berücksichtigung des Einflusses der Stabelemente bei dem in vorliegendem Arbeit verwendeten Homogenisierungsverfahren nicht möglich ist, werden Zellsystem aus Gitterzellen nicht weiter betrachtet.

Werden weitergehend zur allgemeinen Beschreibung des Verbundes aus Geozellen und Füllmaterial die Formulierungen aus dem Bereich der Konstruktionswerkstoffe herangezogen, so entsteht nach der Befüllung der Geozellen mit einem Füllmaterial ein heterogenes Verbundmaterial bestehend aus den Einzelkomponenten Geozelle und Boden. Bei einem Verbundmaterial, genauer Verbundwerkstoff, handelt es sich um eine Kombination von verschiedenen Werkstoffen zur Herstellung eines neuen Werkstoffs mit optimierten und verbesserten Eigenschaften in Abhängigkeit des jeweiligen Anwendungsgebiets (Altenbach et al. 1996). Diese Beschreibung trifft auch auf das Verbundmaterial Geozelle-Boden zu, wobei unter stark vereinfachter Betrachtung des komplexen Verbundverhaltens die Geozellen überwiegend Zugbeanspruchungen und der Boden vornehmlich Druckbeanspruchungen aufnehmen. Die Heterogenität resultiert hierbei aus den unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften der beiden Einzelkomponenten. Wie bei allen anderen Verbundwerkstoffen hängen die Eigenschaften des Verbundmaterials Geozelle-Boden von den Eigenschaften und den Volumenanteilen der Einzelkomponenten sowie deren Wechselwirkung ab (Altenbach et al. 1996).



Die Auswahl des Geozellentyps, der zugehörigen Geozellengröße sowie des Füllmaterials ist von der jeweiligen Anwendung und den daraus folgenden Anforderungen an das Geozellensystem abhängig. Die Anwendungsfelder sind hierbei vielfältig. Unter anderem kommen Geozellen im Bereich von Verkehrs- und Infrastrukturfächern sowie des Erosionsschutzes zum Einsatz. Weitere wesentliche Anwendungsgebiete stellen Gründungsaufgaben oder Stützkonstruktionen dar (Richardson 2004, Yadav et al. 2014). Zur Veranschaulichung zeigt Abbildung 2.2 eine Auswahl an Anwendungsbeispielen für den Einsatz von Geozellen.



a) Unbefestigter Verkehrsweg



b) Böschungssicherung



c) Kanalauskleidung



d) Stützkonstruktion/Frontausbildung

**Abb. 2.2:** Anwendungsbeispiele zu Geozellen

In allen Anwendungsfällen besteht die primäre Funktion des Geozellensystems in der Festhaltung und Einlagerung des Füllmaterials (Koerner 2005). Je nach Anwendungsfall kommen weitere Funktionen wie zum Beispiel Filtern oder Schützen gegen Oberflächenerosion hinzu. Häufig wird im Zusammenhang mit Geozellen der funktionsbezogene Begriff Stabilisieren verwendet. Gemäß DIN EN ISO 10318-1 beschreibt Stabilisieren

*„Verbesserung des mechanischen Verhaltens von ungebundenem körnigem Material durch eine oder mehrere geosynthetische Schichten, so dass eine Verformung durch aufgebrachte Kräfte durch Minimierung von Bewegungen des ungebundenen körnigen Materials verringert wird“.*

Demgegenüber lautet dort die Definition von Bewehren

*„Nutzung des Spannungs-Dehnungs-Verhaltens eines Materials aus Geokunststoffen zur Verbesserung der mechanischen Eigenschaften des Bodens oder von Baustoffen“.*

Wird unter „mechanischen Eigenschaften“ die Festigkeit und die Verformungseigenschaften des Bodens zusammengefasst, sind die Unterschiede zwischen den beiden Funktionsbegriffen äußerst diffizil. Sowohl beim Stabilisieren als auch beim Bewehren führt die Verwendung des Geokunststoffs zu einer Reduktion der Verformungen infolge eines verbesserten mechanischen Verhaltens des Bodens. Wird der Begriff Stabilisieren definitionsgemäß nur auf körnige ungebundene Materialien beschränkt, wäre dies folgerichtig damit gleichbedeutend, dass bindige Böden durch Geokunststoffe ausschließlich bewehrt aber nicht stabilisiert werden können. Aufgrund dieser Widersprüchlichkeiten werden nachfolgend die beiden Funktionsbegriffe gleichgestellt und als Synonym für die Verbesserung der mechanischen Eigenschaften des Bodens durch Geozellen nur der Begriff Bewehren verwendet.

## **2.2 Wesentliche Merkmale von Geozellen**

### **2.2.1 Geometrische Eigenschaften**

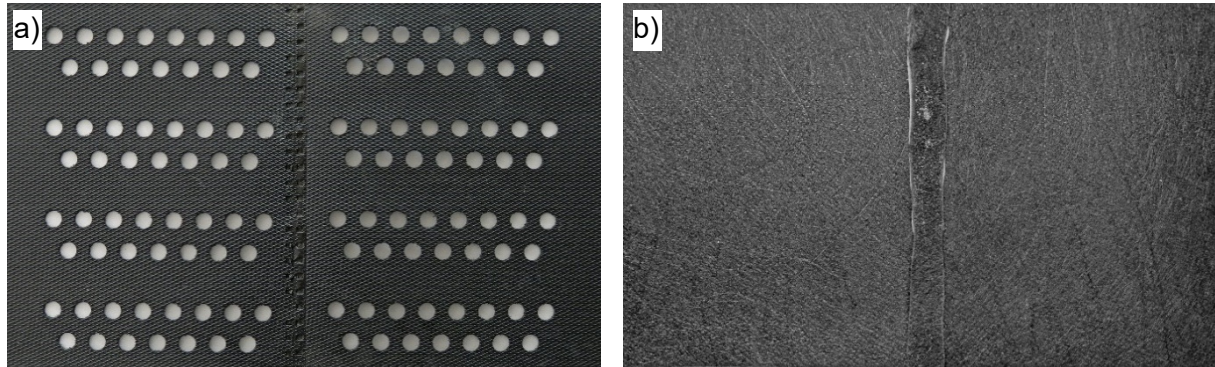
Mittlerweile existieren eine Vielzahl an Geozellenprodukten verschiedenster Hersteller. Überwiegend weisen die Produkte trotz der unterschiedlichen Bezeichnung sehr ähnliche Eigenschaften auf. Aus diesem Grund soll nachstehend eine allgemeine und produktunabhängige Übersicht zu den wesentlichen geometrischen und materiellen Merkmalen von Geozellen gegeben werden. Aufgrund des Schwerpunkts der vorliegenden Arbeit auf dem mechanischen Verhalten von Geozellen und Füllboden werden nachfolgend hydraulische oder sonstige Eigenschaften nicht näher betrachtet.

Für die Herstellung der Kunststoffstreifen werden als synthetische Polymere vorwiegend Polypropylen (PP, Vliesstoff) und Polyethylen hoher Dichte (PE-HD) verwendet. Geokunststoffe aus thermoverfestigtem PP werden üblicherweise den Geovliesstoffen zugeordnet. Bei einigen Produkten sind Fasern aus Polyester oder Polyamid in eine Matrix aus PE-HD eingebunden, wodurch die faserverstärkten Streifen höhere Festigkeiten und Steifigkeiten aufweisen. Die Oberfläche der Streifen aus PE-HD mit oder ohne Faserverstärkung kann entweder glatt oder strukturiert hergestellt werden. Die Strukturierung weist je nach Hersteller verschiedenste Formen auf und soll zur Verbesserung der Verbundeigenschaften zwischen Füllmaterial und Geozelle dienen. Bei Streifen aus Vliesstoff besitzt die Oberfläche bereits eine gewisse Rauigkeit, sodass keine Strukturierung erfolgt und materialbedingt auch nicht möglich ist.

Weiterhin können Geozellen aus PE-HD mit oder ohne Faserverstärkung durch eine Perforation der Zellenstreifen versehen werden. Hiermit soll zum einen ebenfalls der Verbund zwischen Füllmaterial und Geozelle verbessert werden, zum anderen soll eine ausreichende Permeabilität der weitestgehend undurchlässigen Zellenwände gewährleistet werden. Die Perforation umfasst hierbei nicht den Bereich der Verbindungsstellen der Zellen, sondern ist erst in einem gewissen Abstand hierzu angeordnet. Aufgrund der bereits durch den Vliesstoff

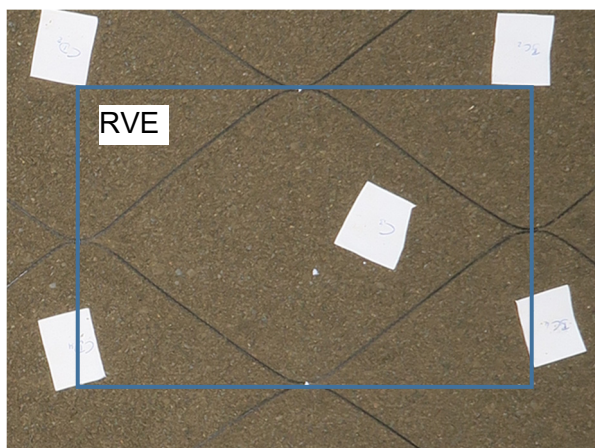


gegebenen Permeabilität ist bei diesen Geozellen eine Perforation unüblich. Zur Veranschaulichung sind beispielhaft die Oberfläche eines strukturierten und perforierten Zellenstreifens aus PE-HD und eines unstrukturierten und unperforierten Zellenstreifens aus Vliesstoff in Abbildung 2.3 dargestellt.

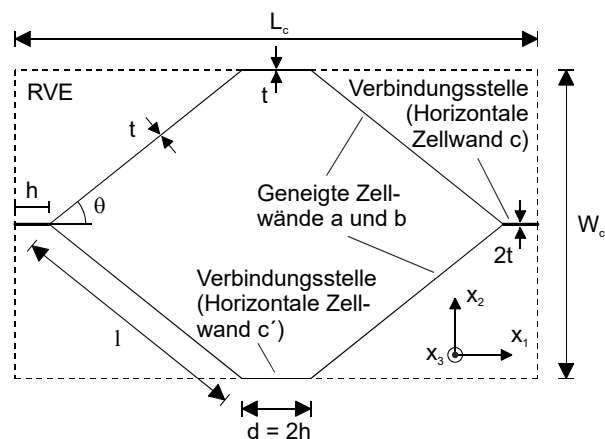


**Abb. 2.3:** Oberfläche von Geozellen: a) Strukturiertes, perforiertes Zellstreifen aus PE-HD und b) unstrukturiertes, unperforiertes Zellstreifen aus Vliesstoff

Wie in Kapitel 2.1 beschrieben besitzen Geozellen nach der Installation eine periodische Zellstruktur. Folglich lässt sich die vollständige Struktur durch eine repräsentative, sich wiederholende Zelle (Repräsentatives Volumenelement: RVE) beschreiben. Abbildung 2.4 zeigt hierzu beispielhaft die Geometrie einer Zelle aus einem Geozellensystem nach Einbau des Füllmaterials unter Laborbedingungen. Insbesondere für steifere Streifen nimmt die Zelle bei geringer Beanspruchung eine sinusähnliche Form mit einer Krümmung der Zellwände hin zu den Verbindungsstellen an. Mit zunehmender Beanspruchung der Zellen zum Beispiel aus einer Bodenverdichtung oder Einwirkung kann, wie schematisch in Abbildung 2.5 anhand einer repräsentativen Zelle dargestellt, idealisiert von einer hexagonalen Zellform ausgegangen werden.



**Abb. 2.4:** Sinusähnliche Form einer Geozelle im befüllten Zellsystem in Draufsicht



**Abb. 2.5:** Idealisierte Darstellung einer repräsentativen Geozelle (RVE) in Draufsicht

Die Zellabmessungen  $L_c$  und  $W_c$  folgen hierbei der Deklaration von DIN EN ISO 13426-1 und bezeichnen die Zelllänge in  $x_1$ -Richtung sowie die Zellbreite in  $x_2$ -Richtung bezogen auf die geöffnete Nennzellgröße. Aufgrund der bereits in Kapitel 2.1 beschriebenen Aufspannung vor Ort handelt es sich bei dem Großteil der verschiedenen Geozellentypen um flexible Systeme. Infolgedessen sind die horizontalen Abmessungen der repräsentativen Zelle grundsätzlich

variabel, jedoch werden in den Anwendungsvorschriften der Hersteller Nennwerte für die Zellgröße angegeben. Für plattenartige Produkte sind die Abmessungen der repräsentativen Zelle bereits herstellungsbedingt vorgegeben. Die Definition der weiteren in Abbildung 2.5 dargestellten geometrischen Größen des RVE lautet wie folgt.

- $\theta$  = Zellwinkel entsprechend dem Öffnungswinkels der Geozelle
- $l$  = Länge der geneigten Zellwände (Zellwände a und b)
- $d$  = Länge der horizontalen Wände gemäß der Länge der Verbindungsstelle (Zellwände c')
- $h$  = halbe Länge der Verbindungsstelle (Zellwände c)
- $t$  = Zellwanddicke
- $H_C$  = Zellhöhe in  $x_3$ -Richtung

Infolge der periodischen Zellstruktur ist die repräsentative Einheitszelle gemäß Abbildung 2.5 so gewählt, dass sich das vollständige Zellsystem aus einer Translation oder Rotation dieser zusammensetzen lässt. Folglich weisen die horizontalen Zellwände c' an Ober- und Unterseite im RVE aufgrund der herstellungsbedingten Verbindung der Zellstreifen jeweils eine Zellwanddicke  $t$  und entsprechend der Länge der Verbindungsstelle eine Zellwandlänge  $d = 2h$  auf. Dementgegen besitzen die horizontalen Zellwände c am linken und rechten Rand des RVE jeweils eine doppelte Zellwanddicke  $2t$  und eine halbe Zellwandlänge  $h$ . Ergänzend gibt Tabelle 2.1 einen Überblick zu den wesentlichen geometrischen Kenngrößen handelsüblicher Geozellen gemäß den Angaben aus Produktdatenblättern. Bei der Zelllänge  $L_c$  und Zellbreite  $W_c$  beziehen sich die Werte auf die Nennzellgröße laut Herstellerangaben.

**Tab. 2.1:** Übersicht zu geometrischen Kenngrößen gängiger Produkte laut Datenblätter

Geometrische Größe	Minimum	Maximum
Zelllänge $L_c$ [mm]	50	520
Zellbreite $W_c$ [mm]	50	475
Zellwanddicke $t$ [mm]	0,5	1,7
Zellhöhe $H_c$ [mm]	30	300
Länge von Verbindungsstelle $d = 2h$ [mm]	3	50
Flächenanteil der Perforation bezogen auf die gesamte Zellwandfläche [%]	ca. 15	ca. 30

Während „kleinere“ Zelltypen eine Länge  $L_c$  von 50 bis 110 mm und eine Breite  $W_c$  von 50 bis 100 mm umfassen, weisen „größere“ Zelltypen eine Länge  $L_c$  von 245 bis 520 mm und eine Breite  $W_c$  von 210 bis 475 mm auf. Unabhängig von der Zellgröße fallen die Wanddicken, verglichen zu den Zellwandlängen  $l$  mit 0,5 bis 1,7 mm gering aus, sodass die Zellwände üblicherweise eine sehr hohe Schlankheit besitzen. Für den Großteil der Geozellentypen beträgt die Länge  $d$  der Verbindungsstellen nur einige Millimeter und ist somit klein verglichen zur geneigten Wandlänge  $l$ . Der Flächenanteil der Perforation ist vom jeweiligen Produkt und der jeweiligen Produktgröße abhängig, liegt jedoch in der Regel in einem Bereich von 15 bis 30 % bezogen auf die Gesamtfläche der Zellwände.

### 2.2.2 Materialeigenschaften

Die Materialfestigkeit von Geozellen wird durch die Festigkeit des Streifenmaterials oder der Verbindung bestimmt. Gemäß DIN EN ISO 10319 wird die zulässige charakteristische Beanspruchung des Streifenmaterials durch den Wert der Kurzzeitzugfestigkeit beschrieben. Die Prüfung der Verbindungsfestigkeit ist normativ durch die in DIN EN ISO 13426-1 angegebenen Versuche geregelt. Hierbei werden vier unterschiedliche Prüfverfahren definiert, welche die maßgebenden Beanspruchungsarten für die Verbindungsstelle abbilden und folgendermaßen lauten.

- 1) Verfahren A - Zug-Scherprüfung: Verbindungsversagen durch parallel zur Verbindung angreifende Kräften mit entgegengesetzter Krafrichtung
- 2) Verfahren B - Schälfestigkeitsprüfung: Verbindungsversagen durch quer zur Verbindung angreifende Kräften mit Ablösung der Zellwände an den Enden der Verbindungsstelle
- 3) Verfahren C1 und C2 - Spaltzugprüfung: Verbindungsversagen durch quer zur Verbindung angreifende Kräfte mit einem Auseinanderziehen der beiden benachbarten Zellen
- 4) Verfahren D1 und D2 - Prüfung gegen örtliche Überbeanspruchung: Verbindungsversagen durch örtliche Überbelastung infolge der Beanspruchung aus den Befestigungselementen

Eine Übersicht zu den Wertebereichen der verschiedenen Festigkeiten und der zugehörigen axialen Dehnungen gängiger Geozellenprodukte enthält Tabelle 2.2. Diese wurden aus den Produktdatenblättern der Hersteller entnommen. Je nach Hersteller handelt es sich bei den Angaben um Nennzugfestigkeiten oder Höchstzugkräfte. Auf eine Differenzierung wird in der Übersicht verzichtet. Ebenso sind nur die Extremwerte zur Veranschaulichung von Wertebereichen dargestellt. Da die Produktdatenblätter teilweise nur wenig Informationen enthalten, werden die Angaben um die Versuchsergebnisse von Han et al. (2008), Pokharel (2010) und Emersleben (2010) ergänzt.

**Tab. 2.2:** Wertebereiche zur Materialfestigkeit gängiger Geozellenprodukte

Streifenmaterial der Geozellen	Perforation [-]	Mechanische Kenngrößen							
		Kurzzeitzugfestigkeit [kN/m]		Axiale Dehnung bei Zugfestigkeit [%]		Schälfestigkeit [kN/m]		Zugscherfestigkeit [kN/m]	
		Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.
Vliesstoff (PP)	ohne	13,0	22,0	25,0 <sup>(c)</sup>	55,0	9,0	10 <sup>(c)</sup>	k. A.	k. A.
PE-HD	mit	8,0 <sup>(c)</sup>	10,0 <sup>(a)</sup>	10,0 <sup>(c)</sup>	15,0 <sup>(c)</sup>	7,0	14,2/18 <sup>(c)</sup>	16,0	21,3
	ohne	12,0	16/18,8 <sup>(b)</sup>	k. A.	14,0*				
PE-HD (faserverstärkt)	mit	13,0	22,0	k. A.	k. A.	13,0	22,0	k. A.	k. A.
	ohne	20,0	25/26 <sup>(c)</sup>	12,0 <sup>(c)</sup>	15,0 <sup>(c)</sup>				

k. A. ≡ keine Angaben; <sup>(a)</sup> aus Han et al. (2008); <sup>(b)</sup> aus Pokharel (2010); <sup>(c)</sup> aus Emersleben (2010)

Ein Vergleich der Tabellenwerte zeigt, dass die Kurzzeitzugfestigkeiten im Wesentlichen von dem verwendeten Streifenmaterial und dem Flächenanteil der Perforation abhängig sind. Weiterhin werden diese maßgebend durch die jeweilige Zellwanddicke bestimmt. Für Geozellen

aus Vliesstoff beträgt die Kurzzeitzugfestigkeit zwischen 13,0 und 22,0 kN/m und für Geozellen aus PE-HD ohne Faserverstärkung zwischen 8,0 und 19,0 kN/m. Bei Geozellen aus faserverstärktem PE-HD fallen die Werte mit 13,0 bis 26,0 kN/m höher aus. Die Verbindungsfestigkeiten werden vornehmlich durch das Streifenmaterial und das gewählte Verbindungsverfahren beeinflusst. Im Vergleich zu den Kurzzeitzugfestigkeiten weisen diese mit 9,0 bis 22,0 kN/m einen geringeren oder gleichen Wert auf. Angaben zur Spaltzugfestigkeit oder der Festigkeit bei örtlicher Überbeanspruchung durch die Befestigungselemente lassen sich weder den Produktdatenblättern noch der Literatur entnehmen.

Auch zu den Dehnsteifigkeiten  $J$  des Streifenmaterials werden in den Produktdatenblättern keine Werte angegeben, weshalb zur Bestimmung dieser auf die Versuchsergebnisse von Kurzzeitzugversuchen aus der Literatur zurückgegriffen wird. Wie bei den Festigkeitsangaben in Tabelle 2.2 werden hierzu die Versuchsergebnisse von Han et al. (2008), Pokharel (2010) und Emersleben (2010) verwendet. Entsprechend den normativen Vorgaben nach DIN EN ISO 10318-1 sind die hieraus abgeleiteten Dehnsteifigkeiten als Sekantenmodul bei Axialdehnungen von 2, 5 und 10 % in Tabelle 2.3 dargestellt.

**Tab. 2.3:** Wertebereiche zu Dehnsteifigkeiten als Sekantenmodul gängiger Geozellenprodukte

Streifenmaterial der Geozellen	Perforation [-]	Dehnsteifigkeit $J$ [kN/m] bei einer Axialdehnung von					
		2 %		5 %		10 %	
		Min.	Max.	Min.	Max.	Min.	Max.
Vliesstoff (PP)	ohne	158,47	212,53	123,58	162,98	98,32	131,67
PE-HD	mit	126,49	250,51 <sup>(a)</sup>	121,14	165,23 <sup>(a)</sup>	81,21	95,01
	ohne	413,41 <sup>(b)</sup>	694,42	289,13 <sup>(b)</sup>	367,78	178,19 <sup>(b)</sup>	205,61
PE-HD (faserverstärkt)	mit	392,36 <sup>(b)</sup>		259,65 <sup>(b)</sup>		173,75 <sup>(b)</sup>	
	ohne	484,39 <sup>(b)</sup>	969,01	313,90 <sup>(b)</sup>	481,02	200,38 <sup>(b)</sup>	257,08

Ohne Kennzeichnung aus Emersleben (2010); <sup>(a)</sup> aus Han et al. (2008); <sup>(b)</sup> aus Pokharel (2010)

Die faserverstärkten Streifen aus PE-HD zeigen mit 390 bis 970 kN/m bei einer Axialdehnung von 2 % die höchsten Dehnsteifigkeiten. Infolge des verringerten Materialquerschnitts fallen die Dehnsteifigkeiten der perforierten Zellstreifen aus PE-HD mit 125 bis 250 kN/m gegenüber den unperforierten Streifen mit 410 bis 695 kN/m geringer aus. Die Zellstreifen aus Vliesstoff weisen mit 155 bis 210 kN/m vergleichbare Werte zu den perforierten Streifen aus PE-HD ohne Faserverstärkung auf.

Bei Geozellen mit einem Streifenmaterial aus polymeren Werkstoffen ist aufgrund deren Materialeigenschaften von einem mehr oder minder ausgeprägten temperatur- und zeitabhängigen Verhalten des Zellwandmaterials auszugehen. In diesem Zusammenhang sind für Geokunststoffe im Wesentlichen das Zugkriech- und Zeitstandbruchverhalten nach DIN EN ISO 13431 hervorzuheben. Zugfestigkeiten und Dehnsteifigkeiten bei Langzeitbeanspruchung werden jedoch in den herangezogenen Produktdatenblättern und Veröffentlichungen nicht angegeben.

## 2.3 Untersuchungen zur Wirkungsweise von Geozellen

### 2.3.1 Experimentelle Untersuchung

Zur Beurteilung der wesentlichen Einflussgrößen von Geozellen und zur Bestimmung der maßgebenden Wirkungsmechanismen einer geozellenbewehrten Schicht werden nachfolgend ausgewählte Untersuchungsergebnisse aus der Literatur vorgestellt. Der Schwerpunkt liegt hierbei auf experimentellen Untersuchungen mit einer isolierten Betrachtung von Einzelzellen oder Zellsystemen und einer ganzheitlichen Betrachtung der Wirkung der geozellenbewehrten Schicht. Eine isolierte Betrachtung beschreibt hierbei die Vernachlässigung des Einflusses aus einer Nachgiebigkeit des Untergrundes auf die Wirkungsweise, wohingegen bei einer ganzheitlichen Betrachtung dieser in den Versuchen berücksichtigt wurde. Eine tabellarische Übersicht ausgewählter Veröffentlichung mit den wesentlichen aus den Versuchen hervorgehenden Ergebnissen und Erkenntnissen ist in Tabelle 2.4 dargestellt.

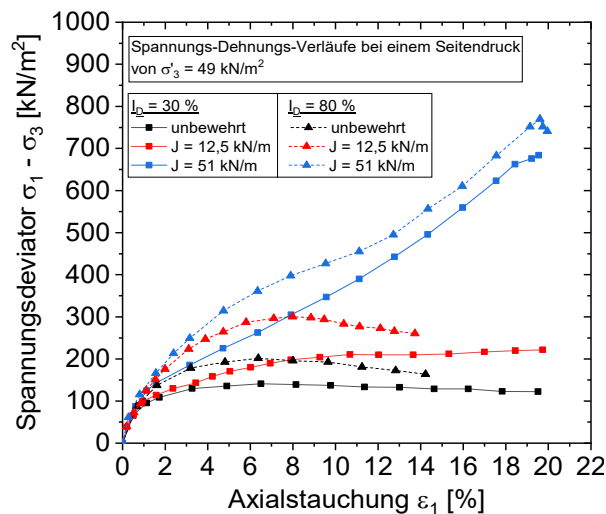
Aufgrund der bedingten Relevanz für die späteren Betrachtungen in dieser Arbeit soll hier nur kurz auf die Ergebnisse der experimentellen Untersuchungen zur isolierten Betrachtung eingegangen werden. Bei den in Tabelle 2.4 aufgelisteten Untersuchungen zur isolierten Betrachtung handelt es sich um Belastungsversuche auf starrem Untergrund und ummantelte Triaxialversuche. In den Belastungsversuchen auf starrem Untergrund wurde die Abmessungen der Lastplatte so gewählt, dass die mittig unterhalb der Lastplatte angeordnete Einzelzelle oder Zelle im Zellsystems ausschließlich innenliegend belastet wird. Infolgedessen und aufgrund der fehlenden Verformungen aus dem Untergrund führt die Belastung im Wesentlichen zu einer radialen Expansion der belasteten Zelle, wodurch in den Zellwänden Ringzugkräfte mobilisiert werden und der radialen Beanspruchung entgegenwirken. Wie beispielsweise Emersleben (2010) entnommen werden kann, zeigt sich hierbei in Abhängigkeit der initialen Zellgeometrie, den Materialeigenschaften des Füllmaterial und Zellwandmaterials eine wesentliche Reduktion der Verformungen. Bei zusätzlicher Anordnung weiterer Zellen um die belastete Zelle führt die radiale Expansion zu einer Verspannung des Füllmaterials in den Nachbarzellen, wodurch sich eine zusätzliche Verbesserung der Bewehrungswirkung ergibt.

Die Randbedingungen in den experimentellen Untersuchungen zu ummantelten Triaxialversuchen sind, wie zum Beispiel aus Priyadarshree (2013) hervorgeht, weitestgehend vergleichbar zu den Belastungsversuchen auf starrem Untergrund, da sich die Geozellen in beiden Versuchsarten überwiegend nur in radialer Richtung verformen können. Eine direkte Abbildung der Interaktion mit dem umliegenden Boden oder benachbarten Geozellen wird hierbei nicht berücksichtigt. Folglich stellen diese Versuche eine weitere Idealisierung verglichen zu Belastungsversuchen auf starrem Untergrund dar, in welchen vorwiegend der Einfluss aus der Mobilisierung von Ringzugkräfte in den Zellwänden auf das Füllmaterial betrachtet wird.

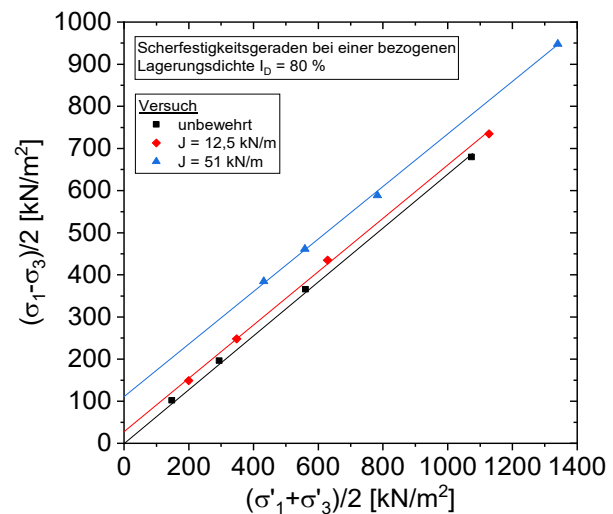
**Tab. 2.4:** Literaturübersicht zu experimentellen Untersuchungen mit den wesentlichen Ergebnissen

Autor	Untersuchung	Belastungsart	Ergebnisse
Isolierte Betrachtung experimenteller Belastungsversuche auf <u>starrem</u> Untergrund			
Emersleben (2010)	Monotone und zyklische Belastungsversuche mit Lastplatte und zylindrischem Druckkissen	Innenliegende starre Lastplatte & innenliegendes Druckkissen	Ringzugkräfte infolge radialer Expansion; bei kreisrunden Zellen ist mobilisierte Ringzugkraft größer und Bettung durch umliegendes Füllmaterial geringer; Zellsystem führt zu größerem Kissen- und höherer seitlicher Bettung
Pokharel (2010)	Monotone und zyklische Belastungsversuche	Innenliegende starre Lastplatte	Ringzugkräfte infolge radialer Expansion; Kreisrunde Zelle zeigt größere Verbesserung als sinusförmige (anisotropes Verhalten); Steifigkeits- bzw. Tragfähigkeitserhöhung um Faktor 1,3 bis 2,0 bzw. 1,5 bis 2,5; Zellsystem zeigt größere Verbesserung als Einzelzelle
Leshchinsky (2012)	Monotone und zyklische Belastungsversuche für Eisenbahndamm	Starre Lastplatte	Setzungsreduktion von 50 bis 70 % gegenüber unbewehrtem Versuch; Reduktion der seitlichen Dammverschiebungen von 40 bis 80 %; Dehnungen von ca. 1 % in Zellwänden
Isolierte Betrachtung in Triaxialversuchen			
Priyadarshee (2013)	Ummantelung mit einzelner Geozelle	Monotone Triaxialversuche	Ringzugkräfte infolge radialer Expansion; Festigkeitsanstieg mit zunehmender Dehnsteifigkeit des Zellwandmaterials; unveränderte ebene Gleitfläche bei geringer Dehnsteifigkeit; Ausbauchung bei hoher Dehnsteifigkeit; verzögerte Entfestigung; Steifigkeitsanstieg im Bereich kleinerer Dehnungen; Parallelverschiebung der Schergeraden mit äquivalenter Kohäsion bei unverändertem Reibungswinkel;
Bathurst & Rajapogal (1993) sowie Chen et al. (2013)	Ummantelung mit einzelner Geozelle und innenliegendes Zellsystem	Monotone Triaxialversuche	Ringzugkräfte infolge radialer Expansion; Parallelverschiebung der Schergeraden; Ummantelte Versuche zeigen ausgeprägtere Kontraktanz infolge initialer Verdichtung des Füllmaterials; nach Kontraktanz stärkere Dilatanz; zylindrische Zellen im System ergeben größere Verbesserung als hexagonale
Ganzheitliche Betrachtung experimenteller Belastungsversuche auf <u>nachgiebigem</u> Untergrund			
Emersleben (2010)	Monotone und zyklische Belastungsversuche	Überstehende starre Lastplatte	Vergleichmäßigung der Setzung und Vertikalspannung; Bewehrungswirkung durch Geozellen nimmt mit zunehmender Festigkeit des Füllmaterials und Höhe der Tragschicht ab; Anstieg von Verhältnis der Zellhöhe zum Zelldurchmesser zeigt weitere Verbesserung
Pokharel (2010)	Zyklische Belastungsversuche	Überstehende starre Lastplatte	Setzungsreduktion durch Vergleichmäßigung der Vertikalspannung; anisotropes Verformungsverhalten der Bewehrung
Mahdi Biabani (2015)	Zyklische Biaxialversuche	Vollflächige Lastplatte im EVZ	Bewehrungswirkung nimmt mit zunehmendem Seitendruck ab und mit höherer Belastungsfrequenz zu

Zur Veranschaulichung der experimentell festgestellten Mobilisierung von Ringzugkräften durch eine Geozellenbewehrung werden nachfolgend exemplarisch die Versuchsergebnisse von Priyadarshee (2013) vorgestellt. Dieser bildet eine einzelne Geozelle durch die Geokunststoffummantelung eines trockenen Sandes in einer Reihe von triaxialen Kompressionsversuchen ab. In den Versuchsreihen wurden die bezogene Lagerungsdichte  $I_D$  sowie die Dehnsteifigkeit und Festigkeit der Ummantelung variiert. Die Versuche wurden für verschiedene Seitendrücke weggesteuert mit einer Verschiebungsrate von 1,2 mm/min durchgeführt. Eine Übersicht zu den Materialkennwerten des Sandes und der verwendeten Geokunststoffe kann Anhang A.1 entnommen werden. Auszugweise sind die Ergebnisse anhand der Spannungs-Dehnungs-Kurven für eine Dehnsteifigkeiten der Ummantelung von  $J = 12,5$  und  $51$  kN/m sowie einer lockeren und dichten Lagerung von  $I_D = 30\%$  und  $80\%$  bei einem Seitendruck von  $\sigma'_3 = 49$  kN/m<sup>2</sup> in Abbildung 2.6 dargestellt.



**Abb. 2.6:** Versuchsergebnisse für  $\sigma'_3 = 49$  kN/m<sup>2</sup> aus Priyadarshee (2013)



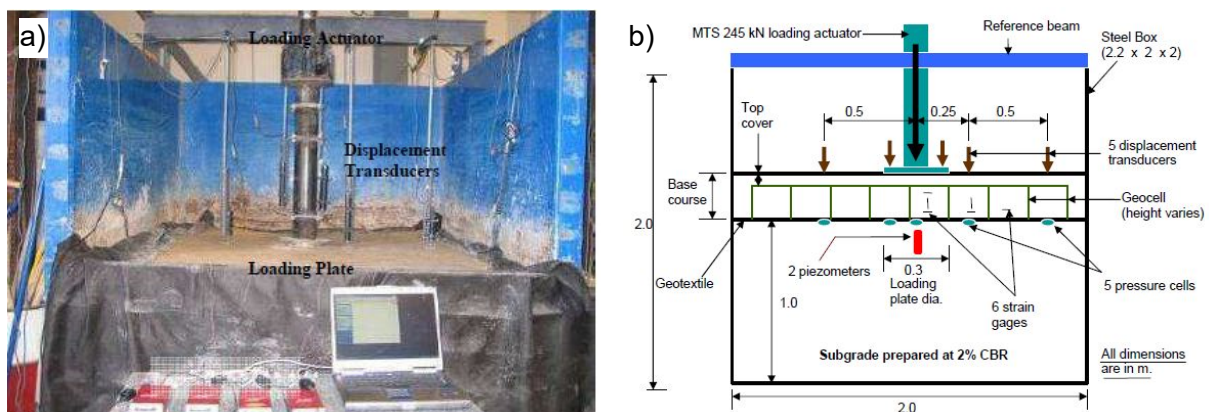
**Abb. 2.7:** Scherfestigkeitsgeraden für  $I_D = 80\%$  aus Priyadarshee (2013)

Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass verglichen zum unbewehrten Fall die Geokunststoffummantelung zu einem Anstieg der Peakscherfestigkeit führt und dieser Anstieg maßgeblich von der Dehnsteifigkeit der Ummantelung bestimmt wird. Mit der Zunahme der Dehnsteifigkeit geht ebenfalls eine Zunahme der Peakscherfestigkeit einher.

Eine Auswertung der Peakscherfestigkeit im  $(\sigma'_1 + \sigma'_3)/2 - (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ -Diagramm kann am Beispiel einer bezogenen Lagerungsdichte von  $I_D = 80\%$  Abbildung 2.7 entnommen werden. Demzufolge bewirkt die Ummantelung eine Parallelverschiebung der Scherfestigkeitsgeraden bei nahezu gleicher Geradensteigung. Die Parallelverschiebung resultiert aus einem zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  auf das Füllmaterial, welcher sich aus dem horizontalen Kräftegleichgewicht mit den Ringzugkräften der Ummantelung ergibt. Wird ergänzend die Scherfestigkeit in Form der Scherfestigkeitsparameter  $\varphi'$  und  $c'$  nach Mohr-Coulomb ausgedrückt, äußert sich die Bewehrungswirkung somit in einem unveränderten Reibungswinkel und einer zusätzlichen äquivalenten Kohäsion  $c^*$ . Diese an der ummantelten Einzelzelle festgestellte Beobachtung bildet die Grundlage für das in Kapitel 2.4.2.1 vorgestellte Homogenisierungsverfahren.



Die experimentellen Untersuchungen auf starrem Untergrund sowie die ummantelten Triaxialversuche vernachlässigen den Einfluss aus einer Nachgiebigkeit des Untergrundes. Unter Ansatz einer ausschließlich radialen Verformung würde die Bewehrungswirkung infolge einer Mobilisierung von Ringzugkräften wesentlich überschätzt werden, weshalb zusätzlich ganzheitliche Betrachtung unter Berücksichtigung eines nachgiebigen Untergrundes notwendig sind. Gut dokumentierte zyklische Belastungsversuche hierzu können Pokharel (2010) entnommen werden. Der Untergrund wurde hierbei aus einer Mischung des Tonminerals Kaolin und eines Mittelsandes hergestellt. Die undrainierte Scherfestigkeit des Untergrundes betrug zwischen ca. 35 bis 50 kN/m<sup>2</sup>. Nach dem Einbau des Untergrundes wurde ein Geovliesstoff ausgelegt und hierauf die bewehrte Tragschicht hergestellt. Die wesentlichen Kennwerte zu den verschiedenen Materialien können Anhang A.1 entnommen werden. In den Versuchen wurden die Geozellenhöhe, Lagenanzahl und das Füllmaterial variiert. Das Zellsystem wurde hierbei jeweils so angeordnet, dass sich eine Zelle genau mittig unterhalb der Lastplatte befindet und sich die Lasteinleitung überstehend auf mehrere Zellen erstreckt. Ein Foto des Versuchsstandes nach dem Einbau sowie eine schematische Darstellung der Instrumentierung kann Abbildung 2.8 entnommen werden.



**Abb. 2.8:** a) Foto zu Versuchsstand und b) schematische Darstellung der Instrumentierung aus Pokharel (2010)

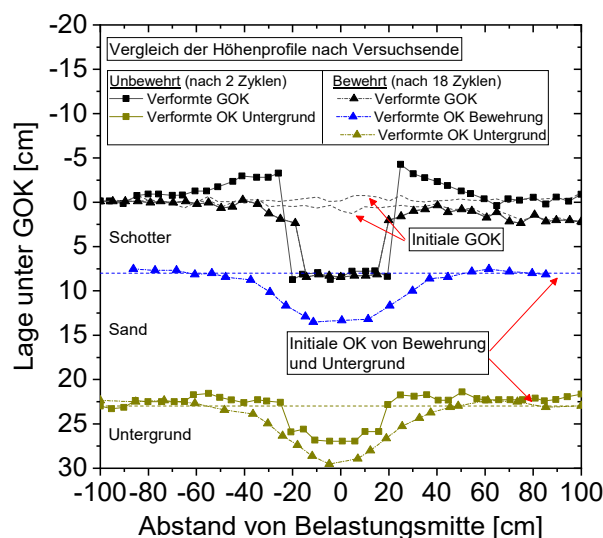
Gemessen wurden in den Versuchen die Größe der Belastung, die Lastplattensenkung, die Oberflächenverformungen und die Vertikalspannungen auf den Untergrund unterhalb des Geovliesstoffes. Sowohl die Oberflächenverformung als auch die Vertikalspannungen auf den Untergrund wurden mittig entlang der Längsrichtung der Geozellen aufgezeichnet. Zusätzlich erfolgte eine Messung der Verzerrungen der Zellwände mit Dehnungsmessstreifen in verschiedene Richtungen sowie eine Aufnahme des Höhenprofils in unterschiedlichen Tiefenlagen während des Versuchsausbaus. Alle Versuche wurden nach Erreichung einer permanenten Senkung der Lastplatte von 7,5 cm beendet.

Die wesentlichen Zusammenhänge werden nachfolgend exemplarisch anhand der Ergebnisse für den Versuch mit 15 cm hohen Geozellen und Sand als Füllmaterial erläutert. Oberhalb der geozellenbewehrten Schicht wurde in dem Versuch zusätzlich eine Schicht aus gebrochenem



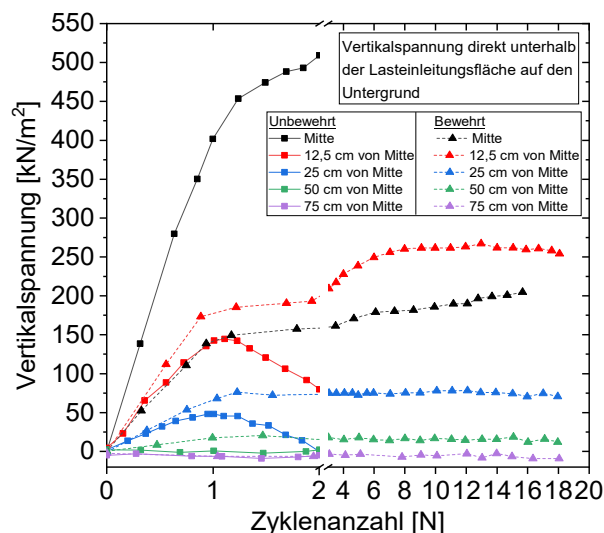
Kalkstein mit einer Dicke von 8 cm aufgebracht, sodass sich die Gesamtdicke der Tragschicht zu 23 cm ergab. Der Versuch wurde für eine bewehrte und unbewehrte Tragschicht mit dem gleichen Aufbau durchgeführt. Das Abbruchkriterium permanenter Setzung von 7,5 cm wurde in dem Versuch ohne Bewehrung bereits nach zwei Zyklen erreicht, während dieses im bewehrten Versuch nach 18 Zyklen erreicht wurde.

Abbildung 2.9 zeigt die Höhenprofile nach den Versuchen. Aus dem Vergleich wird ersichtlich, dass die Bewehrung zu einer reduzierten Hebung an der Oberkante und zu vergleichmäßigten Setzungen des Untergrundes führt. Zwar fallen die maximalen Setzungen des Untergrundes im bewehrten Versuch mit 7 cm höher als im unbewehrten Versuch mit 5 cm aus, jedoch ist hierbei die unterschiedliche Zyklenanzahl für den bewehrten Versuch mit 18 Zyklen und für den unbewehrten Versuch mit 2 Zyklen zur Erreichung des Abbruchkriteriums zu beachten.

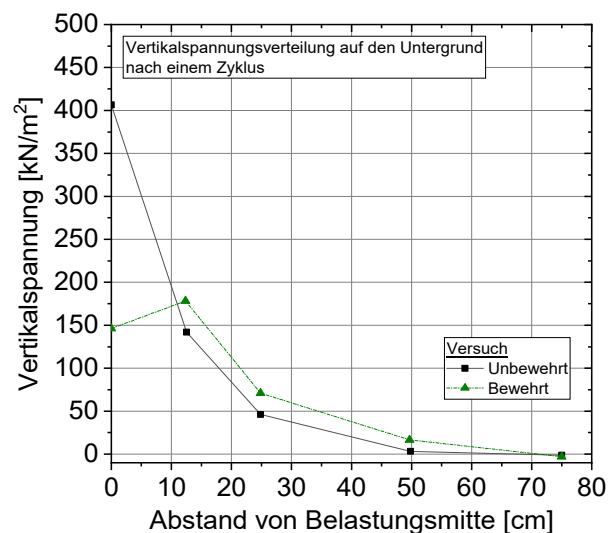


**Abb. 2.9:** Höhenprofile des un- und bewehrten Versuchs aus Pokharel (2010)

Aus dem Vergleich der Vertikalspannungen auf den Untergrund über die Zyklenzahl gemäß Abbildung 2.10 wird ersichtlich, dass diese direkt unterhalb der Lasteinleitung mit  $195 \text{ kN/m}^2$  im bewehrten Fall gegenüber  $500 \text{ kN/m}^2$  im unbewehrten Fall wesentlich kleiner ausfallen.



**Abb. 2.10:** Vertikalspannungen auf den Untergrund über die Zyklenanzahl aus Pokharel (2010)



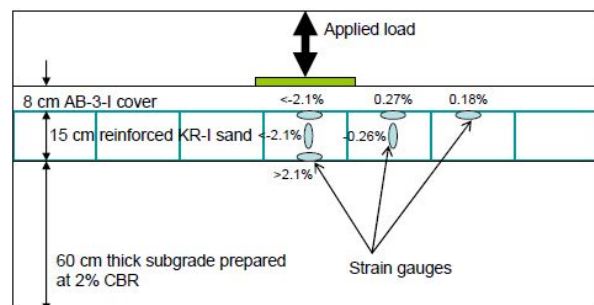
**Abb. 2.11:** Vertikalspannungen in Abhängigkeit des Abstands von der Belastung nach einem Zyklus aus Pokharel (2010)

Aus Abbildung 2.11 wird weiterhin deutlich, dass die Vertikalspannungen nach einem Zyklus mit zunehmenden Abstand zur Lasteinleitung für den bewehrten Fall höher ausfallen als für den unbewehrten Fall. Folglich tritt durch die Bewehrung eine Vergleichmäßigung der Vertikalspannungen mit einem geringeren Maximalwert aber größerer Wirkungsfläche auf den Untergrund ein. Pokharel (2010) führt dies auf eine erhöhte Lastausbreitung durch die Geozellenbewehrung gegenüber dem unbewehrten Fall zurück.

Eine nachträgliche Betrachtung der Geozellen direkt unterhalb der Lasteinleitung zeigt ein Aufreißen der Verbindungsstelle im unteren Bereich der Zellen infolge einer Überschreitung der Zugfestigkeit der Verbindung (vgl. Abb. 2.12). Außerhalb der Lasteinleitung liegende Zellen wiesen kein Versagen der Verbindungen auf. Die Zellen direkt unterhalb der Lasteinleitung zeigen an der Oberseite eine Längenverkürzung in Zellenlängsrichtung und eine Breitenvergrößerung in Zellenquerrichtung. Im Zusammenhang mit den in Abbildung 2.13 dargestellten Ergebnissen der Dehnungsmessung schließt Pokharel (2010) hieraus auf eine Plattenwirkung der bewehrten Schicht. Begründet wird dies durch die gemessenen Stauchungen und Dehnungen an der Ober- und Unterseite der Zellenwände direkt unterhalb der Lasteinleitung und einer Dehnung der Zellenwände an der Oberseite in einem Bereich weiter entfernt von der Lasteinleitung.



**Abb. 2.12:** Zugversagen der Verbindungen nach dem Versuch aus Pokharel (2010)



**Abb. 2.13:** Verzerrungen der Geozellen am Ende des Versuchs aus Pokharel (2010)

Zusätzlich beschreibt Pokharel (2010) in den bewehrten Versuchen mit gebrochenem Kalkstein die Entwicklung von Oberflächenrissen in einem Abstand von 20 bis 30 cm vom Lastplattenrand. Für die unbewehrten Versuche ließen sich diese nicht beobachten, woraus dieser ebenfalls auf eine Plattenwirkung des Zellsystems schließt. Zwar wurde das Auftreten von Stauchungen an der Oberseite und Dehnungen an der Unterseite in Zellenlängsrichtung in einem Großteil der bewehrten Versuche beobachtet, bei einzelnen Versuchen treten jedoch ausschließlich nur Dehnungen der Zellenwände auf. Hierbei fallen die Dehnungen an der Oberseite durchgehend geringer als an der Unterseite aus. Begründet wird dies durch einen zusätzlichen Membraneffekt der Bewehrung bei größeren Verformungen, sodass sich die Bewehrungswirkung aus der Überlagerung einer Platten- und Membranwirkung ergibt.

Auch Emersleben (2010) führte großmaßstäbliche monotone und zyklische Belastungsversuche durch. Als Untergrund kam hierbei Glyben zur Anwendung, welches sich aus einer Mischung aus Glycerin und Bentonit zusammengesetzt ist. In den Versuchen wies das Glyben eine undrainierte Scherfestigkeit von ca. 15 bis 25 kN/m<sup>2</sup> und eine Steifigkeit bei Wiederbelastung von 4 bis 6 kN/m<sup>2</sup> auf. Neben der Einwirkung und der Lastplattensetzung wurden die Oberflächenverformungen und die Vertikalspannungen auf den Untergrund gemessen. Die Variation der Versuchsrandbedingungen umfasste das Füllmaterial, die Zellengröße, die horizontalen Abmessungen des Zellsystems sowie die Schichtmächtigkeit. Wie Pokharel (2010) stellte Emersleben (2010) im bewehrten Fall eine Reduktion der Oberflächensetzung und der maximalen Vertikalspannung in Verbindung mit einer vergrößerten Lastfläche auf den Untergrund fest. Vergleichbare Zusammenhänge zum Einfluss einer geozellenbewehrten Schicht auf eine Reduktion der Setzungen und Vergleichmäßigung der Vertikalspannungen gehen aus einer Vielzahl an Veröffentlichungen hervor. Eine Übersicht hierzu ist unter anderem in Marto et al. (2013) oder Biswas & Krishna (2017) dargestellt.

### 2.3.2 Numerische Simulation

Neben den experimentellen Untersuchungen zur Wirkungsweise der Geozellenbewehrung in Kapitel 2.3.1 können der Literatur eine Reihe an numerischen Simulationen entnommen werden. Relevant sind hierbei die Simulationen, in denen eine diskrete Abbildung der Geozellen und des Bodens erfolgt, da nur hierdurch der Einfluss der Geozellen auf das Füllmaterial differenziert betrachtet werden kann. Bei den numerischen Untersuchungen handelt es sich ausschließlich um Simulationsverfahren mit der Methode der Finite-Elemente oder der Finite-Differenzen, bei welchen die Böden über Kontinua abgebildet werden. Die Geozellen wurden entweder als Platten-, Membran oder Kontinuumselemente modelliert. Vorwiegend wurden zur Kalibrierung der Simulationsmodelle die Versuchsergebnisse experimenteller Untersuchungen herangezogen und anschließend Parametervariationen zur Betrachtung des Einflusses verschiedener Einflussgrößen wie beispielsweise der Materialeigenschaften des Füll- oder Zellwandmaterials auf das Verbundverhalten durchgeführt.

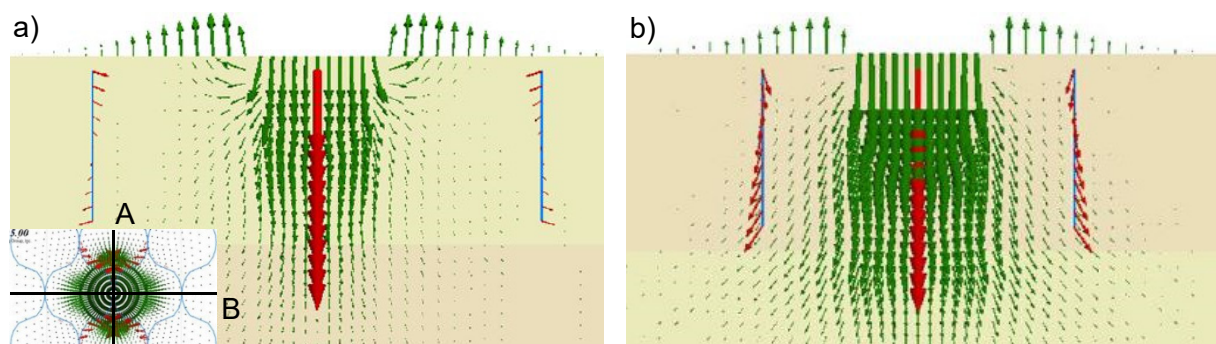
Die in Tabelle 2.5 aufgelisteten Simulationsergebnisse ausgewählter Literaturstellen wurden aufgrund der geometrischen Eigenschaften der Geozellen durchweg dreidimensional durchgeführt. Wie bereits bei den experimentellen Untersuchungen lassen sich diese in eine isolierte Betrachtung einer Einzelzelle auf starrem Untergrund und in eine ganzheitliche Betrachtung einer Einzelzelle oder eines Zellsystems auf nachgiebigem Untergrund unterteilen. Aus den Simulationen auf starrem Untergrund kann in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen auf eine vornehmliche Bewehrungswirkung infolge der Mobilisierung von Ringzugkräften in den Zellwänden geschlossen werden. Die Ringzugkräfte weisen hierbei inhomogene Verteilungen auf, wobei sich die Maximalwerte jeweils im unteren Bereich der Zellwände in Richtung der kürzen Zellabmessung beobachten lassen.

**Tab. 2.5:** Literaturübersicht zu numerischen Untersuchungen mit den wesentlichen Ergebnissen

Autor	Beschreibung	Ergebnisse
Isolierte Betrachtung von Simulationen auf <u>starrem</u> Untergrund		
Han et al. (2008)	Finite-Differenzen-Verfahren; rhombusförmige Einzelzelle auf starrem Untergrund mit innenliegender starrer Lastplatte	Längenverkürzung in Längsrichtung und Längenvergrößerung in Breitenrichtung (keine einheitliche radiale Expansion, anisotropes Verformungsverhalten); inhomogene Verschiebungsverteilung und Normalkraftverteilung; maximale Normalkräfte im unteren Wandbereich bei den Zellwänden in Breitenrichtung
Yang (2010)	Finite-Differenzen-Verfahren; sinusförmige Einzelzelle auf starrem Untergrund mit innenliegender kreisförmiger Verschiebungsrandbedingung	Vergleichbar zu Han et al. (2008); Ergänzend: Spannungsverteilung des Kontinuums zeigt zusätzlichen Stützdruck aus Zellwänden infolge Ringzugkräfte
Ganzheitliche Betrachtung von Simulation auf <u>nachgiebigem</u> Untergrund		
George (2015)	Finite-Differenzen-Verfahren; sinusförmige <u>Einzelzelle</u> auf nachgiebigem Untergrund mit innenliegender kreisförmiger Verschiebungsrandbedingung (Kennwerte: Untergrund $\equiv$ Füllmaterial)	Abweichendes Verformungsverhalten in Längs- und Breitenrichtung der Geozelle (anisotropes Verformungsverhalten); Zellwandverformung überwiegend nach unten gerichtet anstatt nach außen; maximale Verschiebungen an Oberseite
	Wie oben jedoch mit überstehender Verschiebungsrandbedingung auf <u>Einzelzelle</u> (Kennwerte: Untergrund $\equiv$ Füllmaterial)	Nahezu einheitliche Verschiebung nach unten; radiale Verschiebung von Zellwänden vernachlässigbar; keine Ringzugkräfte in Zellwänden und kein zusätzlicher Stützdruck auf Füllmaterial
	Wie oben jedoch <u>Zellsystem</u> auf weichem Untergrund mit überstehender Verschiebungsrandbedingungen; Zellwand mittig unterhalb Belastung (Kennwerte: Untergrund $\ll$ Füllmaterial)	Zellwandverschiebungen an Oberseite nach innen hin zur Belastung gerichtet; an der Unterseite zeigten Verschiebungen nach außen; ca. dreifache Belastung für gleiche Verschiebung verglichen zum unbewehrten Fall erforderlich
Hedge & Sitharam (2015b)	Finite-Differenzen-Verfahren; Zellsystem mit Sinusform; innenliegende Lastplatte (Kennwerte: Untergrund $\equiv$ Füllmaterial)	Anstieg der Tragfähigkeit durch Bewehrung; Reduktion der maximalen Vertikalspannung infolge Vergleichmäßigung; wesentlich höhere Spannungsgradienten in Füllmaterial unterhalb Lastplatte verglichen zu unbewehrtem Fall; Andeutung von Durchstanzversagen des Füllmaterials in belasteter Geozelle
Satyal et al. (2018)	Finite-Elemente-Verfahren; Zellsystem mit Sinusform auf weichem Untergrund; überstehende Spannungsrandbedingung als Belastung; Zellwand mittig unterhalb Belastung (Kennwerte: Untergrund $\ll$ Füllmaterial)	Geringere Setzung im bewehrten Fall aus Reduktion der Verformungen von Tragschicht und Untergrund; Vergleichmäßigung der Setzungen und Vertikalspannungen; maximale Zellwanddehnung von 1 % in Wand unterhalb von Lastplatte
	Wie oben jedoch Übertrag zu Damm auf weichem Untergrund; diskrete Abbildung von Schienen und Schwellen	Abnahme der Setzungen im bewehrten Fall infolge Vergleichmäßigung der Vertikalspannungen; Verminderung der lateralen Verschiebungen in Aufstandsfläche Effekt ausgeprägter abnehmender Untergrundfestigkeit

Exemplarisch für die numerischen Simulationen bei ganzheitlicher Betrachtung werden nachfolgend die wesentlichen Ergebnisse aus den Berechnungen von George (2015) vorgestellt. Dieser simulierte im Rahmen der Nachrechnung von Belastungsversuchen eine geozellenbewehrte Schicht aus dichtem Sand oberhalb eines Untergrundes aus lockerem Sand mit dem Finite-Differenzen-Verfahren. Die Steifigkeit des Untergrundes wurde zu ca. 25 % sowie deren Festigkeit zu ca. 66 % der oberen Schicht angenommen. Die Einwirkung wurde über eine kreisförmige Verschiebungsrandbedingung mit einem Durchmesser von 15 cm simuliert. Die Verschiebungsrandbedingung wurde hierbei so zum Zellsystem angeordnet, dass sich eine Zellwand mittig unterhalb der Belastung befindet. Die Geozellen wiesen eine zusammengesetzte Zellform mit einer Länge  $L_c$  von 30 cm sowie einer Breite  $W_c$  und Höhe  $H_c$  von jeweils 20 cm auf. Die Modellierung als zusammengesetzte Zellform dient dabei der vereinfachten Abbildung einer Sinusform der Geozellen und wurde durch jeweils 16 ebene Teilflächen pro Zelle nachgebildet. Für die Zellwände wurden Membranelemente verwendet und diesen ein isotropes linear elastisches Materialverhalten zugewiesen. Die beiden Sandschichten wurden durch Kontinuumsselemente mit einem isotrop linear elastisch ideal plastisch Materialverhalten und einer Fließbedingung nach Mohr-Coulomb abgebildet. Eine weitergehende Übersicht zu den gewählten Randbedingungen und verwendeten Materialmodellen kann Anhang A.1 entnommen werden.

Abbildung 2.14 zeigt auszugsweise die Ergebnisse der Simulation anhand der Verschiebungsvektoren bei einer Setzung von 3 cm im vertikalen Schnitt entlang der Längs- und Breitenrichtung. Die Verschiebungsvektoren der Zellwände sind rot und die des Kontinuums grün markiert dargestellt. Die Skalierung der Verschiebungsvektoren der Membranelemente ist abweichend zu der des Kontinuums.



**Abb. 2.14:** Verschiebungsvektoren im vertikalen Schnitt entlang der a) Längsrichtung (Schnitt A) und b) Breitenrichtung (Schnitt B) bei einer Setzung von 3,0 cm aus George (2015)

In beiden Richtungen verschieben sich die Wände an der Oberseite nach innen und an der Unterseite nach außen. Jedoch ergeben sich aufgrund der unterschiedlichen Abmessungen der Zellen im Zellsystem abweichende Verschiebungen in Längs- und Breitenrichtung, womit ein anisotropes Verformungsverhalten der geozellenbewehrten Schicht vorliegt. Bei einer homogenisierten Betrachtung der geozellenbewehrten Schicht würden die dargestellten Verschiebungen an der Oberseite zu Stauchungen und an der Unterseite zu Dehnungen führen.

Dies ist in Übereinstimmung mit den von Pokharel (2010) gemessenen Verzerrungen der Zellwände gemäß Abbildung 2.13, womit auch hier die Wirkungsweise der bewehrten Schicht vergleichbar zu einer Plattenwirkung aufgefasst werden kann. Die Zellwand direkt unterhalb der Lastplatte wird aus Symmetriegründen nur in vertikaler Richtung verschoben. Ebenfalls wird von George (2015) eine Reduktion und Vergleichmäßigung der Vertikalspannungen und Setzungen infolge der Plattenwirkung beschrieben.

Vergleichbare Ergebnisse zu einer Vergleichmäßigung der Beanspruchung des Untergrundes ergeben sich auch aus der Nachrechnung von Belastungsversuchen einer geozellenbewehrten Schotterschicht auf weichem Untergrund nach Satyal et al. (2018). Zur Modellierung wurden die Geozellen diskret mit einer Sinusform durch Membranelemente ohne Biege- und Drucksteifigkeit abgebildet, wobei die Abmessungen einer Geozelle jeweils 32 cm x 28,7 cm x 15 cm ( $L_c \times W_c \times H_c$ ) betrugen. Durch einen Übertrag des Modells auf einen Eisenbahndamm konnte neben der Reduktion der Vertikalspannungen und Setzungen zusätzlich eine Abnahme der lateralen Verschiebungen durch die Geozellenbewehrung am Dammfuß festgestellt werden. Eine weitergehende Zusammenfassung der Literatur zu numerischen Simulationen in Verbindung mit Geozellen kann unter anderem Hedge (2017) sowie Biswas & Krishna (2017) entnommen werden.

### **2.3.3 Wesentliche Zusammenhänge**

#### **2.3.3.1 Einflussfaktoren**

Die vorgestellten Ergebnisse aus der Literatur verdeutlichen, dass eine Geozellenbewehrung unabhängig von den jeweiligen Randbedingungen zu einer Verbesserung gegenüber dem unbewehrten Fall führt. Hierbei äußert sich die Verbesserung in Form einer erhöhten Tragfähigkeit und verminderten Verformungen bei gleicher Belastung. Auch wenn eine pauschalisierte Beurteilung der jeweiligen Einflussfaktoren aufgrund der starken Abhängigkeit vom Anwendungsfall und den zugehörigen Randbedingungen grundsätzlich nur bedingt möglich ist, sollen nachfolgend die aus der Literatur hervorgehenden Einflussfaktoren kurz zusammengefasst werden. Bezogen auf die Eigenschaften von Geozellen lassen sich die jeweiligen Einflussfaktoren auf die Bewehrungswirkung folgendermaßen zusammenfassen.

- 1) Verbesserung der Bewehrungswirkung mit zunehmendem Verhältnis der Zellenhöhe  $H_c$  zur horizontalen Zellenabmessung  $L_c$  und  $W_c$
- 2) Verbesserung der Bewehrungswirkung mit zunehmender Dehnsteifigkeit und Zugfestigkeit des Zellwandmaterials
- 3) Verbesserung der Bewehrungswirkung bei Strukturierung und Perforation der Zellwandoberfläche

In Bezug auf die Eigenschaften des Füllmaterials zeigt sich eine vergrößerte Bewehrungswirkung bei minder qualifiziertem Füllmaterial wie zum Beispiel Sand. Der Grund hierfür ist in dem

Verbesserungspotential des jeweiligen Füllmaterials zu finden. Da beispielsweise Schotter bereits im unbewehrten Fall eine hohe Festigkeit und Steifigkeit aufweist, führt eine Geozellenbewehrung nur bedingt zu verbesserten Eigenschaften des Verbundmaterials. Vergleichbare Zusammenhänge gelten auch für die Zustandsgrößen des jeweiligen Füllmaterial. Zum Beispiel ergibt sich bei geringerer Lagerungsdichte, d. h. geringere Festigkeit und Steifigkeit, ein erhöhtes Verbesserungspotential. Ergänzend können bezogen auf die jeweiligen Randbedingungen folgende Einflussfaktoren auf die Bewehrungswirkung festgestellt werden.

- 1) Abnahme der Bewehrungswirkung mit zunehmendem „natürlichen“ Seitendruck
- 2) Anstieg der Bewehrungswirkung mit zunehmender axialer Stauchung des Füllmaterials
- 3) Anstieg der Bewehrungswirkung mit zunehmender Frequenz der Belastung

Unter dem natürlichen Seitendruck wird hierbei der Seitendruck verstanden, welcher abzüglich des zusätzlichen Stützdrucks aus der Bewehrung im unbewehrten Fall anstehen würde. Wie bei den Eigenschaften des Füllmaterials lässt sich der Grund auf das Verbesserungspotential zurückführen. Bei hohem natürlichen Seitendruck führt der zusätzliche Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  aus der Geozellenbewehrung nur zu einer geringen Verbesserung. Weiterhin ist der zusätzliche Stützdruck von den Ringzugkräften und damit der radialen Expansion des Füllmaterials abhängig. Die radiale Expansion nimmt mit ansteigender axialer Stauchung des Füllmaterials zu, weshalb mit einem Anstieg der axialen Stauchung auch eine zunehmende Verbesserung der Bewehrungswirkung aus den Geozellen einhergeht.

#### 2.3.3.2 Bewehrungswirkung der Geozellen

Unter Berücksichtigung der Beobachtungen aus den experimentellen und numerischen Untersuchungen sowie den gegebenen Randbedingungen lässt sich die Bewehrungswirkung eines Geozellensystems auf folgende Mechanismen zurückführen.

Bei vorwiegend radialen Verformungen des Füllmaterials führt die Bewehrung mit Geozellen zu einem zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  auf das Füllmaterial, welcher sich aus der Mobilisierung von Ringzugkräften in den Geozellenwänden ergibt. Der zusätzliche Stützdruck spiegelt sich bei rein äußerlicher Betrachtung in einer erhöhten Festigkeit und Steifigkeit des Verbundmaterials Geozelle-Boden verglichen zum unbewehrten Fall wider (vgl. Kap. 2.4.2.1). Die erhöhte Festigkeit äußert sich wiederum in einer Parallelverschiebung der Scherfestigkeitsgeraden mit einer zusätzlichen Kohäsion bei nahezu unverändertem Reibungswinkel. Bei ausreichender hoher Dehnsteifigkeit des Zellwandmaterials bewirkt die Geozellenummantelung eine höhere Kontraktanz und damit eine größere anfängliche Verdichtung des Füllmaterials, wodurch eine verzögerte oder unterbundene Entfestigung des Füllmaterials auftritt. Bei geringen natürlichen Seitendrücken und hoher Dehnsteifigkeit führt die Geozellenummantelung zu einem nahezu linearen Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Verbundmaterials, welches maßgebend von der Dehnsteifigkeit des Zellwandmaterials bestimmt wird (s. Abb. 2.6). Der Effekt des zusätzlichen Stützdrucks ist insbesondere für eine innenliegende Belastung bei kreisrunden

Einzelzellen auf starrem Untergrund ausgeprägt. Durch den umliegenden Boden und die benachbarten Geozellen ergibt sich ein nochmals gesteigerter Stützdruck aus der Verspannung des Füllmaterials in den Nachbarzellen. Weiterhin wird durch die Geozellen ein lokales Scherversagen an der Oberfläche unterbunden.

Abweichend zu vorstehender isolierter Betrachtung lässt sich der Literatur bei ganzheitlicher Betrachtung einer geozellenbewehrten Schicht auf einem nachgiebigen Untergrund eine Vergleichmäßigung der Setzungs- und Vertikalspannungsverteilung mit einer Reduktion der Maximalwerte entnehmen. Diese Vergleichmäßigung wurde nicht nur in Laborversuchen, sondern auch in Feldversuchen unter anderem von Emersleben (2010) an einer Straße und von Palese et al. (2018) an einem Eisenbahndamm festgestellt. Teilweise wird in der Literatur die Vergleichmäßigung mit einer vergrößerten Lastausbreitung durch die geozellenbewehrte Schicht begründet, welche zu einer größeren Lastfläche und geringeren Beanspruchung auf den Untergrund führt. Alternativ wird die Vergleichmäßigung in der Literatur auf eine Plattenwirkung der geozellenbewehrten Schicht zurückgeführt. Diese geht sowohl aus den hier vorgestellten Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen als auch aus denen der diskreten Modellierung hervor und ergibt sich aus einem nicht zu vernachlässigenden Einfluss durch die Zellhöhe  $H_c$ . Bei genauerer Betrachtung ist eine Differenzierung zwischen einer vergrößerten Lastausbreitung und einer Plattenwirkung wenig sinnvoll, da beide Ansätze zu einer vergleichmäßigten Verteilung der Setzungen und Vertikalspannungen führen. Bei rein äußerlicher Betrachtung der geozellenbewehrten Schicht liegt somit für beide Ansätze die gleiche Wirkungsweise vor. Weiterhin werden in der Literatur beide Begrifflichkeiten häufig gleichbedeutend verwendet, weshalb auf eine Unterscheidung verzichtet wird und nachfolgend nur der Begriff der Plattenwirkung verwendet wird.

Unter hier nicht näher bestimmten, großen Verformungen ergibt sich aus der geometrischen Nichtlinearität, wie bei allen anderen mechanischen Tragwerkstrukturen, eine zusätzliche Bewehrungswirkung durch Membrankräfte. Für eine vertikale Einwirkung und eine horizontale Bewehrungslage geht infolge von Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten System aus den Membrankräften neben einer horizontalen eine vertikale Kraftkomponente hervor, welche der Einwirkung zusätzlich entgegenwirkt. Die vertikale Kraftkomponente wird hierbei maßgebend durch die Größe der Verformung der Bewehrungslage sowie deren Dehnsteifigkeit bestimmt. Abschließend lassen sich somit der Literatur die folgenden drei primären Wirkungsweisen einer geozellenbewehrten Schicht entnehmen.

- 1) Zusätzlicher Stützdruck infolge von Ringzugkräften bei vorwiegend radialer Verformung
- 2) Plattenwirkung bzw. erhöhte Lastausbreitung auf nachgiebigem Untergrund
- 3) Membranwirkung mit zunehmenden Vertikalverformungen der Bewehrungslage



## 2.4 Berechnungsverfahren

### 2.4.1 Betrachtungsweisen

Grundsätzlich können die Berechnungsverfahren für das Verbundmaterial Geozelle-Boden in der Literatur auf zwei unterschiedliche Betrachtungsweisen zurückgeführt werden. Einerseits wird das Verbundmaterial unter ausschließlicher Berücksichtigung dessen äußerer Bewehrungswirkung abgebildet. Eine diskrete Betrachtung der Interaktion zwischen den Geozellen und den Zellwänden und damit der inneren Kräfte des Verbundmaterials bleibt hierbei weitestgehend unberücksichtigt. Der Betrachtungsweise der äußeren Bewehrungswirkung lassen sich folgende Berechnungsverfahren zuordnen.

- 1) Homogenisierte Abbildung über äquivalente Materialkennwerte
- 2) Homogenisierte Abbildung über das mechanische Modell eines Balkens
- 3) Äußere Bewehrungswirkung in Tragfähigkeitsnachweisen (z. B. Lastausbreitungswinkel)

Bei der homogenisierten Abbildung über äquivalente Materialkennwerte sind für das Verbundmaterial Geozelle-Boden keine besonderen Nachweise in den verschiedenen Grenzzustände erforderlich. Vielmehr werden die äquivalenten Materialkennwerte direkt auf bestehende Nachweisverfahren, wie z. B. Grundbruchnachweis oder Verformungsberechnungen, angewendet. Diskrete Strukturnachweise zum Verbundmaterial werden hierbei nicht geführt.

Ergänzend hierzu wurden in der Literatur Nachweisverfahren unter Berücksichtigung einer diskreten Abbildung der Geozellen und des Füllmaterials entwickelt. Die diskrete Betrachtung bezieht sich weitestgehend auf „innere“ Nachweise zur Materialfestigkeit des Verbundmaterials Geozelle-Boden als Strukturnachweise, in denen die Interaktion zwischen beiden Teilkomponenten direkt berücksichtigt wird. Nachfolgend werden ausgewählte Berechnungsansätze bei rein äußerlicher Abbildung der Bewehrungswirkung und bei diskreter Betrachtung vorgestellt.

### 2.4.2 Homogenisierte Abbildung

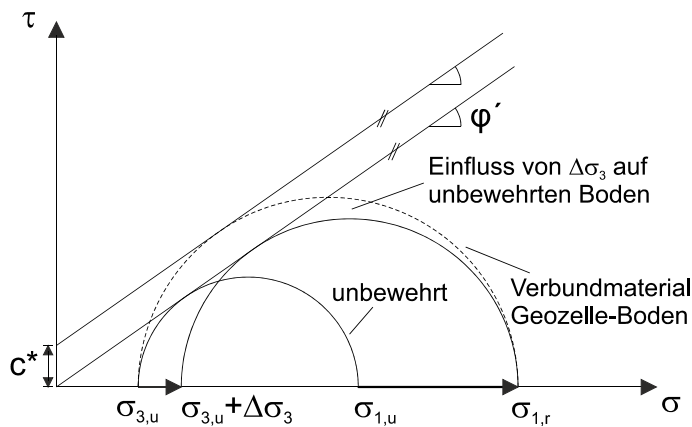
#### 2.4.2.1 Äquivalente Materialkennwerte

Entsprechend den Ausführungen zur Wirkungsweise bei vorwiegender Radialverformung in Kapitel 2.3.3.2 führt die Geozelle zu einem zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  auf das Füllmaterial. Zur Berechnung des zusätzlichen Seitendrucks aus der Geozellenummantelung wurde von Bathurst & Rajapogal (1993) ein Ansatz von Henkel & Gilbert (1952) zur Ergebniskorrektur von Triaxialversuchen herangezogen. Diese gingen wiederum von der Kesselformel für dünnwandige zylindrische Druckbehälter mit Innendruck aus. Unter Heranziehung des Kräftegleichgewichts zwischen Ringzugkräften und Innendruck in Verbindung mit der Annahme einer rechtwinkligen und volumenkonstanten Verformung der zylindrischen Geozelle geben Bathurst & Rajapogal (1993) den zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  entsprechend Gleichung (2.1) an.

$$\Delta\sigma_3 = \frac{2J}{D_0^*} \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon_a}}{1 - \varepsilon_a} \quad (2.1)$$

mit: Axiale Stauchung  $\varepsilon_a$   
 äquivalenter Zelldurchmesser  $D_0^*$

Demnach hängt der zusätzliche Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  von der Dehnsteifigkeit des Zellwandmaterials, dem äquivalenten Zelldurchmesser und den Axialstauchung ab. Der äquivalente Durchmesser fasst hierbei die unterschiedlichen Längenabmessungen der Geozelle in Längs- und Querrichtung in einer geometrischen Größe zusammen. Der Einfluss des zusätzlichen Stützdrucks auf die Scherfestigkeit wurde von Bathurst & Rajapogal (1993) anhand der Bruchbedingung über die Mohr'schen Hauptspannungskreise im  $\tau$ - $\sigma$ -Diagramm verdeutlicht (vgl. Abb. 2.15).



**Abb. 2.15:** Einfluss der Geozellenummantelung auf die Schergerade nach Bathurst & Rajapogal (1993)

Ausgehend von einer minimalen Hauptspannung  $\sigma_{3,u}$  für den unbewehrten Fall ist die maximal zulässige Hauptspannung durch die Bruchbedingung auf  $\sigma_{1,u}$  beschränkt. Infolge der zusätzlichen Stützdrucks  $\Delta\sigma_3$  aus der Geozellenummantelung verschiebt sich der Spannungskreis nach rechts und die zulässige maximale Hauptspannung erhöht sich auf  $\sigma_{1,r}$ . Bei Betrachtung der Bruchbedingung des ummantelten Bodens als homogenisiertes Verbundmaterial äußert sich der zusätzliche Stützdruck in einer Parallelverschiebung der Schergeraden mit unverändertem Reibungswinkel. Der Betrag des Schnittpunktes der Schergeraden mit der  $\tau$ -Achse in Abbildung 2.15 entspricht der äquivalenten Kohäsion  $c^*$  des Verbundmaterials Geozelle-Boden im Bruchzustand.

Die Ermittlung einer analytischen Lösung für die äquivalente Kohäsion folgt gemäß Rajapogal et al. (1999) aus der Definition der Scherfestigkeit nach Mohr-Coulomb.

$$\sigma_{1,r} = \frac{1 + \sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'} \sigma_{3,u} + 2c^* \sqrt{\frac{1 + \sin\varphi'}{1 - \sin\varphi'}} = K_p \sigma_{3,u} + 2c^* \sqrt{K_p} \quad (2.2)$$

mit: Passiver Erddruckbeiwert  $K_p = \tan^2 \left( 45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right)$

Wird weiterhin die Scherfestigkeit eines nichtbindigen Füllmaterials ohne Bewehrung mit dem Seitendruck  $\sigma_3 + \Delta\sigma_3$  nach Gleichung (2.3) formuliert,

$$\sigma_{1,r} = K_p (\sigma_{3,u} + \Delta\sigma_3) \quad (2.3)$$

lässt sich unter Ansatz, dass entsprechend Gleichung (2.2) die Scherfestigkeit in beiden Fällen identisch ist, die äquivalente Kohäsion  $c^*$  ermitteln aus

$$c^* = \frac{\Delta\sigma_3}{2} \sqrt{K_p}. \quad (2.4)$$

Bei vorstehender Herleitung wird vereinfacht auf eine Differenzierung zwischen effektiven und totalen Spannungen verzichtet, da sich hieraus kein Unterschied für die Ableitung der Gleichungen ergibt. Die Bestimmung der äquivalenten Kohäsion nach Gleichung (2.4) besitzt nur für die gegebenen Randbedingungen bei triaxialer Kompression Gültigkeit. Auch wenn von Rajapogal et al. (1999) nicht explizit beschrieben wird, liegen der Herleitung die Annahmen zugrunde, dass die Ummantelung keinen Einfluss auf die Form der Gleitflächen besitzt und keine Relativverschiebungen zwischen Ummantelung und Füllmaterial auftreten. Folglich wird eine Wandreibung zwischen Füllmaterial und Ummantelung vernachlässigt und für den passiven Wandreibungswinkel gilt  $\delta_p = 0^\circ$ . Weiterhin ist Gleichung (2.1) unabhängig von der Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Ummantelung. Dementsprechend kann die Dehnsteifigkeit durch ein beliebiges Materialverhalten, bspw. linear oder nichtlinear elastisch, beschrieben werden. Unter Ansatz einer konstanten Dehnsteifigkeit für die Ummantelung besitzt der zusätzliche Seitendruck nach Gleichung (2.1) keine obere Schranke, sondern nimmt mit axialer Stauchung kontinuierlich zu. Zur Ermittlung des maximal möglichen zusätzlichen Stützdrucks  $\Delta\sigma_3$  im Bruchzustand und damit der äquivalenten Kohäsion nach Gleichung (2.4) ist folglich die Stauchung im Bruchzustand der ummantelten Versuche einzusetzen. Bei hoher Dehnsteifigkeit der Ummantelung hängt diese entweder von der Festigkeit des Zellwandmaterials oder der Verbindungsstelle und bei geringen Dehnsteifigkeiten von der Scherfestigkeit des Füllmaterials ab (vgl. Abb. 2.6).

Anstelle der zur Herleitung von Gleichung (2.1) angenommenen Volumenkonstanz gehen Chen et al. (2013) von einem veränderlichen Volumen aus. Durch entsprechende Umformung von Gleichung (2.1) mit der zusätzlichen Einführung einer Volumendehnung  $\varepsilon_v$  und der Annahme einer rechtwinkligen Verformung als Zylinder wurde der Einfluss einer Volumenänderung des Füllmaterials auf den zusätzlichen Seitendruck  $\Delta\sigma_3$  berücksichtigt. Chen et al. (2013) verwenden diesen Ansatz ausschließlich zur Rückrechnung der Messergebnisse von ummantelten Triaxialversuchen, weshalb Messwerte für die Volumendehnung herangezogen werden und die Volumendehnung nicht analytisch beschrieben wird.

Vorstehende Zusammenhänge beziehen sich ausschließlich auf die Betrachtung des zusätzlichen Stützdrucks und der Scherfestigkeitsparameter des homogenisierten Verbundmaterials Geozelle-Boden für den Bruchzustand. Zur Berücksichtigung des Einflusses der Geozellenummantelung auf das Verformungsverhalten bedienen sich Rajapogal et al. (2001) und später Madhavi Latha (2008) einer vereinfachten Form der hyperbolischen Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Duncan-Chang. Rajapogal et al. (2001) ermitteln die notwendigen Kennwerte

empirisch durch die Nachrechnung von Modellversuchen eines geozellenbewehrten Damms aus tonigem Sand auf einem Untergrund aus gesättigtem Ton über Simulationen mit der Finite-Elemente-Methode. Hieraus ergibt sich folgende Gleichung für den äquivalenten Elastizitätsmodul  $E^*$  der homogenisierten Schicht.

$$E^* = 4(K_u + 200J^{0,16})\sigma_3^{0,7} \quad (2.5)$$

mit: Dimensionsloser Parameter des unbewehrten Bodens  $K_u$

Madhavi Latha (2008) empfiehlt die Bestimmung der Dehnsteifigkeit  $J$  bei einer Dehnung von 2,5 % als Sekantenmodul aus Zugkraft-Dehnungs-Kurven für das Streifenmaterial.

Soweit aus der Ableitung nach Rajagopal et al. (2001) ersichtlich wird, ist für die minimale Hauptspannung  $\sigma_3$  in Gleichung (2.5) der Seitendruck ohne den zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$  einzusetzen. Folglich nimmt der äquivalente Elastizitätsmodul  $E^*$  einen konstanten Wert für eine gegebene Dehnsteifigkeit und einen gegebenen Seitendruck an. Eine dehnungsabhängige Zunahme von  $E^*$  in Abhängigkeit des zusätzlichen Seitendrucks von der Axialstauchung gemäß Gleichung (2.1) bleibt hingegen unberücksichtigt. Gleichung (2.5) besitzt aufgrund der empirischen Ableitung ausschließlich für die in den Modellversuchen gegebenen Randbedingungen Gültigkeit. Für eine Übertragung auf andere Randbedingungen ist eine erneute empirische Anpassung der Gleichung unter Berücksichtigung der gewählten Geozellen und des Füllmaterials sowie des vorhandenen Untergrundes notwendig.

Ergänzende Betrachtungen zum äquivalenten Elastizitätsmodul  $E^*$  wurden auch von Moghaddas Tafreshi et al. (2015) durchgeführt. Diese modifizieren im Zuge der Nachrechnung von Belastungsversuchen an einem bewehrten Gründungspolster, bestehend aus mehrlagigen Geozellenlagen aus Vliesstoff und Sand als Füllmaterial, Gleichung (2.5). Basierend auf den Ergebnissen von nicht näher beschriebenen unbewehrten und ummantelten Triaxialversuchen wird der äquivalente Elastizitätsmodul als Tangentenmodul in Abhängigkeit der axialen Stauchung durch eine Regressionsanalyse ermittelt. Die Versuche werden in inkrementeller Form über die Abschätzung des Seitendrucks in der jeweiligen Schichtmitte und der axialen Stauchung am Ende des vorherigen Lastschritts nachgerechnet. Für die Querdehnzahl der geozellenbewehrten Schichten bedienen sich Moghaddas Tafreshi et al. (2015) hierbei nicht näher beschriebenen Literaturangaben mit  $\nu^* = 0,25$  und  $0,2$  für eine einlagige und mehrlagige Geozellenbewehrung.

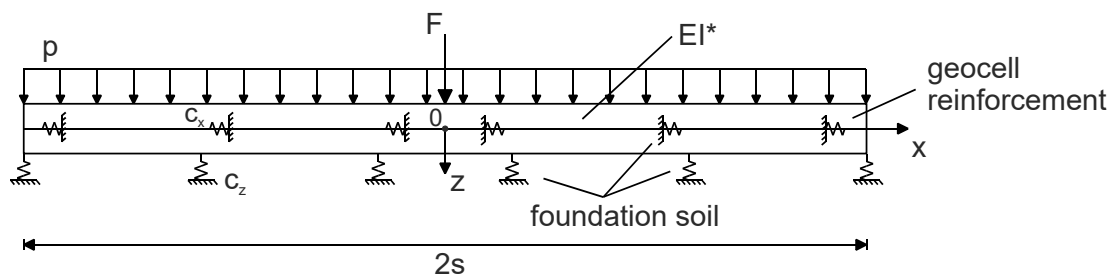
Die vorstehend angegebenen äquivalenten Materialkennwerte werden in einer Reihe von Veröffentlichungen zu zweidimensionalen Simulationen mit der Finite-Elemente- oder Finite-Differenzen-Methode verwendet. Dabei wird die geozellenbewehrte Schicht durch eine homogene Schicht gleicher Mächtigkeit als Kontinuum mit äquivalenten Kennwerten abgebildet. Beispielsweise modellieren Bathurst & Knight (1998) das Last-Setzungs-Verhalten von Belastungsversuchen oberhalb einer Kanalleitung im ebenen Verzerrungszustand. Zur Simulation

eines geozellenbewehrten Sandes wurde der homogenisierten Schicht ein nichtlineares Stoffmodell nach Duncan-Chang mit einer äquivalenten Kohäsion  $c^*$  gemäß Gleichung (2.4) und einem äquivalenten Elastizitätsmodul  $E^*$  ähnlich Gleichung (2.5) zugewiesen. Für beide Größen werden konstante Werte verwendet und der Reibungswinkel unverändert gegenüber dem unbewehrten Sand belassen. Einen vergleichbaren Ansatz verfolgen auch Rajagopal et al. (2001) und Madhavi Latha et al. (2009) zur Nachrechnung von Belastungsversuchen auf einem geozellenbewehrten Dammkörper mit weichem Untergrund und auf einem bewehrten Gründungspolster. Hedge & Sitharam (2015b) hingegen verwenden ein linear elastisches ideal plastisches Stoffmodell mit einer Fließbedingung nach Mohr-Coulomb zur Simulation von Belastungsversuchen an einer geozellenbewehrten Sandschicht. Die bewehrte Schicht wurde ebenfalls über ein homogenisiertes Kontinuum mit einem äquivalenten Elastizitätsmodul und einer äquivalenten Kohäsion nach Gleichung (2.4) abgebildet. Auch hier wurden konstante Werte mit unverändertem Reibungswinkel angesetzt.

#### 2.4.2.2 Ansatz als äquivalenter Balken

Wie in Kapitel 2.3.3.2 angeführt wurde, lässt sich die Bewehrungswirkung des Verbundmaterials Geozelle-Boden durch eine Balken- oder Plattenwirkung beschreiben. Demzufolge finden sich in der Literatur eine Reihe von Veröffentlichungen, in welchen das Verhalten der bewehrten Schicht durch das mechanische Modell eines äquivalenten Balkens abgebildet wird. Die Betrachtungsweise der geozellenbewehrten Schicht als äquivalenter Balken unterscheidet sich infolge des abweichenden Abtragsverhaltens grundlegenden von der in Kapitel 2.4.2.1 beschriebenen Bewehrungswirkung über den zusätzlichen Stützdruck  $\Delta\sigma_3$ .

Überwiegend wird in der Literatur das Verbundmaterial als äquivalenter Balken in Verbindung mit rheologischen Modellen verwendet. Unter rheologischen Modellen werden hierbei die diskreten Grundmodelle einer Feder, eines Dämpfers oder Reibelementes sowie deren Kombination verstanden (Gross et al. 2011b) und dienen in den vorgestellten Literaturquellen zur Abbildung der Interaktion mit dem umliegenden Boden. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 2.16 das von Zhang et al. (2009) verwendete Modell dargestellt.



**Abb. 2.16:** Horizontal und vertikal gebetteter Balken aus Zhang et al. (2009)

Hierbei handelt es um einen elastisch gebetteten Balken mit einer äquivalenten Biegesteifigkeit  $EI^*$  unter einer Gleichlast  $p$  und einer Punktlast  $F$ . Die elastische Bettung wird hierbei über vertikale Federelemente mit der Federkonstanten  $c_z$  abgebildet. Zur Berücksichtigung

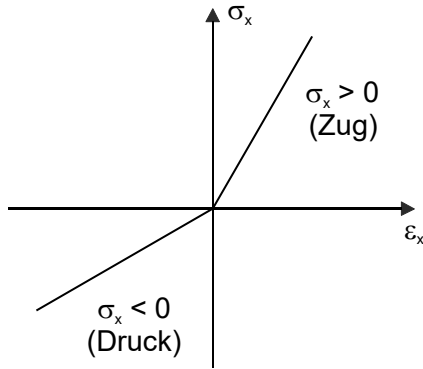
von verschiebungsabhängigen Scherkräften an der Ober- und Unterseite der Bewehrungslage werden zusätzlich horizontale Federelemente mit der Federkonstanten  $c_x$  angesetzt.

Die Differentialgleichungen zur Biegelinie werden durch Gleichgewichtsbetrachtungen am differentiellen Element mit den freigeschnittenen Kräften und Momenten unter Zuhilfenahme kinematischer Beziehungen, Kompatibilitätsbedingungen und einer entsprechenden Verknüpfung über konstitutive Gleichungen hergeleitet. Die konstitutiven Gleichungen beschreiben hierbei ein isotropes und homogenes linear elastisches Materialverhalten des Balkens. Die Lösung der Differentialgleichungen erfolgt vorwiegend durch Lösungsverfahren mit Ansatzfunktionen aus Reihenansätzen als Randwertproblem. Aufgrund der aufwendigen Herleitung der Differentialgleichungen und der umfangreichen Lösungsansätze in den verschiedenen Veröffentlichungen wird an dieser Stelle auf eine ausführlichere Darstellung dieser verzichtet. Vielmehr werden nachfolgend die wesentlichen Punkte in ausgewählten Veröffentlichungen wiedergegeben.

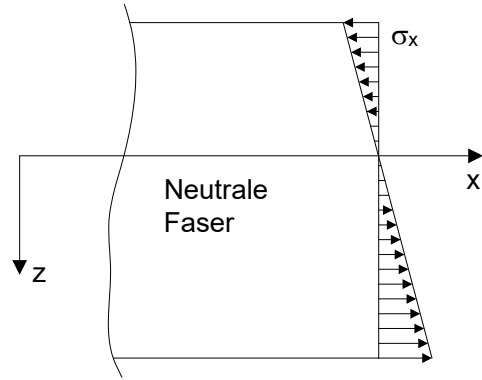
Ausgehend von dem in Abbildung 2.16 dargestellten Modell wurde von Zhang et al. (2009) bis Zhang et al. (2012b) dieses schrittweise erweitert. Eine anfängliche angenommene lineare Scherspannungsverteilung an der Ober- und Unterseite der Bewehrungslage wurde durch eine verschiebungsabhängige Formulierung über Federelemente ersetzt. Zusätzlich wurde eine geometrische Nichtlinearität sowie ein linear elastisches ideal plastisches Verhalten mit unterbundenen Zugspannung für die vertikalen Federelemente berücksichtigt. Durch eine bereichsweise Formulierung unter Verwendung von Übergangsbedingungen können neben variierenden Einwirkungen auch Bereiche variierender Federsteifigkeiten abgebildet werden, wodurch sich beispielsweise vertikale Tragglieder simulieren lassen.

Zur Abbildung einer geozellenbewehrten Schicht als äquivalenter Balken geht Qu (2009) infolge der üblicherweise nicht vorhandenen Zugfestigkeit eines nichtbindigen Bodens von einem unterschiedlichen Materialverhalten des Verbundmaterials Geozelle-Boden bei Druck- und Zugbeanspruchung aus. Dieses ist schematisch in Abbildung 2.17 dargestellt, wobei dort Zugspannungen positiv und Druckspannungen negativ definiert sind. Folglich nimmt Qu (2009) ein bereichsweise abweichendes linear elastisches Verhalten mit unterschiedlichen Elastizitätsmodulen  $E_t$  für den Zugbereich und  $E_c$  für den Druckbereich an.

Die Begründung für den Ansatz unterschiedlicher Elastizitätsmodule im Druck- und Zugbereich bei der Betrachtung als äquivalenter Balken kann Abbildung 2.18 entnommen werden. Durch eine Balkenbiegung treten infolge des linearen Verlauf der Normalspannungen Bereiche mit Druck- und Zugspannungen auf. In der neutralen Faser nimmt die Normalspannungen einen Wert von Null und an der Ober- und Unterseite des Balkens Extremwerte an. Aufgrund der nicht vorhandenen Zugfestigkeit wird durch das Füllmaterial im unteren Zugbereich keine Normalspannung im Querschnitt aufgenommen und die Zugspannungen werden dort nur über die Zellwände abgetragen.



**Abb. 2.17:** Schematische Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung für Druck und Zug aus Yao & Ye (2004)



**Abb. 2.18:** Exemplarische Verteilung der Normalspannungen im Querschnitt bei reiner Biegung nach Gross et al. (2011a)

Zur Berücksichtigung des abweichenden Materialverhaltens des Verbundmaterials fasst Qu (2009) unter Verweis auf Yao & Ye (2004) die äquivalenten Elastizitätsmodule für den Zug- und Druckbereich in einem äquivalenten Elastizitätsmodul für den Balken  $E_B^*$  zusammen.

$$E_B^* = \frac{4E_t E_c}{(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2} \quad (2.6)$$

Die Gleichung in vorstehender Form ist in Yao & Ye (2004) nicht dargestellt. Ebenso kann Qu (2009) keine direkte Ableitung dieser entnommen werden. Aufgrund der Relevanz für die in Kapitel 7.1.2 angestellten Betrachtungen zu Tragwerksmodellen wird deshalb nachfolgend auf die Herleitung eingegangen. Ausgehend von einer linearen Dehnungsverteilung  $\varepsilon_x$  über die Balkenhöhe und unter Annahme der schubstarren Balkentheorie lassen sich die Normalspannungsverteilungen in Abhängigkeit des Krümmungsradius  $\rho$ , der Koordinate  $z$  sowie den beiden Elastizitätsmodulen  $E_t$  und  $E_c$  ausdrücken. Die Normalspannungsverteilungen folgen hierbei aus der Dehnungsverteilung unter Verwendung des eindimensionalen Hooke'schen Gesetzes getrennt für den Zug- oder Druckbereich. Abweichend zu Abbildung 2.18 ergeben sich somit nur bereichsweise lineare Normalspannungsverläufe mit einem Knick in der neutralen Faser. Durch die integrale Ermittlung der Schnittgrößen  $N$  und  $M$  des Balkens folgen unter Berücksichtigung der beiden Äquivalenzbedingungen mit  $N = 0$  und  $M = M_0$  bei reiner Biegung zwei Gleichungen. Hieraus lassen sich die Normalspannungsverteilungen für den Druck- und Zugbereich in Abhängigkeit der Koordinate  $z$  nach Gleichung (2.7) berechnen.

$$\sigma_{x,c} = \frac{3M_0(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}{E_t W_c H_c^3} z \text{ und } \sigma_{x,t} = \frac{3M_0(\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c})^2}{E_c W_c H_c^3} z \quad (2.7)$$

Wird zusätzlich der Drehwinkel  $\psi_z$  zur Beschreibung der Verdrehung des Balkenquerschnitts infolge der Durchbiegung  $w$  eingeführt, lässt sich die Normalspannungsverteilung und das Moment durch die erste Ableitung des Drehwinkels  $\psi'_z$  ausdrücken.

$$\sigma_{x,c} = E_c \psi'_z z \text{ bzw. } \sigma_{x,t} = E_t \psi'_z z \text{ und } M_0 = E_B^* I \psi'_z \quad (2.8)$$

mit: Flächenträgheitsmoment für rechteckigen Querschnitt  $I = W_c H_c^3 / 12$

Für die schubstarre Balkentheorie gilt die Normalenhypothese, nach welcher der Balkenquerschnitt auch nach einer Durchbiegung senkrecht auf der Balkenachse steht. Demnach entspricht die erste Ableitung der Durchbiegung dem negativen Drehwinkel.

$$w' = -\psi_z \quad (2.9)$$

Unter Voraussetzung eines rechtwinkligen Balkenquerschnitts ergibt sich dann durch Einsetzen von Gleichung (2.8) in Gleichung (2.7) und entsprechendes Kürzen sowohl für den Druckbereich als auch den Zugbereich Gleichung (2.6).

Mit dem nach Gleichung (2.6) abgeleiteten äquivalenten Elastizitätsmoduls  $E_B^*$  bestimmt Qu (2009) die Biegelinie für den schubstarren Balken mit linear elastischer Federbettung und einer symmetrisch angeordneten, begrenzten Gleichlast. Zur Lösung der Differentialgleichung werden Ansatzfunktionen mit Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen verwendet. Die Koeffizienten in den Ansatzfunktionen werden zur Berücksichtigung einer begrenzten Gleichlast bereichsweise mit Übergangs- und Randbedingungen bestimmt.

Ergänzende Gleichungen zur Ermittlung der Lage der neutralen Faser sowie der Höhe des Druckbereiches  $h_c$  und Zugbereichs  $h_t$  im Balkenquerschnitt wurden von Qu (2009) ebenfalls aus Yao & Ye (2004) entnommen. Diese sind in Gleichung (2.10) dargestellt. Die Gleichungen lassen sich aus den gleichen Äquivalenzbedingungen der Schnittgrößen wie zur Bestimmung der Normalspannungsverteilungen von Gleichung (2.7) ableiten.

$$h_t = \frac{H_c \sqrt{E_c}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}} \text{ und } h_c = h_t - H_c = -\frac{H_c \sqrt{E_t}}{\sqrt{E_t} + \sqrt{E_c}} \quad (2.10)$$

Aufgrund der Übereinstimmung des Koordinatenursprungs mit der neutralen Faser sowie der Lage der neutralen Faser innerhalb des Balkenquerschnitts ergibt sich für  $h_c$  ein negativer und  $h_t$  ein positiver Wert (vgl. Abb. 2.18). Durch Einsetzen der Höhen für die Koordinate  $z$  in Gleichung (2.7) lassen sich für ein gegebenes Moment  $M_0$  zusätzlich die Extremwerte der Druck- und Zugbeanspruchung an der Ober- und Unterseite des Balkens ermitteln.

Zusammenfassend zeigt Tabelle 2.6 eine Literaturübersicht ausgewählter Veröffentlichungen zur Betrachtung der Geozellenbewehrung über das mechanische Modell eines äquivalenten Balkens. Neben den verwendeten rheologischen Modellen zur Abbildung der Interaktion mit dem umliegenden Boden in axialer Richtung und quer zur Balkenachse werden zusätzlich die wesentlichen Modelleigenschaften im Hinblick auf die abbildbaren Einwirkungen, die Charakteristik der Differentialgleichungen sowie etwaige Besonderheiten angegeben. In Ergänzung zu den schubstarren Balkenmodellen lassen sich der Tabelle weiterhin die Modelle von Yin (2000) und Ghosh et al. (2017) mit einer schubelastischen Balkentheorie entnehmen, welche zwar nicht direkt für eine Geozellenbewehrung hergeleitet wurden, jedoch bei bekanntem äquivalenten Schubmodul des Verbundmaterials Geozelle-Boden auf diese angewendet werden können.



**Tab. 2.6:** Literaturübersicht zur Betrachtung von der Geozellenbewehrung über das mechanische Modell eines Balkens in Verbindung mit rheologischen Modellen zur Abbildung der Interaktion

Autor	Axiale Interaktion	Vertikale Interaktion	Einwirkung	DGLs	Besonderheiten
Für eine Geozellenbewehrung abgeleitet, schubstarrer Balkentheorie					
Maheshwari et al. (2006)	-	2 x linear elastische Federn	Punktlast	1-mal, linear, gewöhnlich, 8. Ordnung	2 Balken (Flachgründung und Bewehrung) mit zwei elastischen Bettungen
Maheshwari & Viladkar (2009)	-	2 x linear elastische Federn	Bereichsweise Gleichlast	3-mal, linear, gewöhnlich, 4. und 8. Ordnung	Wie zuvor, aber Bewehrung über Fundament hinausreichend, bereichsweise mit $\ddot{U}B^{(a)}$
Qu (2009)	-	Linear elastische Federn	Bereichsweise Gleichlast	1-mal, linear, gewöhnlich, 4. Ordnung	Verschiedene E-Module für Druck und Zug, bereichsweise mit $\ddot{U}B^{(a)}$
Zhang et al. (2009)	Schubspannungsverteilung	Linear elastische Federn	Punktlast & Gleichlast	1-mal, linear, gewöhnlich, 4. Ordnung	-
Zhang et al. (2010a)	Linear elastische Federn	Linear elastische Federn	Mehrere Punktlasten & Gleichlast	2-mal, linear, gewöhnlich, 6. und 4. Ordnung	DGLs gekoppelt
Zhang et al. (2012a)	Linear elastische Federn	Linear elastisch ideal plastische Federn (Zugbeanspruchung unzulässig)	Mehrere Punktlasten & veränderliche Streckenlasten	2-mal, nichtlinear, gewöhnlich, 4. und 2. Ordnung	DGLs gekoppelt, geometrische Nichtlinearität; bereichsweise mit $\ddot{U}B^{(a)}$
Zhang et al. (2012b)	Linear elastische Federn	Linear elastische Federn, bereichsweise konstant	Mehrere Punktlasten & veränderliche Streckenlasten	2-mal, linear, gewöhnlich, 6. und 4. Ordnung	Erweiterung von Zhang et al (2010a) für vertikale Tragglieder, bereichsweise mit $\ddot{U}B^{(a)}$
Allgemein gültig, auch für Geozellen geeignet (beispielhaft), schubelastischer Balkentheorie					
Yin (2000)	-	Linear elastische Federn	beliebig	1-mal, linear, gewöhnlich, 4. Ordnung	Schubelastischer Balken mit Membran
Ghosh et al. (2017)	-	Bilinear elastische Federn, bereichsweise konstant	beliebig	3-mal, linear gewöhnlich, 4. Ordnung	Schubelastischer Balken mit Membran, bereichsweise mit $\ddot{U}B^{(a)}$

<sup>(a)</sup>  $\ddot{U}B$  = Übergangsbedingungen

In den aufgelisteten Veröffentlichungen wurden im Rahmen von theoretischen Verifikationen und Parameterstudien äquivalente Elastizitätsmodule  $E_B^*$  für den Balken in einem Wertebereich von 2 bis 200 MN/m<sup>2</sup> verwendet. Begründungen zur Größenordnung des Wertebereichs lassen sich den Literaturstellen jedoch nicht entnehmen. Lediglich Zhang et al. (2009) leiten aus der Nachrechnung eines Belastungsversuches von Guo (2001) mit einer geozellenbewehrten Kiesschicht oberhalb einer Tonschicht einen Wert des äquivalenten Elastizitätsmoduls von  $E_B^* = 50 \text{ MN/m}^2$  ab. Aus der näheren Betrachtung der Nachrechnung zeigt sich, dass hierbei eine einheitliche Schubspannung von 400 kN/m<sup>2</sup> entlang der Ober- und Unterseite des äquivalenten Balkens, auch im unbelasteten Bereich der geozellenbewehrten Schicht, angesetzt wurde. Unter Anbetracht der geringen Überdeckungshöhe von 5 cm in dem Versuch ist dieser Wert für die Schubspannung jedoch unrealistisch hoch, womit auch der angegebene Wert für den Elastizitätsmodul  $E_B^*$  fragwürdig ist. Daneben können der Literatur keine weiteren Angaben zur Größenordnung des Elastizitätsmoduls  $E_B^*$  einer geozellenbewehrten Schicht entnommen werden. Für eine Anwendung der verschiedenen Balkenmodelle auf das Verbundmaterial Geozelle-Boden ist jedoch die Kenntnis des Elastizitätsmoduls  $E_B^*$  unumgänglich. Ebenfalls setzt die Ermittlung von  $E_B^*$  nach Gleichung (2.6) bekannte Elastizitätsmodule  $E_c$  und  $E_t$  bei Druck und Zug voraus, jedoch finden sich auch hierzu in der Literatur keine Angaben. Durch die eindimensionale Betrachtung als Balken wird der Einfluss aus den Materialeigenschaften des Verbundmaterials in Richtung der Zellbreite  $W_c$  vernachlässigt. Ein Übertrag auf zweidimensionale Problemstellungen mit der Betrachtung des Verbundmaterials als Platte ist somit nicht möglich, sondern erfordert zusätzlich äquivalente Querdehnnzahlen.

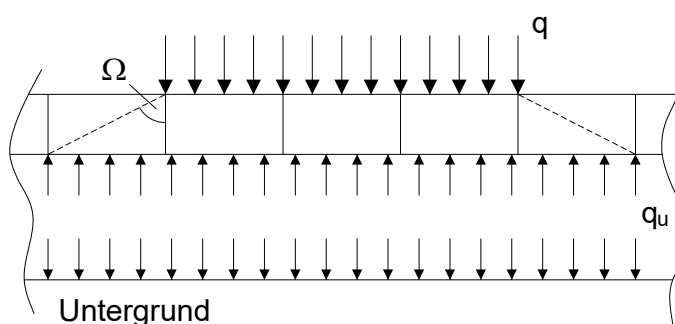
### 2.4.3 Nachweisverfahren zur Tragfähigkeit

Neben der homogenisierten Betrachtung des Verbundmaterials Geozelle-Boden über äquivalente Materialkennwerte oder das mechanische Modell eines äquivalenten Balkens können der Literatur mehrere analytische Nachweisverfahren zur Tragfähigkeit entnommen werden. Gemäß Kapitel 2.4.1 lassen sich diese einer diskreten Betrachtung der Zellen und des Füllmaterials oder einer ausschließlichen Abbildung der äußeren Bewehrungswirkung zuordnen. Im Hinblick auf die erforderlichen Nachweise definierten bereits Mitchell et al. (1979) unter anderem folgende potentielle Versagensmechanismen einer oberflächennah angeordneten Geozellenbewehrung.

- 1) Durchstanzen der Zellenwände in den Untergrund
- 2) Bersten der Geozelle infolge exzessiver horizontalen Beanspruchung aus einer innenliegenden Einwirkung begrenzt auf die Grundfläche einer Einzelzelle
- 3) Allgemeines Grundbruchversagen des Untergrundes aufgrund einer unzureichenden Vergleichmäßigung der Vertikalspannungen durch die geozellenbewehrte Schicht
- 4) Zugversagen der Zellenwände im unteren Bereich der Geozellen infolge Biegung unter Berücksichtigung der Plattenwirkung der geozellenbewehrten Schicht (Versagen auf Biegung)

Für die Nachweise zum allgemeinen Grundbruchversagens und zum Zugversagen auf Biegung wurde von Mitchell et al. (1979) die Notwendigkeit einer Berücksichtigung des Einflusses aus dem Untergrund hervorgehoben, da nur hierdurch die Beanspruchung des Verbundmaterials und des Untergrundes korrekt abgebildet werden kann. Hierfür wird zuerst eine Berechnung unter ganzheitlicher Betrachtung der Einwirkung, des homogenisierten Verbundmaterials und des Untergrundes vorgeschlagen. Aus diesen Berechnungen sind dann die Beanspruchung auf den Untergrund für den Grundbruchnachweis und die Zugbeanspruchung der geozellenbewehrten Schicht für den Nachweis gegen Zugversagen der Zellwände zu entnehmen. Folglich wird bei diesem Nachweisverfahren nur die äußere Bewehrungswirkung des Verbundmaterials abgebildet. Einschränkend wurde von Mitchell et al. (1979) darauf hingewiesen, dass zur korrekten Beschreibung des Verbundverhaltens die äquivalenten Materialkennwerte des Verbundmaterials Geozelle-Boden bekannt sein müssen. Hierzu bestimmten diese einen äquivalenten Elastizitätsmodul  $E^*$  anhand der Ergebnisse von Belastungsversuchen auf starrem Untergrund ähnlich zu den in Kapitel 2.3.1 beschriebenen Versuchen. Ein Vergleich mit dem aus der Rückrechnung der Versuche von Rea & Mitchell (1978) ermittelten äquivalenten Elastizitätsmodul auf einem nachgiebigen Untergrund aus Federelementen zeigt jedoch, dass der äquivalente Elastizitätsmodul hierdurch deutlich überschätzt wird und zur Ableitung repräsentativer äquivalenter Materialkennwerte für das Verbundmaterial die Nachgiebigkeit des Untergrundes zu berücksichtigen ist.

Eine Übersicht zu ausgewählten, in der Literatur beschriebenen diskreten Nachweisverfahren und solchen bei rein äußerlicher Betrachtung der Bewehrungswirkung gibt Tabelle 2.7 wider. Die diskreten Nachweise folgen hierbei aus Gleichgewichtsbetrachtungen über innere Kräfte im Verbundmaterial Geozelle-Boden, sodass diese eher als „innere“ Strukturnachweise aufgefasst werden können. Dagegen ergeben sich die Nachweise bei rein äußerlicher Betrachtung der Bewehrungswirkung vornehmlich aus dem vereinfachten Ansatz einer vergrößerten Lastausbreitung mit einem pauschal erhöhten Lastausbreitungswinkel  $\Omega$  verglichen zum unbewehrten Fall. Wie exemplarisch in Abbildung 2.19 dargestellt führt dieser Ansatz zu einer reduzierten Beanspruchung  $q_u$  des Untergrundes. Der Einfluss aus der Nachgiebigkeit des Untergrundes auf die Größe der Lastausbreitung wird hierbei vernachlässigt. Eine weitergehende Übersicht zu vorhandenen analytischen Berechnungsverfahren kann Anhang A.2 entnommen werden.



**Abb. 2.19:** Erhöhte Lastausbreitung durch eine Geozellenbewehrung nach Avesani Neto et al. (2013)

**Tab. 2.7:** Übersicht zu ausgewählter Literatur für Nachweisverfahren zur Tragfähigkeit

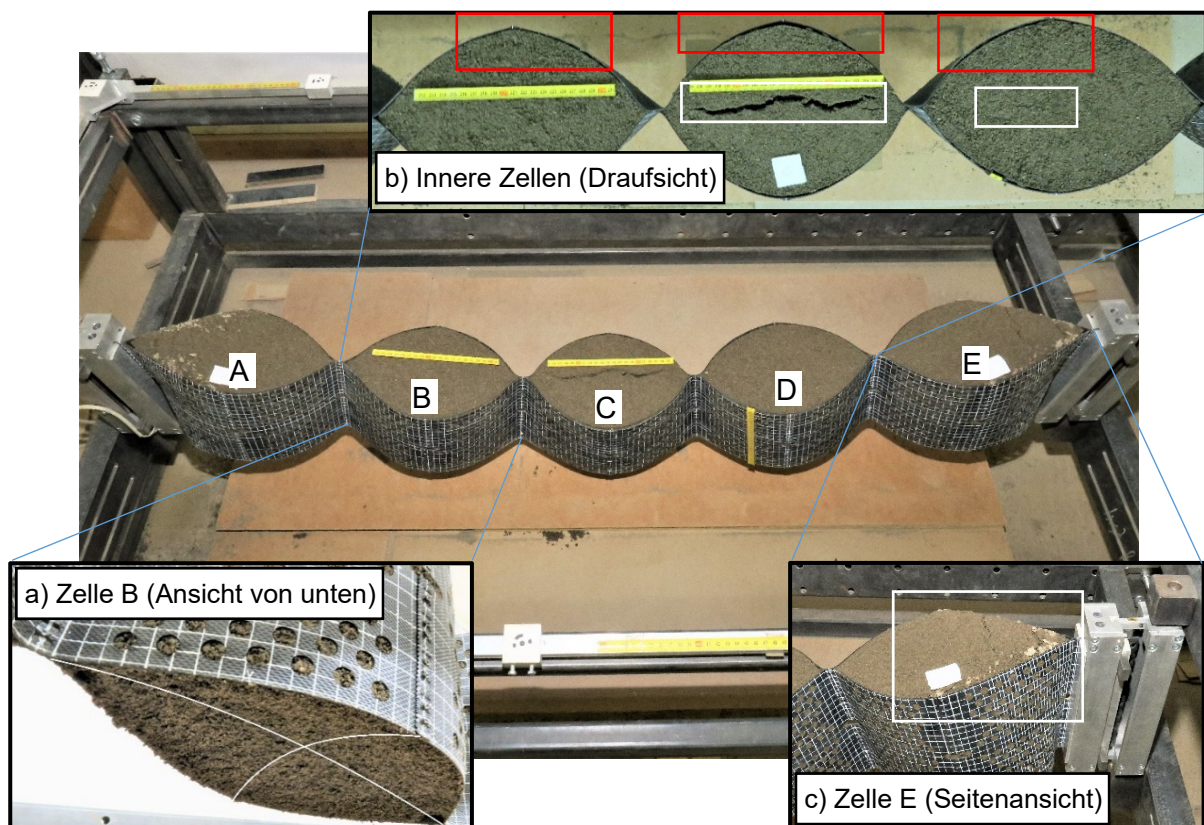
Autor	Nachweis	Beschreibung
Nachweisverfahren mit <u>diskreter</u> Betrachtung der Interaktion zwischen Geozelle und Füllmaterial als „innere“ Strukturnachweise zum Verbundmaterial		
Mitchell et al. (1979)	Durchstanzen der Zellwände für <u>Einzelzelle</u>	Bei direkter Lasteinleitung auf die geozellenbewehrte Schicht; größere Steifigkeit von Zellwandmaterial bewirkt höherer Belastung von Zellwand verglichen zu Füllmaterial; Relativverschiebung von Zellwänden gegenüber Füllmaterial in Untergrund; Fußwiderstand und Wandreibung aus aktivem Erddruck als Widerstände; Nachweis über vertikales Kräftegleichgewicht an Zellwand; Vermeidung des Versagens infolge Durchstanzen durch Anordnung einer Überdeckung mit einer Bodenschicht
Mitchell et al. (1979)	Bersten der Zellwände von kreisförmiger <u>Einzelzelle</u>	Bersten infolge Überschreitung von Zugfestigkeit oder Festigkeit der Verbindungsstelle; Beanspruchung aus horizontalem aktiven Erddruck infolge Einwirkung; Widerstand aus Ringzugfestigkeit und horizontalem passiven Erddruck sowie Scherkräften infolge Reibung von ober- und unterhalb angeordneter Schicht; Nachweis über horizontales Kräftegleichgewicht
Presto (2003)	Dimensionierung von Tragschichtmächtigkeit basierend auf Grundbruchnachweis mit kreisförmiger <u>Einzelzelle</u>	Kreisförmige gleichmäßige Einwirkung an GOK; horizontale Spannungsberechnung an Ober- und Unterseite von Zellwänden mit Theorie von Boussinesq; resultierende Horizontalspannung auf Zellwände durch Mittelwertbildung; Berechnung von Scherwiderstand aus dieser Horizontalspannung durch Bezug auf Mantelfläche von Einzelzelle; Nachweis über vertikales Kräftegleichgewicht mit Widerstand aus undrainierter Scherfestigkeit des Untergrundes
Nachweisverfahren mit rein <u>äußerlicher</u> Betrachtung der Bewehrungswirkung		
Zhang et al. (2010b)	Allgemeines Grundbruchversagen an Zellsystem mit äußerlicher Betrachtung der Wirkungsweise des Verbundmaterials durch erhöhte Lastausbreitung und Widerstand aus Membranwirkung der Geozellenbewehrung	Vergrößerte Lastausbreitung in Abhängigkeit des erhöhten Lastausbreitungswinkel; zusätzlicher Widerstand aus Membranwirkung der geozellenbewehrten Schicht infolge großer Setzungen über Gleichgewichtsbetrachtung an deformierten differenziellen Element; zusätzlicher Widerstand abhängig von Dehnsteifigkeit des Verbundmaterials und axialer Dehnung der Schicht (äquivalente Dehnsteifigkeit notwendig, Werte hierzu werden in Literaturstelle jedoch nicht angegeben); Gesamtwiderstand aus Lastausbreitung und Membranwirkung durch Superposition
Mehdipour, et al. (2017)	Gesamtstandsicherheit von Stützkonstruktionen als bewehrte Erde-Konstruktion mit Geozellenbewehrung	Erweiterung von horizontalen Lamellenverfahren nach Nouri et al. (2006); Abbildung der Bewehrungslagen als äquivalente Balken in Böschung aus homogenen nichtbindigen Boden; ausschließliche Wirkung von Eigengewicht; Gleitlinie verläuft durch Böschungsfuß; Ansatz von Normal- und Querkraft sowie Moment aus freigeschnittener Geozellenbewehrung in Gleitfläche; Berücksichtigung von Sicherheitsfaktor (FOS) im Geländebruchnachweis über vertikales Kräftegleichgewicht; abschließende Lösung über Momentengrenzgleichgewicht um Mittelpunkt der kreisförmigen Gleitfläche

## 2.5 Forschungsbedarf

### 2.5.1 Vorversuch zum Biegeverhalten eines Sand befüllten Geozellenstreifens

Zur genaueren Untersuchung der in der Literatur beschriebenen Plattenwirkung des Verbundmaterials Geozelle-Boden wurde im Rahmen von Vorversuchen das Verformungsverhalten eines mit Sand befüllten Geozellenstreifens unter Biegebeanspruchung untersucht. In den Versuchen wird der Streifen nur durch das Eigengewicht belastet und frei hängend ohne Bettung betrachtet. Hierzu wurde der Zellstreifen links- und rechtsseitig an den äußeren Rändern jeweils über die vollständige Zellhöhe durch spezielle Halterungen, welche an einem Stahlrahmen angebracht sind, eingespannt. Zur Versuchsvorbereitung wurde der Streifen aufgelagert und der Sand mit einem vorgegebenen Wassergehalt definiert eingebaut. Um einen exzessiven Bodenausfalls an der Unterseite der Zellen während des Anheben zu vermeiden, wurden Holzfaserplatten über Kunststoffstreifen an der Unterseite jeder Zelle befestigt. Nach Anhebung und einer gewissen Ruhephase wurden diese entfernt.

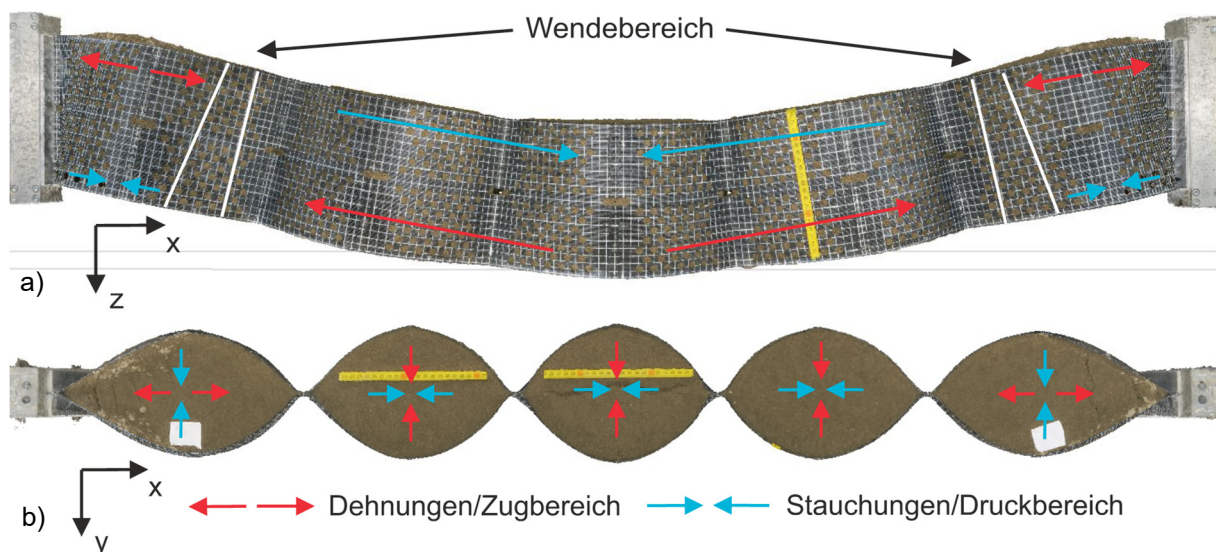
Für den hier exemplarisch betrachteten Versuch umfasst der Streifen fünf Geozellen mit einer Ausrichtung in Längsrichtung. Bei den verwendeten Geozellen handelt es sich um handelsübliche strukturierte und perforierte Geozellen aus HD-PE mit einer Einbaulänge  $L_c = 29,7$  cm, einer Einbaubreite  $W_c = 18,1$  cm und einer Zellhöhe von  $H_c = 20$  cm. Die Materialkennwerte des verwendeten Sandes und der Geozellen können Anhang A.3 entnommen werden. Abbildung 2.20 zeigt den frei hängenden Geozellenstreifen nach Entfernung der Holzfaserplatten.



**Abb. 2.20:** Durchbiegung des Zellenstreifens unter Eigengewicht mit relevanten Ausschnitten

Verglichen zu dem Einbaugewicht des Füllmaterials bewirkt die Plattenentfernung nur einen geringen Bodenausfall, welcher auf den Bereich an der Unterseite der Zellen begrenzt ist und zur Entstehung von Bodengewölben führt (vgl. Abb. 2.20a). Entsprechend der Draufsicht von Abbildung 2.20b treten an der Oberseite der inneren Zellen C und D im Füllmaterial Zugrisse in  $L_c$ -Richtung auf (weiß umrandete Bereiche). Diese fallen für die mittlere Zelle C wesentlich deutlicher als für Zelle D aus. Weiterhin wird aus der Draufsicht zusätzlich eine bereichsweise Ablösung der Zellwände von dem Füllmaterial in  $W_c$ -Richtung ersichtlich (rot umrandete Bereiche). An der Oberseite der beiden äußeren Zellen A und E bilden sich im Bereich der Einspannungen hingegen, wie in Abbildung 2.20c dargestellt, Bodenschollen mit Zugrisse in  $W_c$ -Richtung aus.

Zur Aufnahme der Verformungen des Zellstreifens wurde ein photogrammetrisches Messverfahren verwendet. Für eine genauere Betrachtung des Verformungsbildes ist in Abbildung 2.21 das hieraus berechnete Modell des deformierten Streifens in einer Seitenansicht und Draufsicht dargestellt. Zusätzlich sind dort die unterschiedlichen Bereiche der Zellstreifenverformungen schematisch über farblich markierte Pfeile in Längen- und Breitenrichtung der Zellen kenntlich gemacht.



**Abb. 2.21:** Verformungsbild des befüllten Geozellenstreifens aus der photogrammetrischen Modellierung in der a) Seitenansicht und b) Draufsicht

Ein Bezug der zu Abbildung 2.20 beschriebenen Beobachtungen auf das in Abbildung 2.21 dargestellte Verformungsbild zeigt, dass die Zugrisse sowie die Wandablösung der inneren Zellen B, C und D aus einer Stauchung der Zelle in x-Richtung und einer Dehnung in y-Richtung an der Oberseite resultieren. Dementgegen folgt die Ausbildung der Bodenschollen der beiden äußeren Zellen A und D aus einer Dehnung in x-Richtung und einer Stauchung in y-Richtung. An der Unterseite des Streifens ergibt sich ein entgegengesetztes Verformungsbild. Hier werden die inneren Zellen in x-Richtung gedehnt und in y-Richtung gestaucht, wohingegen die beiden äußeren Zellen im Bereich der Einspannung an der Unterseite in x-Richtung gestaucht und in y-Richtung gedehnt werden.



Unter Berücksichtigung des in Abbildung 2.21 angegebenen Koordinatensystems lässt sich aus der Seitenansicht zusätzlich eine negative Krümmung des Streifens im Bereich der inneren Zellen B, C und D sowie eine positive Krümmung des Streifens im Bereich der äußeren Zellen A und E erkennen. Übertragen auf die wirkenden Normalspannungen im Streifenquerschnitt können hieraus folgende Schlussfolgerungen gezogen werden. Im Bereich der Einspannungen wirken in x-Richtung an der Oberseite Zugspannungen und an der Unterseite Druckspannungen. Umgekehrt treten in den inneren Zellen B, C und D an der Oberseite Druckspannungen und an der Unterseite Zugspannungen auf. Eine Zusammenfassung dieser Normalspannungen in den Querschnitten der verschiedenen Krümmungsbereiche führt folglich zu der Wirkung positiver Momente  $M_y$  im mittleren Bereich des Zellstreifens und negativer Momente im Bereich der Einspannung (vgl. Abb. 2.18). Der Wendebereich für den Wechsel der Zug- und Druckspannungen an der Ober- und Unterseite und damit des Drehsinns der wirkenden Biegemomente tritt im Übergangsbereich der Zellen A und E hin zu Zellen B und D auf.

Ein Vergleich der in dem Versuch festgestellten Zusammenhänge für den befüllten Zellstreifen mit den theoretischen Zusammenhängen eines beidseitig eingespannten Balkens unter Biegebeanspruchung verdeutlicht, dass der Zellenstreifen ein zum Balkenmodell vergleichbares Verhalten aufweist. Infolge der nicht zu vernachlässigenden Höhe der Geozellen treten in den Streifenquerschnitt Normalspannungsverteilungen mit Zug- und Druckbereichen in x-Richtung ähnlich der in Abbildung 2.18 dargestellten Verteilung auf. Folglich lässt sich die Biegebeanspruchung des Streifens ebenfalls über Momente abbilden und der befüllte Geozellenstreifen besitzt durch die gegebene Bewehrungshöhe eine Biegesteifigkeit, worin auch die in der Literatur beobachtete Plattenwirkung des Verbundmaterials Geozelle-Boden begründet liegt.

### 2.5.2 Schlussfolgerung

Die Bewehrungswirkung des Verbundmaterials Geozelle-Boden wird auf die Entstehung von Ringzugkräfte aus der Geozellenummantelung sowie eine Platten- und/oder Membranwirkung der geozellenbewehrten Schicht zurückgeführt. Da die Mobilisierung von Ringzugspannungen auf der radialen Expansion einer Einzelzelle beruht, ist diese vornehmlich an die Randbedingung mit innenliegender Belastung auf einem weitestgehend unnachgiebigen Untergrund gebunden. Berechnungsverfahren zur Homogenisierung und zur diskreten Betrachtung wurden bereits entwickelt und sind auszugsweise in den Kapiteln 2.4.2.1 und 2.4.3 dargestellt.

Bei Lastflächen über die Abmessungen einer Einzelzelle hinaus und bei einem nachgiebigen Untergrund besitzt die Mobilisierung von Ringzugkräften dementsgegen einen untergeordneten Einfluss. In diesem Fall lässt sich die Bewehrungswirkung der geozellenbewehrten Schicht durch eine Plattenwirkung oder eine hierzu gleichbedeutende vergrößerte Lastausbreitung beschreiben. Entsprechende Abbildungen als äquivalenter Balken oder Berechnungsverfahren unter Ansatz eines erhöhten Lastausbreitungswinkels werden in den Kapiteln 2.4.2.2 und 2.4.3 vorgestellt. Die Plattenwirkung resultiert hierbei aus der nicht zu vernachlässigenden

Zellhöhe  $H_c$  der Bewehrungslage und der damit einhergehenden Biegesteifigkeit  $EI$  durch das Flächenmoment zweiten Grades. Eine von der geozellenbewehrten Schicht ausgehende Biegesteifigkeit konnte ebenfalls in Kapitel 2.5.1 anhand des Verformungsbildes eines frei durchhängenden befüllten Zellstreifens festgestellt werden.

Der in der Literatur beschriebene Ansatz einer erhöhten Lastausbreitung über einen pauschalisierten Lastausbreitungswinkel vernachlässigt den Einfluss aus der Nachgiebigkeit des Untergrundes. Die von Mitchell et al. (1979) beschriebenen Ergebnisse zur Bestimmung eines repräsentativen äquivalenten Elastizitätsmoduls aus Belastungsversuchen auf einem starren und nachgiebigen Untergrund verdeutlichen jedoch die Notwendigkeit einer Berücksichtigung. Eine Abbildung des Verbundmaterials als äquivalenter Balken setzt ebenso wie der Ansatz einer Membranwirkung die Kenntnis äquivalenter Materialkennwerte für die geozellenbewehrte Schicht voraus. Das in Kapitel 2.4.2.1 vorgestellte Homogenisierungsverfahren über den Ansatz eines zusätzlichen Seitendrucks  $\Delta\sigma_3$  ist hierfür jedoch in mehrfacher Hinsicht ungeeignet. Infolge der triaxialen Betrachtung wird von einem rotationssymmetrischen Zustand mit einer zylindrischen Einzelzelle, einem starren Untergrund und einer innenliegenden Belastung ausgegangen. Eine Anwendung dieser äquivalenten Materialkennwerte auf ebene Problemstellungen mit einem nachgiebigen Untergrund oder abweichenden Belastungssituationen ist folglich nicht gegeben, da dort eine radiale Expansion der Geozelle nicht oder nur bedingt auftreten kann. Ebenfalls müsste in diesem Fall die Orientierung der Hauptspannung in jeder Zelle der bewehrten Schicht dem triaxialen Spannungszustand entsprechen.

Selbst unter Annahme einer Anwendbarkeit der nach Kapitel 2.4.2.1 ermittelten äquivalenten Materialkennwerte  $E^*$  und  $c^*$  würde hierdurch eine weitere wesentliche Eigenschaft des Verbundmaterials vernachlässigt werden. Aus den experimentellen und numerischen Untersuchungen geht infolge der unterschiedlichen Abmessungen in Längs- und Querrichtung ein anisotropes Materialverhalten des Verbundmaterials Geozelle-Boden hervor. Dementgegen setzt die Verwendung des äquivalenten Elastizitätsmoduls  $E^*$  ein isotropes Materialverhalten voraus, womit die gegebene Richtungsabhängigkeit des Verbundmaterials unberücksichtigt bleibt. Ebenfalls lassen sich der Literatur keine Ansätze zur Ermittlung einer äquivalenten Querdehnzahl des Verbundmaterials entnehmen. Folglich wäre die Anwendung nur auf eindimensionale Balkenmodelle beschränkt und eine Betrachtung räumlicher Problemstellungen ist nicht möglich.

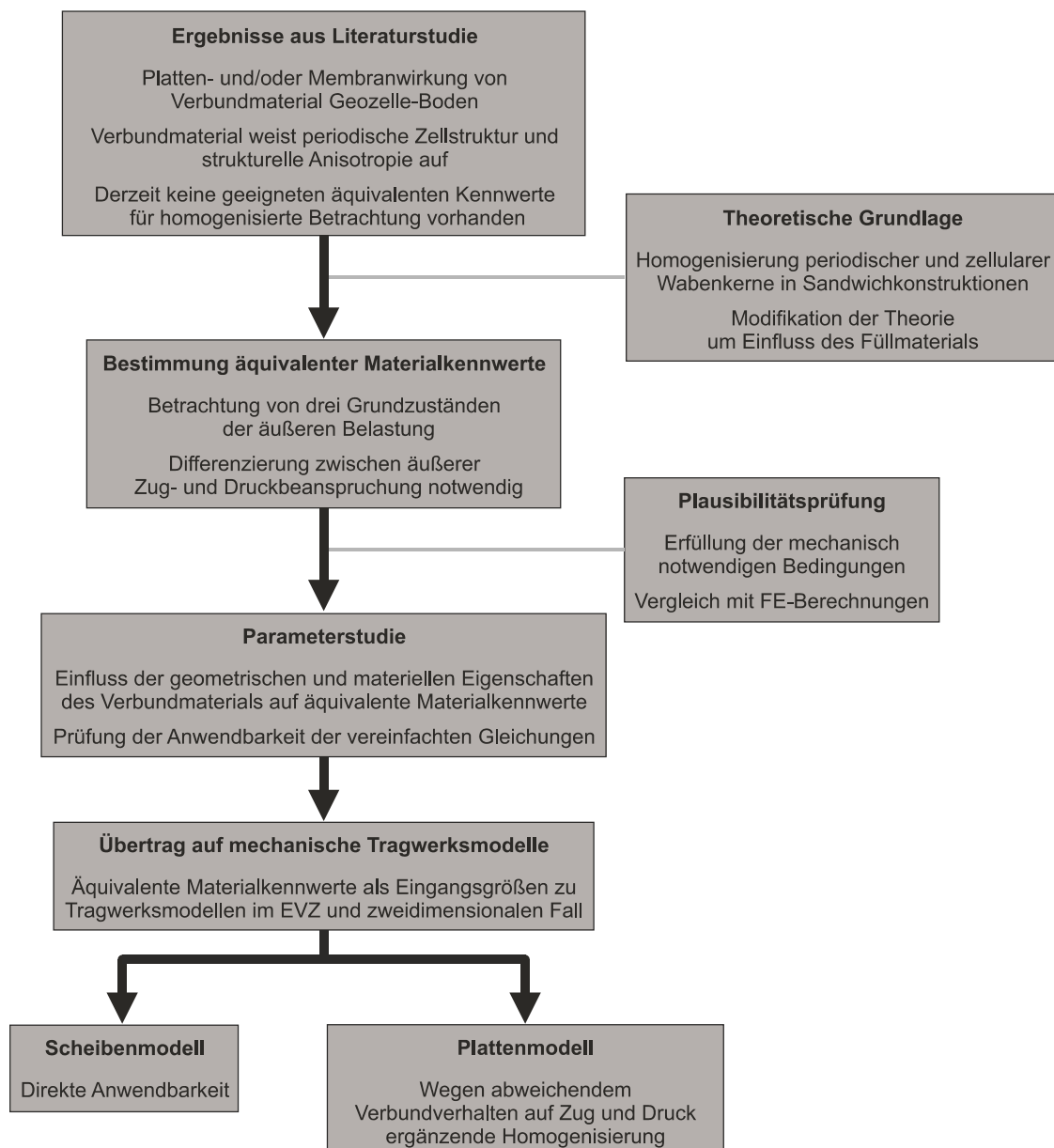
Vorstehende Ausführungen verdeutlichen, dass für eine ganzheitliche Betrachtung des homogenisierte Verbundmaterials bei allgemeinen Randbedingungen derzeit keine theoretische Grundlage zur Berechnung äquivalenter Materialkennwerte vorliegt. Hierbei müssen die Interaktion der beiden Teilkomponenten Geozelle und Füllmaterial untereinander, die strukturelle Anisotropie und die periodische Zellstruktur des Verbundmaterials berücksichtigt werden. Erst nach Kenntnis der äquivalenten Materialkennwerte ist eine Abbildung der Plattenwirkung



des Verbundmaterials Geozelle-Boden über das mechanische Modell einer Platte möglich. Die notwendigen Schritte zur Bestimmung der äquivalenten Materialkennwerte lassen sich abschließend folgendermaßen zusammenfassen.

- Auswahl eines geeigneten Homogenisierungsverfahrens
- Herleitung von Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten
- Plausibilitätsprüfung der abgeleiteten Materialkennwerte
- Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Eingangsgrößen
- Übertragung auf mechanische Plattenmodelle und/oder Scheibenmodelle

Eine grafische Veranschaulichung zum Vorgehen in vorliegender Arbeit mit den relevanten Zwischenschritten und einer kurzen Erläuterung dieser kann dem Ablaufdiagramm von Abbildung 2.22 entnommen werden.



**Abb. 2.22:** Übersicht zur Vorgehensweise in vorliegender Arbeit



## 3 Wabenkerne in Sandwichwerkstoffen

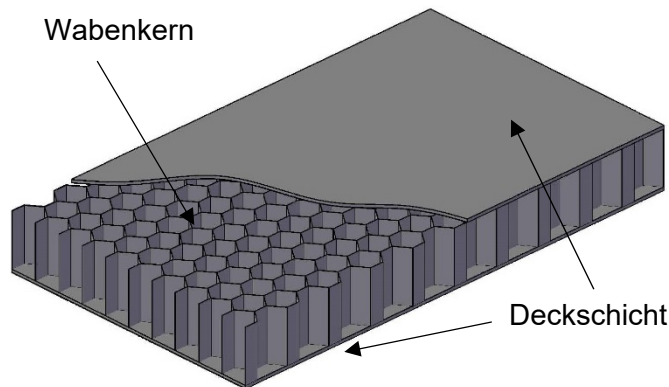
### 3.1 Aufbau von Sandwichwerkstoffen mit Wabenkern

Aufgrund der in Kapitel 2.5.2 beschriebenen Notwendigkeit äquivalenter Materialkennwerte für eine ganzheitliche Abbildung des Verbundmaterials Geozelle-Boden wird nachfolgend ein geeignetes Homogenisierungsverfahren vorgestellt. Hierzu erfolgt vorab eine allgemeine Beschreibung von diskreten Wabenkernen in Sandwichkonstruktionen und eine Definition deren Materialverhaltens. Im Anschluss werden die Grundlagen des Homogenisierungsverfahrens und die aus der Literatur hervorgehende Vorgehensweise zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte für unbefüllte und befüllte Waben näher erläutert.

Wie in Kapitel 2.2.1 beschrieben nimmt ein Geozellensystem nach dem Aufspannen und der Befüllung vor Ort eine periodische Zellstruktur an, in welcher sich das gesamte System über eine sich wiederholende Einzelzelle abbilden lässt. Hierzu vergleichbare periodische Strukturen finden sich im Bereich der Konstruktionswerkstoffe und dort bei Sandwichwerkstoffen als Untergruppe der Verbundwerkstoffe für den konstruktiven Ingenieurbau wieder. Im Allgemeinen ist der Aufbau von Sandwichwerkstoffen durch einen dicken und weichen Kern zwischen zwei verhältnismäßig dünnen und steifen Deckschichten gekennzeichnet. Infolge der geringen Dicke treten bei Belastung reine Scheibenspannungszustände, d. h. ebene Spannungszustände, in den Deckschichten auf, weshalb diese üblicherweise aus Werkstoffen mit hoher Zug- und Drucksteifigkeit hergestellt werden. Dahingegen bildet der Kern den Verbund der beiden Deckschichten ab und wird deshalb vorwiegend auf Schub beansprucht. Demzufolge wird die Schubsteifigkeit und -festigkeit des Sandwichwerkstoffes maßgebend durch den Kern bestimmt. Weiterhin kommt dem Kern als Stützkern die Aufgaben eines Abstandshalters der Deckschichten zu und sorgt zusätzlich für einen entsprechenden Widerstand gegen ein Versagen infolge Ausbeulen oder Ausknicken der Deckschichten. Die Verbindung zwischen dem Kern und den Deckschichten wird vornehmlich durch Verklebung hergestellt (Altenbach et al. 1996, Nast 1997).

Für gewöhnlich liegt der Kern von Sandwichwerkstoffe in zwei Ausführungsformen als kontinuierlicher oder diskreter Kern vor. Während kontinuierliche Kerne aus Kunststoffschäumen, wie zum Beispiel Polyurethan, hergestellt werden, gehören Wabenstrukturen, beispielsweise aus Papier oder Aluminium, den diskreten Kernen an. Neben einer quadratischen oder kreisrunden Grundfläche können die eingesetzten Waben auch eine hexagonale Form aufweisen. Hierbei muss die hexagonale Form der Waben weder einheitlich noch regulär sein, sondern kann mit beliebigen Abmessungen hergestellt werden. Hexagonale Wabenkerne besitzen gegenüber den meisten anderen Kernen mit Wabenformen eine höhere Druck- und Schubfestigkeit und spiegeln eine optimale Ausnutzung des Raumes wider. Die Waben können unter anderem

durch die Verfahren des Schweißens, Klebens oder durch eine mechanische Verbindung verbunden werden (Altenbach et al. 1996, Nast 1997). Abbildung 3.1 verdeutlicht beispielhaft den Aufbau eines Sandwichwerkstoffs mit hexagonalem Wabenkern.



**Abb. 3.1:** Sandwichwerkstoff mit Wabenkern

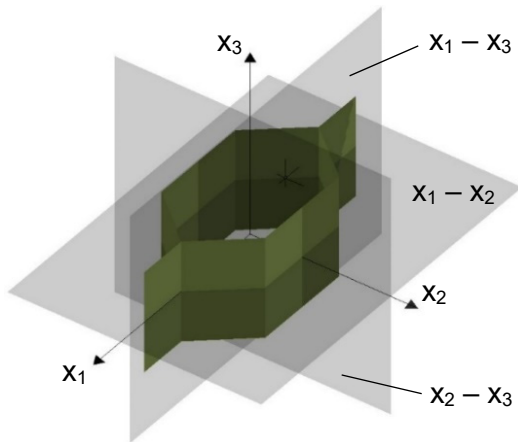
Sandwichwerkstoffe zeichnen sich üblicherweise durch eine hohe spezifische Festigkeit aus. Unter spezifischer Festigkeit wird hierbei das Verhältnis der Festigkeitskennwerte zur Masse des Werkstoffs verstanden. Dementsprechend werden die Hohlräume zwischen den Wabenkernen für gewöhnlich nicht ausgefüllt. Sandwichwerkstoffe kommen unter anderem für Leichtbauweisen im Flugzeugbau und in der Raumfahrt, jedoch vermehrt auch im Fahrzeugbau, im Maschinenbau, in der Medizintechnik etc. zum Einsatz (Altenbach et al. 1996).

### 3.2 Orthotropie des Wabenkerns

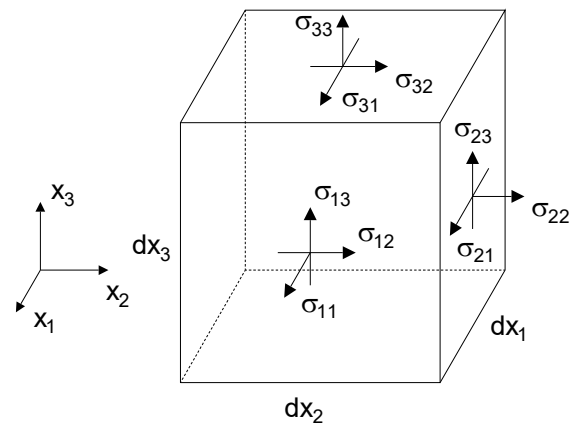
Für den Großteil der Konstruktionswerkstoffe des Bauwesens wie Beton oder Stahl stellt ein isotropes Materialverhalten eine akzeptable Näherung dar. Diese Annahme liegt auch der überwiegenden Anzahl an Stoffmodellen für Böden zu Grunde. Hingegen ist diese Annahme für Verbundwerkstoffe und damit auch für hexagonale Wabenkerne als Teilkomponente von Sandwichwerkstoffen üblicherweise nicht gerechtfertigt. Geometrisch bedingt weisen die Wabenkerne eine strukturelle Anisotropie auf, womit das Materialverhalten abhängig von der jeweiligen Belastungsrichtung ist.

Für das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz mit einem linear elastischen Materialverhalten lassen sich die Elastizitätskonstanten des Elastizitätstensors bei allgemeiner Anisotropie von 81 zu 21 unabhängigen Komponenten reduzieren. Hierzu werden kleine Verzerrungen und eine Symmetrie des Elastizitätstensors vorausgesetzt sowie die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Ableitungen bei der spezifischen Formänderungsenergie  $U(\epsilon_{ij})$  ausgenutzt. Üblicherweise liegen jedoch für Verbundwerkstoffe Materialsymmetrien vor, welche zu einem symmetrischen Materialverhalten bezogen auf gewisse Achsen und Ebenen führen. Durch eine entsprechende Orientierung des Koordinatensystems zu den Symmetrieebenen werden bestimmte Elastizitätskonstante eliminiert, womit sich der Elastizitätstensor weiter vereinfacht. Demzufolge gehen unter Ausnutzung der Materialsymmetrien aus der allgemeinen Anisotropie mehrere Sonderfälle hervor (Altenbach et al. 1996).

Hexagonale Wabenkerne weisen üblicherweise drei Ebenen der Materialsymmetrie auf. Die drei Ebenen stehen hierbei orthogonal zueinander. Werden die Koordinatenachsen des Koordinatensystems entsprechend der Symmetrieebenen angeordnet, so fallen die drei aus den Richtungsvektoren der Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen  $x_1$ - $x_2$ ,  $x_2$ - $x_3$  und  $x_1$ - $x_3$  mit denen der Materialsymmetrie zusammen. Dieser Zusammenhang ist am Beispiel einer einzelnen Wabe in Abbildung 3.2 für ein kartesisches  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$ -Koordinatensystem dargestellt. Hierbei stimmt die  $x_1$ -Richtung mit der  $L_c$ -Richtung (Wabenlänge), die  $x_2$ -Richtung mit der  $W_c$ -Richtung (Wabenbreite) und die  $x_3$ -Richtung mit der  $H_c$ -Richtung (Wabenhöhe) der Wabe überein. Die Koordinatenebenen bilden somit die Ebenen der Materialsymmetrie ab und die Wabenkerne weisen ein orthotropes Materialverhalten auf.



**Abb. 3.2:** Einheitswabe mit Orientierung des Koordinatensystems entsprechend der Materialsymmetrie



**Abb. 3.3:** Spannungszustand am differentiellen Würfel mit positiver Definition nach Gross et al. (2011a)

Zur nachfolgenden Beschreibung des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes und der zugehörigen Elastizitätsmatrix bei Orthotropie zeigt Abbildung 3.3 zusätzlich die positive Definition der Spannungen am positiven Schnitthufler für den Spannungszustand an einem differentiellen Würfel. Die Definition der Verzerrungen ergibt sich sinngemäß. Die Koordinaten des Spannungs- und Verzerrungstensors entsprechen  $\sigma_{ij}$  und  $\varepsilon_{ij}$  mit  $i, j = 1, 2, 3$ , wobei gleiche Indizes Normalspannungen bzw. Dehnungen und ungleiche Indizes Schubspannungen bzw. Gleitungen beschreiben. Sowohl die Koordinatenachsen in Abbildung 3.2 als auch die Spannungen in Abbildung 3.3 werden entsprechend der gängigen Definition für Verbundwerkstoffe bezeichnet. Werden weiterhin die einzelnen Koordinaten der Tensoren den Koordinaten einer Matrix und zweier Vektoren zugeordnet, lässt sich das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz bei Orthotropie gemäß Altenbach et al. (1996) in Vektor-Matrix-Form wie folgt angeben.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ & C_{22} & C_{23} & & & \\ & & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ Sym & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Die Matrix **C** stellt die Elastizitätsmatrix dar und verknüpft einen gegebenen Verzerrungszustand mit dem zugehörigen Spannungszustand. Durch die Materialsymmetrie verringert sich die Anzahl der unabhängigen Elastizitätskonstanten von 21 Komponenten bei allgemeiner Anisotropie auf neun Komponenten bei Orthotropie. Ergänzend wird aus der Struktur der Matrix deutlich, dass eine Entkopplung der Schubspannungen von den Dehnungen und der Normalspannungen von den Gleitungen vorliegt. Folglich führen Gleitungen nur zu Schubspannungen in der jeweiligen Ebene. Bei der Definition nach Gleichung (3.1) wird eine für Verbundwerkstoffe übliche, verkürzte Indexschreibweise verwendet. Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Spannungs-, Verzerrungs- und Elastizitätstensoren ist die hierfür notwendige Koordinatenzuordnung in Tabelle 3.1 angegeben (Altenbach et al. 1996).

**Tab. 3.1:** Zuordnung der tensoriellen Koordinaten zu denen der Matrix und Vektoren

Koordinate $\sigma_{ij}$	Zugeordnete Komponente $\sigma_p$	Koordinate $\epsilon_{ij}$	Zugeordnete Komponente $\epsilon_p$	Koordinate $C_{ijkl}$	Zugeordnete Komponente $C_{pq}$
$\sigma_{11}$	$\sigma_1$	$\epsilon_{11}$	$\epsilon_1$	ij: 11, 22, 33 23, 31, 12	p: 1, 2, 3 4, 5, 6
$\sigma_{22}$	$\sigma_2$	$\epsilon_{22}$	$\epsilon_2$		
$\sigma_{33}$	$\sigma_3$	$\epsilon_{33}$	$\epsilon_3$		
$\sigma_{23} = \tau_{23}$	$\sigma_4$	$2\epsilon_{23} = \gamma_{23}$	$\epsilon_4$	kl: 11, 22, 33 23, 31, 12	q: 1, 2, 3 4, 5, 6
$\sigma_{31} = \tau_{31}$	$\sigma_5$	$2\epsilon_{31} = \gamma_{31}$	$\epsilon_5$		
$\sigma_{12} = \tau_{12}$	$\sigma_6$	$2\epsilon_{12} = \gamma_{12}$	$\epsilon_6$		

Die gleichen Zusammenhänge zwischen den Spannungen und Verzerrungen können auch in umgekehrter Form über die Nachgiebigkeitsmatrix **S** als Inverse der Elastizitätsmatrix formuliert werden. Hiermit lässt sich aus einem gegebenen Spannungszustand der zugehörige Verzerrungszustand ableiten. Abweichend zum isotropen Fall besitzen die einzelnen Komponenten der Elastizitätsmatrix  $C_{ij}$  und Nachgiebigkeitsmatrix  $S_{ij}$  bei Orthotropie keine konstanten Werte bezogen auf die Orientierung des Koordinatensystems, sondern variieren mit dieser. Folglich ergeben sich durch Drehung des Koordinatensystems veränderliche Werte für die Komponenten  $C_{ij}$  und  $S_{ij}$  (Altenbach et al. 1996, Gross et al. 2011b). Aufgrund der im Anschluss ausschließlich homogenisierten Betrachtung des Wabenkerns wird für die einzelnen Komponenten zusätzlich von einer Ortsunabhängigkeit der einzelnen Matrixkomponenten ausgegangen (s. Kap. 3.3).

Für das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz lassen sich die Konstanten  $C_{ij}$  und  $S_{ij}$  der beiden Materialmatrizen durch die Materialkennwerte der Elastizitätsmodule  $E_i$ , der Querdehnzahlen  $\nu_{ij}$  und der Schubmodule  $G_{ij}$  mit  $i \neq j$  und  $i, j = 1, 2, 3$  ausdrücken. Wie zuvor wird die verkürzte Indexschreibweise verwendet. Die Indizes entsprechen den in Abbildung 3.2 definierten Richtungen der Koordinatenachsen. Aufgrund der anschaulicheren Darstellung und der Vorgehensweise zur Bestimmung äquivalenter Materialkennwerte für den in Kapitel 3.4 betrachteten Wabenkern bei einem gegebenen Spannungszustand ist der Zusammenhang gemäß Altenbach et al. (1996) anhand der Nachgiebigkeitsmatrix **S** in Gleichung (3.2) dargestellt.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & Sym & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Die in Gleichung (3.2) angegebenen Matrixkomponenten sind nicht unabhängig voneinander, sondern es gelten wegen der Symmetrie der Matrix zusätzlich folgende Abhängigkeiten zwischen den Elastizitätsmodulen und den Querdehnzahlen (Reziproktheorem).

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}, \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3}, \frac{\nu_{31}}{E_1} = \frac{\nu_{13}}{E_3} \quad (3.3)$$

Demnach sind nur sechs Materialkennwerte voneinander unabhängig, sodass unter Berücksichtigung der drei Schubmodule zur vollständigen Beschreibung des orthotropen Materialverhaltens neun unabhängige Materialkennwerte notwendig sind. Werden ergänzend die Eigenschaften der spezifischen Formänderungsenergie  $U$  herangezogen, ergeben sich aus den Definitionen der Matrizenalgebra ergänzend noch folgende zulässige Wertebereiche für die Materialkennwerte (Altenbach et al. 1996).

$$\begin{aligned} E_1 > 0, E_2 > 0, E_3 > 0, G_{23} > 0, G_{31} > 0, G_{12} > 0 \\ \nu_{21}^2 < \frac{E_2}{E_1}, \nu_{12}^2 < \frac{E_1}{E_2}, \nu_{32}^2 < \frac{E_3}{E_2}, \nu_{23}^2 < \frac{E_2}{E_3}, \nu_{31}^2 < \frac{E_3}{E_1}, \nu_{13}^2 < \frac{E_1}{E_3} \\ \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{13}\nu_{32} > 0 \\ (1 - \nu_{12}\nu_{21}) > 0, (1 - \nu_{13}\nu_{31}) > 0, (1 - \nu_{23}\nu_{32}) > 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

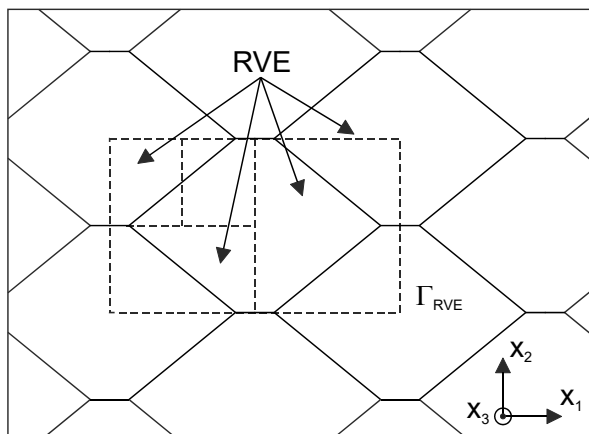
Für eine genauere Beschreibung der Herleitung und ergänzende Ausführungen zur allgemeinen Anisotropie sowie den aus den Materialsymmetrien hervorgehenden Sonderfällen wird an dieser Stelle auf entsprechend Fachliteratur beispielsweise von Altenbach et al. (1996) und Gross et al. (2011b) verwiesen.

Unter Berücksichtigung der in Abbildung 2.5 angenommen idealisierten hexagonalen Form von Geozellen sowie eines homogenen isotropen und linearen Materialverhaltens des Füllmaterials gelten vorstehende Beschreibungen auch für das Verbundmaterial Geozelle-Boden. Demzufolge liegen auch für ein befülltes Geozellensystem drei Ebenen der Materialsymmetrie vor. Bei entsprechender Ausrichtung des Koordinatensystems mit den Symmetrieebenen weist eine geozellenbewehrte Schicht folglich ein orthotropes Materialverhalten auf, zu dessen vollständiger Beschreibung neun unabhängige Materialkennwerte erforderlich sind.

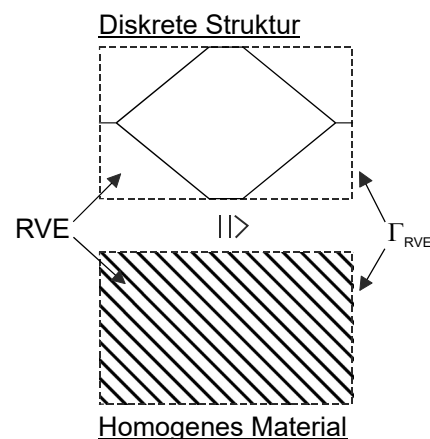
### 3.3 Grundlagen zur ebenen Homogenisierung von Wabenkernen

Zur Abbildung des Wabenkerns als homogene Schicht sind die in der Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  dargestellten Materialkennwerte durch äquivalente Materialkennwerte zu ersetzen. Eine Übereinstimmung der Achsen des Koordinatensystems mit den Ebenen der Materialsymmetrie wird hierbei vorausgesetzt. Während bei Laminaten oder faserverstärkte Schichten in der Regel elementare Mischungsregeln, bspw. parallele Anordnung (Voigt-Modell) oder Reihen-anordnung (Reuss-Modell), zur Bestimmung äquivalenter Materialkennwerte mit ausreichender Genauigkeit verwendet werden können (Altenbach et al. 1996), genügt ein solches Vorgehen für Wabenkerne üblicherweise nicht.

Stattdessen wird häufig das Wabensystem diskret mit strukturmechanischen Modellen aus Balken oder Platten für die Wabenwände abgebildet. Im Rahmen der Homogenisierung gilt es nun ein äquivalentes (effektive) Stoffmodell und die zugehörigen Kennwerte für das homogenisierte Material zu bestimmen, sodass das mechanische Verhalten der diskreten Struktur zu dem der homogenen Schicht äquivalent ist. Für periodische Strukturen wie bei Wabenkernen sind das äquivalente Materialmodell und die Kennwerte unabhängig vom betrachteten Ort, sodass beide an einem repräsentativen Volumenelement (kurz: RVE) abgeleitet werden können (Hohe & Becker 2002, Pasini & Arabnejad 2017). Mit Bezug auf Wabenkerne zeigt Abbildung 3.4 mögliche RVE für einen hexagonalen Wabenkern mit einheitlicher Wanddicke. Die periodische Struktur muss sich hierbei aus Translation und Rotation des RVE abbilden lassen.



**Abb. 3.4:** Mögliche repräsentative Volumenelemente (RVE) für hexagonale Wabenkerne mit einheitlicher Wanddicke



**Abb. 3.5:** Schematische Darstellung zur Homogenisierung an einem beliebigen repräsentativen Volumenelement (RVE)

Die vorstehende Bedingung einer Äquivalenz des mechanischen Verhaltens der diskreten Struktur und des homogenen Materials wird nun auf das RVE bezogen, wobei die Elemente in beiden Fällen eine identische äußere Form und Größe aufweisen müssen. Eine schematische Darstellung hierzu ist anhand des Übergangs der diskreten Wabenstruktur zu einem homogenen Material für ein beliebig gewähltes RVE in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Äquivalenz des mechanischen Verhaltens wird allgemein dadurch definiert, dass die Mittelwerte bestimmter mechanischer Größen wie Spannungen oder Verzerrungen der diskreten Struktur



und des homogenisierten Materials im RVE einander identisch sind. Die Festlegung eines äquivalenten Stoffgesetzes mit den zugehörigen Kennwerten wird dann ebenfalls ausschließlich auf das RVE bezogen (Hohe & Becker 2002, Pasini & Arabnejad 2017).

Bei der in Kapitel 3.4 herangezogenen Vorgehensweise zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte handelt es sich um eine zweidimensionale Betrachtung der Wabenstruktur im ebenen Spannungszustand. Entsprechend den Ausführungen nach Hohe & Becker (2002) liegt somit ein flächenbasierter Mittelungsansatz für die Spannungen und Verzerrungen vor. Unter der Voraussetzung, dass für den Rand  $\Gamma_{RVE}$  des betrachteten RVE (vgl. Abb. 3.5) die resultierende Belastung mit

$$\int_{\Gamma_{RVE}} T_i d\Gamma_{RVE} = \int_{\Gamma_{RVE}} T_i^* d\Gamma_{RVE} \quad (3.5)$$

mit: Spannungsvektor der Belastung  $T_i$  auf dem Rand  $\Gamma_{RVE}$  des RVE

gleich sind, darf auch von identischen mittleren Spannungen in den beiden Elementen ausgegangen werden. Die mittlere Spannung folgt hierbei aus dem Spannungstensor über den Gauß'schen Integralsatz (Chen & Butcher 2013).

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \sigma_{ij} dV_{RVE} = \frac{1}{\Gamma_{RVE}} \int_{\Gamma_{RVE}} T_i n_j d\Gamma_{RVE} , \text{ mit } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.6)$$

mit: Lokaler Spannungstensor  $\sigma_{ij}$   
 Tensor der mittleren Spannungen  $\bar{\sigma}_{ij}$   
 Volumen des repräsentativen Volumenelements  $V_{RVE}$   
 Normalenvektor  $n_j$  auf Rand des RVE

Folglich gilt für die mittleren Spannungen der diskreten Struktur  $\bar{\sigma}_{ij}$  und des homogene Materials  $\bar{\sigma}_{ij}^*$  folgende Äquivalenzbedingung.

$$\bar{\sigma}_{ij}^* = \bar{\sigma}_{ij} \quad (3.7)$$

Vergleichbare Zusammenhänge ergeben sich auch für die Verzerrungen, wobei hier die mittleren Verzerrungen für die diskrete Struktur und das homogene Material auf die Differenz der Verschiebungen an gegenüberliegenden Rändern bezogen werden. In gleicher Weise wie für die mittleren Spannungen  $\bar{\sigma}_{ij}$  nach Gleichung (3.6) lässt sich die mittlere Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  der diskreten Struktur anhand der Verzerrungsverteilung und den Randverschiebungen am RVE gemäß Gleichung (3.8) beschreiben (Chen & Butcher 2013).

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \varepsilon_{ij} dV_{RVE} = \frac{1}{2} \frac{1}{V_{RVE}} \int_{\Gamma_{RVE}} (u_i n_j + u_j n_i) d\Gamma_{RVE} , \text{ mit } i, j = 1, 2, 3 \quad (3.8)$$

mit: Lokaler Verzerrungstensor  $\varepsilon_{ij}$   
 Tensor der mittleren Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}_{ij}$   
 Verschiebungen  $u_i$  und  $u_j$  auf dem Rand des RVE  
 Normalenvektor  $n_i$  und  $n_j$  auf Rand des RVE

Durch die erneute Voraussetzung einer Äquivalenz der mittleren Verzerrungen gilt vergleichbar zu Gleichung (3.7) für die mittlere Verzerrung  $\bar{\varepsilon}_{ij}^*$  des homogenen Materials

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^* = \bar{\varepsilon}_{ij}. \quad (3.9)$$

Die eigentliche Homogenisierung folgt nun aus der Betrachtung mehrerer unabhängiger Grundzustände der Spannungen oder Verzerrungen sowohl für die diskrete Struktur als auch für das homogene Material durch Vorgabe definierter Randspannungen oder Randverschiebungen. Die Grundzustände sind hierbei so zu wählen, dass diese zusätzlich den Äquivalenzbedingungen nach Gleichung (3.7) für Randspannungen oder Gleichung (3.9) für Randverschiebungen genügen. Durch die Wahl eines geeigneten Stoffgesetzes zur Beschreibung des homogenisierten Materialverhaltens lassen sich dann aus den hieraus folgenden Spannungen oder Verzerrungen im RVE die äquivalenten Materialkennwerte bestimmen. Für weitergehende Beschreibungen zu flächenbasierten Homogenisierungsverfahren sowie die Herleitung dieser wird an dieser Stelle auf entsprechende Fachliteratur wie Hohe & Becker (2002) oder Pasini & Arabnejad (2017) verwiesen.

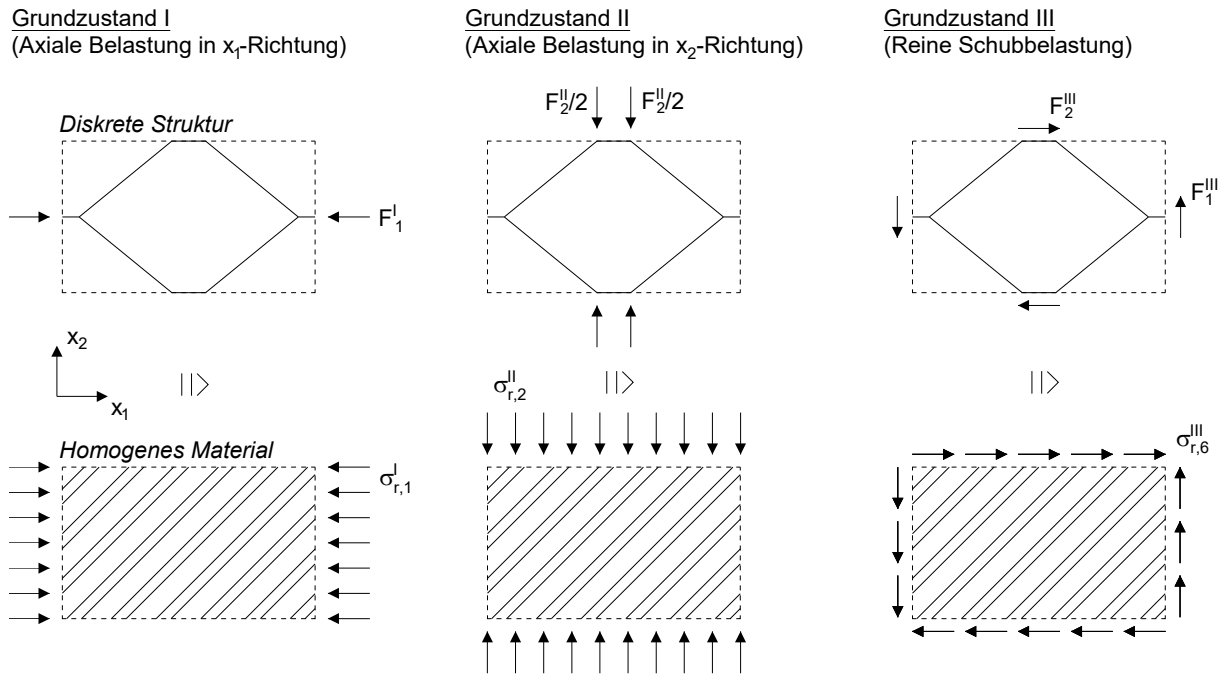
### 3.4 Äquivalente Materialkennwerte des Wabenkerns

#### 3.4.1 Grundzustände der äußeren Belastung

Die Ausführungen in Kapitel 3.3 beschreiben das Homogenisierungsverfahren mit flächenbasierter Mittelung im Allgemeinen. Nachfolgend wird die konkrete Vorgehensweise in Bezug auf Wabenkerne vorgestellt.

Zur Ermittlung der einzelnen äquivalenten Materialkennwerte der orthotropen Nachgiebigkeitsmatrix nach Gleichung (3.2) werden verschiedene Grundzustände der äußeren Belastung betrachtet, aus welchen sich die verschiedenen Materialkennwerte getrennt voneinander ableiten lassen. Da sich nachfolgende Betrachtungen ausschließlich auf die äquivalenten Materialkennwerte in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene beschränken (vgl. Kap. 3.4.2), sind für deren Bestimmung drei unabhängige Grundzustände notwendig. Bei diesen handelt es sich um den Grundzustand I mit einer axialen Belastung in  $x_1$ -Richtung, den Grundzustand II mit einer axialen Belastung in  $x_2$ -Richtung und den Grundzustand III mit einer reinen Schubbelastung.

Eine schematische Darstellung der drei Grundzustände für die diskrete Wabenstruktur und das homogene Material zeigt Abbildung 3.6 am Beispiel des RVE einer ganzen Wabe. Unter Voraussetzung eines isotropen linear elastischen Materialverhaltens der Wabenwände ist hierbei die Definition der äußeren Belastung als Druck- oder Zugbelastung in den verschiedenen Grundzuständen unerheblich. Bei korrekter Berücksichtigung der Vorzeichen für die Spannungen und Verzerrungen lassen sich in beiden Fällen die gleichen äquivalenten Materialkennwerte ableiten.



**Abb. 3.6:** Maßgebende Grundzustände der äußeren Belastung zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte

Entsprechend Abbildung 3.6 wirkt die äußere Belastung als Kräfte  $F$  auf die diskrete Wabenstruktur. Die Angriffspunkte der Kräfte fallen an den äußeren Rändern des RVE mit den Endpunkten der horizontalen Wabenwände zusammen. Hingegen greifen am homogenen Material als äußere Belastung Randspannungen  $\sigma_r$  an. Zur Erfüllung der Äquivalenzbedingung nach Gleichung (3.7) wird nun vorausgesetzt, dass die mittleren Spannungen der diskreten Struktur  $\bar{\sigma}$  und des homogenen Füllmaterials  $\bar{\sigma}^*$  im jeweiligen Grundzustand einander identisch sind. Aufgrund der ausschließlichen Wirkung der Randspannung auf das homogene Material stimmt die mittlere Spannung  $\bar{\sigma}^*$  mit der Randspannung  $\sigma_r$  überein. Zur Bestimmung der mittleren Spannung der diskreten Struktur  $\bar{\sigma}$  ist dagegen die Kraft auf die jeweilige Querschnittsfläche  $A_{RVE}$  des RVE zu beziehen. Dementsprechend liefert die Äquivalenzbedingung der mittleren Spannungen folgenden einfachen Zusammenhang.

$$\sigma_r = \bar{\sigma}^* = \bar{\sigma} = \frac{F}{A_{RVE}} \Leftrightarrow \bar{\sigma}^* = \sigma_r = \frac{F}{A_{RVE}} \quad (3.10)$$

Die mittlere Spannung  $\bar{\sigma}^*$  des homogenen Materials entspricht für die verschiedenen Grundzustände somit direkt dem Quotienten aus der äußeren Kraft  $F$  und der Querschnittsfläche  $A_{RVE}$ . Für die drei Grundzustände führt die äußere Belastung zu relativen Wandverschiebungen  $u_{RVE}$  der diskreten Struktur am Rand des RVE in Belastungsrichtung und quer zur Belastungsrichtung. Durch den Bezug dieser Verschiebungen auf die jeweilige Abmessung  $l_{RVE}$  des RVE folgen hieraus die mittleren Verzerrungen  $\bar{\varepsilon}$  im RVE. In gleicher Weise wie für die Spannungen wird im homogenen Material von homogenen Verzerrungsverteilungen mit dem Betrag  $\bar{\varepsilon}^*$  ausgegangen, womit die in Gleichung (3.9) definierte Äquivalenzbedingung die Bedingung entsprechend Gleichung (3.11) annimmt.

$$\bar{\varepsilon}^* = \bar{\varepsilon} = \frac{u_{RVE}}{l_{RVE}} \Rightarrow \bar{\varepsilon}^* = \frac{u_{RVE}}{l_{RVE}} \quad (3.11)$$

Folglich entspricht die mittlere Verzerrung des homogenen Materials direkt dem Quotienten aus der Wandverschiebung  $u_{RVE}$  der diskreten Struktur und der zugehörigen Abmessung  $l_{RVE}$ . Infolge der isolierten Betrachtung im ebenen Spannungszustand sind neben der im jeweiligen Grundzustand wirkenden Spannungskomponente alle weiteren Spannungskomponenten Null. Wird zur Beschreibung des Materialverhaltens des homogenen Materials von einem linear elastischen Materialverhalten ausgegangen, lassen sich die äquivalenten Module gemäß der Definition nach Gleichung (3.2) getrennt ermitteln. Exemplarisch ist dies in Gleichung (3.12) anhand des Grundzustandes I dargestellt, wobei die in Tabelle 3.1 angegebene verkürzte Indexschreibweise verwendet wird. Zur Bestimmung des äquivalenten Elastizitätsmoduls  $E_1^*$  wird hierbei die erste Zeile der Nachgiebigkeitsmatrix für die mittlere Dehnung  $\bar{\varepsilon}_1^*$  in Belastungsrichtung herangezogen.

$$\bar{\varepsilon}_1^* = S_{11}\bar{\sigma}_1^* + S_{12}\bar{\sigma}_2^* + S_{13}\bar{\sigma}_3^* = S_{11}\bar{\sigma}_1^* = \frac{1}{E_1^*}\bar{\sigma}_1^* \Leftrightarrow E_1^* = \frac{\bar{\sigma}_1^*}{\bar{\varepsilon}_1^*} \quad (3.12)$$

$$\text{mit: } \bar{\sigma}_2^* = \bar{\sigma}_3^* = 0$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.10) und (3.11) in Gleichung (3.12) lässt sich dann der äquivalente Elastizitätsmodul  $E_1^*$  des homogenen Materials über die Eigenschaften der diskreten Wabenstruktur beschreiben (Homogenisierung).

Gemäß den Ausführungen zur Orthotropie des Wabenkerns nach Kapitel 3.2 sind zur vollständigen Beschreibung des Materialverhaltens des homogenen Materials in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene neben den äquivalenten Modulen zusätzlich zwei äquivalente Querdehnnzahlen notwendig. Diese ergeben sich aus den mittleren Dehnungen des homogenen Materials in Belastungsrichtung und quer zur Belastungsrichtung für die beiden Grundzustände I und II. Aufgrund der Äquivalenzbedingung nach Gleichung (3.11) können diese direkt durch die jeweiligen Wandverschiebungen der diskreten Struktur am Rand des RVE ausgedrückt werden. Hiermit folgen dann die äquivalenten Querdehnnzahlen aus

$$\nu^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_\perp^*}{\bar{\varepsilon}_\parallel^*} = -\frac{\bar{\varepsilon}_\perp^{Diskret}}{\bar{\varepsilon}_\parallel^{Diskret}} = -\frac{\frac{u_\perp^{Diskret}}{l_{RVE,\perp}}}{\frac{u_\parallel^{Diskret}}{l_{RVE,\parallel}}} \quad (3.13)$$

Eine zusammenfassende Übersicht zu den jeweils aus den verschiedenen Grundzuständen abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerten kann Tabelle 3.2 entnommen werden.

**Tab. 3.2:** Übersicht zu den äquivalenten Materialkennwerten der verschiedenen Grundzustände

	Grundzustand der äußeren Belastung		
	I	II	III
Äquivalente Materialkennwerte	$E_1^*, \nu_{12}^*$	$E_2^*, \nu_{21}^*$	$G_{12}^*$

Sind diese äquivalenten Materialkennwerte bekannt, lässt sich das orthotrope Materialverhalten der diskreten Wabenstruktur in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene durch ein homogenes Material abbilden.

### 3.4.2 Unbefüllte Wabenkerne

#### 3.4.2.1 Axiale Belastung im Grundzustand I und II

Aufgrund der vorwiegenden Verwendung im Leichtbau sollen Sandwichwerkstoffe üblicherweise ein geringes Gewicht aufweisen (s. Kap. 3.1), weshalb die Hohlräume zwischen den Wabenkernen für gewöhnlich nicht ausgefüllt werden. Dementsprechend bezieht sich der Hauptteil der Literatur zur Homogenisierung auf Wabenkerne ohne zusätzliche Befüllung der Hohlräume. Zur Veranschaulichung der Vorgehensweise werden nachfolgend ausgewählte Veröffentlichungen zur Homogenisierung unbefüllter Wabenkerne vorgestellt.

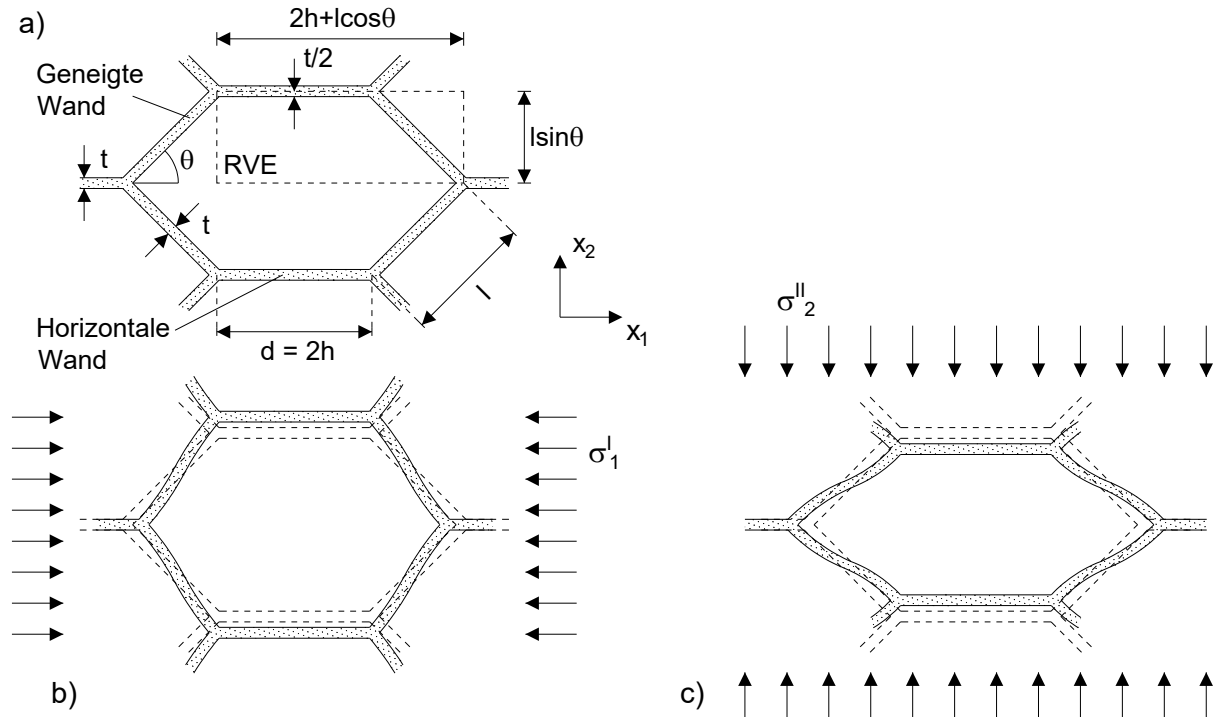
Ausgehend von Balkenelementen zur Abbildung der Wabenwände leitet Gibson (1981) äquivalente Materialkennwerte nur für die Kennwerte in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene im ebenen Spannungszustand ab. Begründet wird dies durch die Annahme eines sehr hohen Elastizitätsmoduls  $E^*_3$  und sehr hoher Schubmodule  $G^*_{13}$  und  $G^*_{23}$  in  $x_3$ -Richtung verglichen zu den Steifigkeiten in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Weiterhin wird von sehr geringen Verschiebungen in  $x_3$ -Richtung bei einer in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene wirkenden Belastung ausgegangen, womit auch die Querdehnzahlen  $\nu^*_{13}$  und  $\nu^*_{23}$  vernachlässigbar sind. Mit diesen Annahmen lassen sich aus der orthotropen Nachgiebigkeitsmatrix nach Gleichung (3.2) folgende Komponenten eliminieren.

$$S_{33} = S_{44} = S_{55} = S_{13} = S_{23} = 0 \quad (3.14)$$

Demzufolge verbleibt nur noch die Bestimmung der beiden äquivalenten Elastizitätsmodule  $E^*_1$  und  $E^*_2$ , der äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu^*_{12}$  und  $\nu^*_{21}$  sowie des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$ . Zur Abbildung des mechanischen Verhaltens des homogenen Materials nimmt Gibson (1981) ein linear elastisches Materialverhalten an. Weiterhin besitzen die horizontalen und geneigten Wabenwände eine einheitliche Wanddicke  $t$  und es wird von kleinen Verzerungen ausgegangen. Bei der Ermittlung der Wandverformungen werden nur die Biegeanteile infolge von Biegemomenten berücksichtigt, da diese laut Gibson (1981) für dünnwandige Wabenwände mit einer Schlankheit von  $t/l \ll 1$  maßgebend sind. Axial- oder Schubverformungen der Wabenwände infolge möglicher Normal- und Querkkräfte werden hingegen im ersten Ansatz vernachlässigt. Für die Wandelemente wird somit von der schubstarren Balkentheorie entsprechend den Bernoulli'schen Annahmen ausgegangen (Gross et al. 2011a).

Abbildung 3.7 zeigt das von Gibson (1981) angenommene RVE sowie die aus dem Grundzustand I und II resultierenden Verformungen der Wabenwände. Unter Berücksichtigung der in Kapitel 3.4.1 beschriebenen Vorgehensweise wirken als äußere Belastung jeweils nur die Spannung  $\sigma^I_1$  in  $x_1$ -Richtung im Grundzustand I oder die Spannung  $\sigma^{II}_2$  in  $x_2$ -Richtung im Grundzustand II auf die Waben. Aus der genaueren Betrachtung der beiden Verformungsbilder wird ersichtlich, dass aufgrund der periodischen Eigenschaften der Wabenstruktur die

horizontalen Wände eine einheitliche Verschiebung in  $x_2$ -Richtung erfahren. Folglich tritt in diesen keine Momentenbeanspruchung auf und es werden ausschließlich die geneigten Wabenwände durch Biegemomente beansprucht, womit sich die Ermittlung der maßgebenden Wandverschiebungen nur auf die geneigten Wabenwände beschränkt.

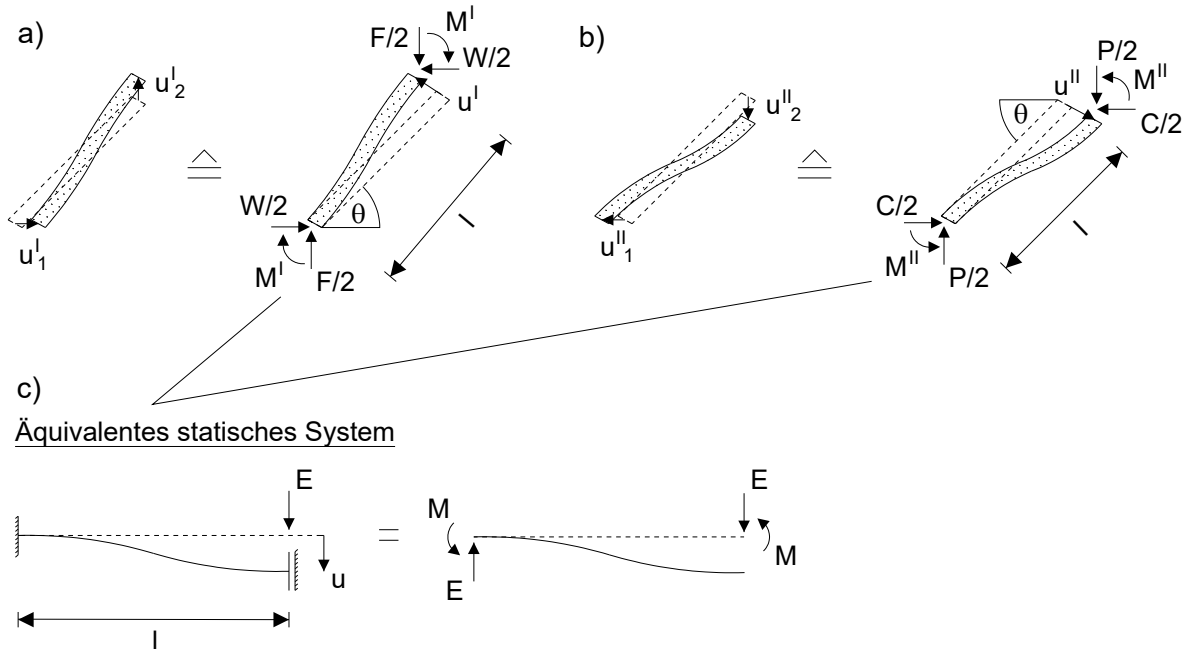


**Abb. 3.7:** a) RVE mit geometrischen Größen sowie verformte Zelle für b) den Grundzustand I mit  $\sigma_1^I$  und c) den Grundzustand II mit  $\sigma_2^{II}$  als äußere Belastung nach Gibson (1981)

Entsprechend Abbildung 3.7a umfasst das von Gibson (1981) betrachtete RVE eine Länge von  $2h + l \cos \theta$  in  $x_1$ -Richtung und  $l \sin \theta$  in  $x_2$ -Richtung, womit dieses eine horizontale Wabenwand mit der Länge  $d$  und eine geneigte Wand mit der Länge  $l$  beinhaltet. Die Betrachtung des äquivalenten Materialverhaltens des Wabenkerns reduziert sich demnach nur auf diese beiden Wandelemente. Da Gibson (1981) von einer einheitlichen Wanddicke der horizontalen und geneigten Wabenwände ausgeht, beträgt im RVE die Dicke der horizontalen Wand  $t/2$  und die Dicke der geneigten Wand  $t$ . Durch die zuvor vorausgesetzte hohe Schlankheit der Wabenwände ist die Wandüberschneidung infolge der in Abbildung 3.7a definierten Wandlängen vernachlässigbar.

Die aus den Wabenverformungen folgenden Verschiebungskomponenten  $u_1^I$  und  $u_2^I$  sowie  $u_1^{II}$  und  $u_2^{II}$  der geneigten Wand sind für die beiden Grundzustände in Abbildung 3.8 dargestellt. Durch Zusammenfassung dieser lässt sich die Wandverschiebung auch über die resultierenden Verschiebungen  $u^I$  und  $u^{II}$  normal zur Wandachse an einem Wandende ausdrücken. Ergänzend zeigt die Abbildung als Freischnitt die an der geneigten Wand angreifenden Kräfte und Schnittmomente. Hierbei ergeben sich die Kräfte  $W$  und  $P$  aus den äußeren Belastung  $\sigma_1^I$  und  $\sigma_2^{II}$ , wohingegen die Kräfte  $F$  und  $C$  infolge der Kräftegleichgewichtsbedingungen jeweils Null sind. Die Momente  $M^I$  und  $M^{II}$  resultieren aus einer durch die Periodizität verhinderten

Verdrehung der Wandenden und weisen an den gegenüberliegenden Enden jeweils den gleichen Betrag und Drehsinn auf. Die Übertragung dieser Zusammenhänge auf ein statisches System führt bei beiden Grundzuständen auf den in Abbildung 3.8c dargestellten Balken mit einer Einspannung und Parallelführung sowie einer Punktlast E.



**Abb. 3.8:** Wandverschiebung und angreifende Kräfte/Momente für a) den Grundzustand I mit der Belastung  $\sigma_1^I$  und b) den Grundzustand II mit der Belastung  $\sigma_2^{II}$  sowie c) äquivalentes statisches System nach Gibson (1981)

Mit der in Gleichung (3.10) abgeleiteten Äquivalenzbedingung, den Abmessungen des RVE gemäß Abbildung 3.7 sowie einer einheitlichen Wabenhöhe  $H_c$  ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Kräften  $W$  und  $P$  sowie den Randspannungen  $\sigma_1^I$  und  $\sigma_2^{II}$ .

$$\begin{aligned} \frac{W}{2} &= -\sigma_1^I l \sin \theta H_c \quad \text{und} \quad \frac{P}{2} = -\sigma_2^{II} (2h + l \cos \theta) H_c \\ \Leftrightarrow \sigma_1^I &= -\frac{W}{2l \sin \theta H_c} \quad \text{und} \quad \sigma_2^{II} = -\frac{P}{2(2h + l \cos \theta) H_c} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Hierbei besitzen die beiden Randspannungen als Druckspannung ein negatives Vorzeichen. Wird weiterhin berücksichtigt, dass die Momente an den Balkenenden die gleichen Beträge aufweisen, lassen sich  $M^I$  und  $M^{II}$  durch die Kräfte  $W$  und  $P$  ausdrücken, womit alle Schnittgrößen bekannt sind. Zur Bestimmung der Verschiebungen  $u^I$  und  $u^{II}$  bedient sich Gibson (1981) elementarer Lösungen zur Balkenverschiebung. Die hieraus abgeleiteten Gleichungen für die resultierenden Verschiebungen der geneigten Wabenwand in den beiden Grundzuständen lauten wie folgt.

$$u^I = \frac{W l^3 \sin \theta}{24 E I_{cw}} \quad \text{und} \quad u^{II} = \frac{P l^3 \cos \theta}{24 E I_{cw}} \quad (3.16)$$

mit: Elastizitätsmodul der Wabenwände  $E_{cw}$   
 Flächenträgheitsmoment der Wabenwände  $I_{cw} = t^3 H_c / 12$   
 Biegesteifigkeit der Wabenwände  $E I_{cw} = E_{cw} I_{cw}$

Wie bereits in Kapitel 3.4.1 beschrieben wurde, folgen die mittleren Dehnungen aus dem Bezug der Verschiebungskomponente in Lastrichtung auf die entsprechende Abmessung des RVE. Unter Berücksichtigung der Definition nach Gleichung (3.11), den jeweiligen Abmessungen des RVE in Lastrichtung gemäß Abbildung 3.7 sowie der zugehörigen Verschiebungskomponente in Belastungsrichtung lassen sich die mittleren Dehnungen berechnen aus

$$\bar{\varepsilon}_1^I = -\frac{u^I \sin \theta}{2h + l \cos \theta} \text{ und } \bar{\varepsilon}_2^{II} = -\frac{u^{II} \cos \theta}{l \sin \theta}. \quad (3.17)$$

Hierbei beziehen sich die negativen Vorzeichen auf die Definition der beiden Verzerrungen als Stauchung. Durch den Ansatz des eindimensionalen Hooke'sche Gesetzes zur Beschreibung des homogenen Materialverhaltens leitet Gibson (1981) über die drei vorstehenden Gleichungen die äquivalenten Elastizitätsmodule  $E_1^*$  und  $E_2^*$  folgendermaßen ab.

$$E_1^* = \frac{\bar{\sigma}_1^*}{\bar{\varepsilon}_1^*} = \frac{\sigma_1^I}{\bar{\varepsilon}_1^I} = \frac{12EI_{cw}(2h + l \cos \theta)}{l^4 \sin^3 \theta H_c} \quad (3.18)$$

$$E_2^* = \frac{\bar{\sigma}_2^*}{\bar{\varepsilon}_2^*} = \frac{\sigma_2^{II}}{\bar{\varepsilon}_2^{II}} = \frac{12EI_{cw} \sin \theta}{(2h + l \cos \theta) l^2 \cos^2 \theta H_c}$$

Aus der Gleichung wird ersichtlich, dass die beiden Kennwerte aufgrund der ausschließlichen Berücksichtigung des Biegeanteils der Wandverschiebungen nach Gleichung (3.16) nur von den geometrischen Größen der Wabenstruktur und der Biegesteifigkeit der Wabenwände abhängen.

Die zur Ableitung der äquivalenten Querdehnzahlen erforderlichen mittleren Dehnungen quer zur Belastungsrichtung bestimmt Gibson (1981) aus den zugehörigen Komponenten der Wandverschiebungen  $u^I$  und  $u^{II}$  quer zur Belastungsrichtung. Durch den erneuten Bezug der Verschiebungskomponenten auf die Abmessungen des RVE lassen sich diese entsprechend Gleichung (3.19) berechnen.

$$\bar{\varepsilon}_2^I = \frac{u^I \cos \theta}{l \sin \theta} \text{ und } \bar{\varepsilon}_1^{II} = \frac{u^{II} \sin \theta}{2h + l \cos \theta} \quad (3.19)$$

Unter Berücksichtigung der Definition nach Gleichung (3.13) ergeben sich die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12}^*$  und  $v_{21}^*$  im Grundzustand I und II aus den mittleren Dehnungen in und quer zu Belastungsrichtung wie folgt.

$$v_{12}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_2^*}{\bar{\varepsilon}_1^*} = -\frac{\bar{\varepsilon}_2^I}{\bar{\varepsilon}_1^I} = -\frac{\frac{u^I \cos \theta}{l \sin \theta}}{-\frac{u^I \sin \theta}{2h + l \cos \theta}} = \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l \sin^2 \theta} \quad (3.20)$$

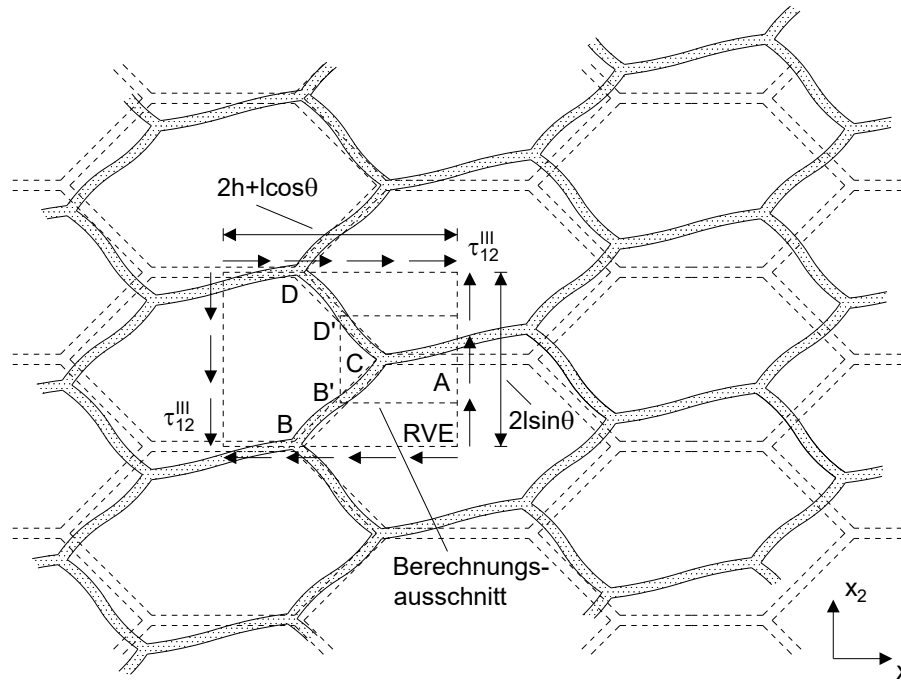
$$v_{21}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_1^*}{\bar{\varepsilon}_2^*} = -\frac{\bar{\varepsilon}_1^{II}}{\bar{\varepsilon}_2^{II}} = \frac{\frac{u^{II} \sin \theta}{2h + l \cos \theta}}{\frac{u^{II} \cos \theta}{l \sin \theta}} = \frac{l \sin^2 \theta}{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}$$

Demnach hängen die äquivalenten Querdehnzahlen bei ausschließlicher Betrachtung des Biegeanteils der Wabenwände nur von den geometrischen Größen der Wabenstruktur ab.



### 3.4.2.2 Reine Schubbelastung im Grundzustand III

Zur vollständigen Beschreibung der Orthotropie der Wabenstruktur in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene als homogenes Material ist zusätzlich die Ableitung eines äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  notwendig. Das hierzu gewählte RVE weicht von dem des Grundzustandes I und II ab und kann in Anlehnung an Gibson & Ashby (1999) Abbildung 3.9 entnommen werden. Das RVE umfasst somit eine Länge von  $2h+l\cos\theta$  in  $x_1$ -Richtung und  $2l\sin\theta$  in  $x_2$ -Richtung. Die relevanten Knoten sind mit A, B, C und D bzw. B' und D' bezeichnet. Entlang der Ränder des RVE wirkt eine konstante äußere Schubspannung  $\tau_{12}^{III} = \tau_{21}^{III} = \sigma_6^{III}$ .

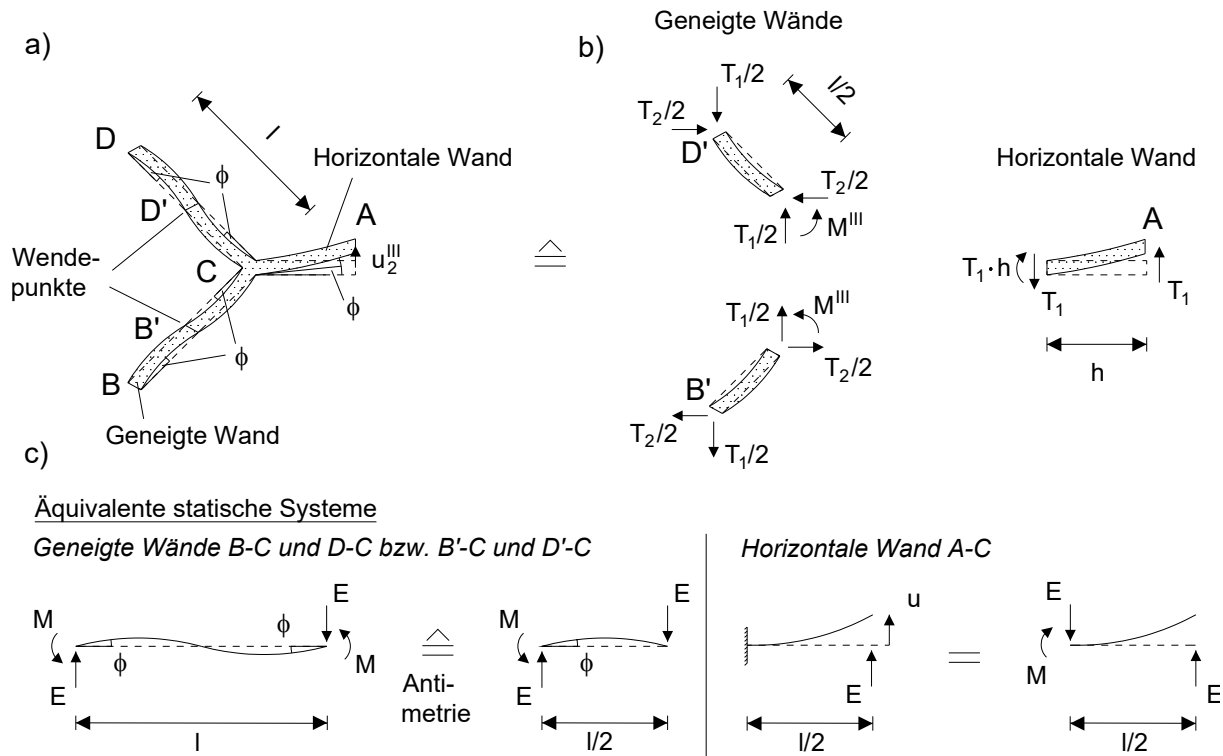


**Abb. 3.9:** Verformter Wabenkern bei reiner Schubbelastung  $\tau_{12}^{III}$  im Grundzustand III mit zugehörigem RVE nach Gibson & Ashby (1999)

Ebenfalls ist in der Abbildung schematisch die Verformung der Wände AC, BC und CD dargestellt. Aufgrund der Betrachtung nur des Biegeanteils der Wandverformung sowie der periodischen Eigenschaften des Wabenkerns schließt Gibson & Ashby (1999) eine Relativverschiebung der geneigten Wandendpunkte B, C und D im RVE aus. Demnach lässt sich die Verformung am rechten Rand des RVE nur durch die Verschiebung  $u_2^{III}$  im Punkt A (vgl. Abb. 3.10a) beschreiben. Die äußere Schubbelastung führt zu einer Verdrehung  $\Phi$  der geneigten Wände. Infolge der Periodizität ist diese antimetrisch bezogen auf die Mittelpunkte der geneigten Wände, sodass in den Punkten B' und D' ein Wendepunkt der Biegelinie auftritt und dort die Biegemomente Null sind. Die Verdrehung der geneigten Wände führt unter Annahme einer biegesteifen Ecke im Punkt C ebenfalls zu einer Verdrehung  $\Phi$  der horizontalen Wand AC.

Aufgrund der Antimetrie der geneigten Wabenwände lässt sich die Ermittlung der Verschiebung  $u_2^{III}$  auf den in Abbildung 3.9 dargestellten Berechnungsausschnitt mit den Wänden AC, B'C und CD' reduzieren. Der zugehörige Freischnitt kann Abbildung 3.10b entnommen werden. Die beiden resultierenden Kräfte  $T_1$  und  $T_2$  folgen aus der äußeren Schubbelastung  $\tau_{12}^{III}$ .

Zusätzlich wirken im Punkt C an den geneigten Wänden symmetriebedingt die Momente  $M^{III}$  mit gleichem Betrag und Drehsinn. Die statischen Systeme der Wabenwände sind ergänzend in Abbildung 3.10c dargestellt.



**Abb. 3.10:** a) Wandverschiebung und -verdrehung, b) angreifende Kräfte/Momente bei reiner Schubbelastung  $\tau_{12}^{III}$  sowie c) äquivalentes statisches System nach Gibson & Ashby (1999)

Unter Berücksichtigung der Äquivalenzbedingung nach Gleichung (3.10) lassen sich durch den Bezug der äußeren Schubspannungen auf die Abmessungen des RVE die resultierenden Schubkräfte  $T_1$  und  $T_2$  nach Gleichung (3.21) berechnen.

$$T_1 = \tau_{12}^{III} 2l \sin \theta H_c \text{ und } \frac{T_2}{2} = \tau_{12}^{III} (2h + l \cos \theta) H_c$$

$$\Leftrightarrow \tau_{12}^{III} = \frac{T_1}{2l \sin \theta H_c} = \frac{T_2}{2(2h + l \cos \theta) H_c} \quad (3.21)$$

Hierbei wirkt die Schubkräfte  $T_1$  an den seitlichen Rändern des RVE parallel zur  $x_2$ -Achse und die Schubkraft  $T_2$  an der Ober- und Unterseite parallel zur  $x_1$ -Achse. Aus einer Betrachtung des lokalen Momentengleichgewichts am Punkt C kann zusätzlich das Moment  $M^{III}$  über die Kraft  $T_1$  ausgedrückt werden, womit auch für den Grundzustand III alle relevanten Schnittgrößen bekannt sind.

Da die Wandverschiebung  $u_2^{III}$  am Rand des RVE bei ausschließlicher Betrachtung von Biegeverformungen nur aus der horizontalen Wand resultiert, muss zur Ermittlung dieser nur die Schubkraft  $T_1$  herangezogen werden. Entsprechend der statischen Systeme nach Abbildung 3.10c setzt sich die Verschiebung  $u_2^{III}$  aus zwei Anteilen zusammen. Zum einen ergibt sich diese aus dem Verschiebungsanteil infolge der Verdrehung  $\Phi$  der geneigten Wände und zum anderen aus dem Verschiebungsanteil der Horizontalwand durch die Kraft  $T_1$ . Zur Berechnung

dieser Verschiebungsanteile verwenden Gibson & Ashby (1999) elementare Lösungen zur Balkenverschiebung. Durch Superposition der beiden Verschiebungsanteile lässt sich die Verschiebung  $u_2^{III}$  ermitteln aus

$$u_2^{III} = \phi h + \frac{T_1 h^3}{3EI_{cw}} = \frac{T_1 h^2 l}{12EI_{cw}} + \frac{T_1 h^3}{3EI_{cw}} = \frac{T_1 h^2}{12EI_{cw}} (4h + l). \quad (3.22)$$

Aus der Betrachtung des in Abbildung 3.9 dargestellten Verformungsbildes im RVE wird ersichtlich, dass aufgrund der Periodizität an der linken Seite des RVE betragsmäßig die gleiche Verschiebung jedoch mit entgegengesetzter Richtung vorliegt. Dementsprechend lässt sich die mittlere Gleitung über die Definition nach Gleichung (3.11) und durch den Bezug der Verschiebungen auf die Länge des RVE wie folgt bestimmen.

$$\bar{\gamma}_{12}^{III} = \frac{2u_2^{III}}{2h + l \cos \theta} \quad (3.23)$$

Unter Annahme des eindimensionalen Hooke'schen Gesetzes zur Beschreibung des homogenen Materialverhaltens ergibt sich aus den drei vorstehenden Gleichungen gemäß Gibson & Ashby (1999) folgende Bestimmungsgleichung für den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$ .

$$G_{12}^* = \frac{\bar{\tau}_{12}^*}{\bar{\gamma}_{12}^*} = \frac{\tau_{12}^{III}}{\bar{\gamma}_{12}^{III}} = \frac{3EI_{cw}(2h + l \cos \theta)}{h^2(4h + l) \sin \theta H_c} \quad (3.24)$$

Wie bereits die beiden äquivalenten Elastizitätsmodule hängt auch der äquivalente Schubmodul bei ausschließlicher Betrachtung von Biegeverformungen nur von der Biegesteifigkeit der Wabenwand und den geometrischen Größen der Waben ab. Damit sind zur Abbildung des orthotropen Materialverhaltens des Wabenkerns in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene als homogenes Material alle notwendigen äquivalenten Kennwerte bestimmt.

### 3.4.2.3 Ergänzende Beschreibungen

Für die in den Kapiteln 3.4.2.1 und 3.4.2.2 angegebenen äquivalenten Materialkennwerte lässt sich gemäß Gibson & Ashby (1999) zeigen, dass bei einer regulären Form der hexagonalen Waben, d. h.  $\theta = 60^\circ$  und  $l = 2h$ , die Orthotropie in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene in eine Isotropie übergeht. Durch Einsetzen von  $\theta = 60^\circ$  und  $l = 2h$  in die verschiedenen Bestimmungsgleichungen ergibt sich für die äquivalenten Materialkennwerten damit folgender Zusammenhang.

$$E^* = E_1^* = E_2^*; \nu^* = \nu_{12}^* = \nu_{21}^* = 1; G^* = G_{12}^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu^*)} \quad (3.25)$$

Weiterhin gehen Gibson (1981) sowie Gibson & Ashby (1999) zur Herleitung der äquivalenten Materialkennwerte von einem linear elastischen Materialverhalten des homogenen Materials und kleinen Verzerrungen der Wabenwände aus. Zum Gültigkeitsbereich eines elastischen Materialverhaltens werden von Gibson & Ashby (1999) globale Verzerrungen des Wabenkerns von bis zu 10 % angegeben. Eine ergänzende Ableitung von Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Elastizitätsmodulen  $E_1^*$  und  $E_2^*$  bei geometrischer Nichtlinearität mit der Formulierung über einen veränderlichen Zellwinkels  $d\theta$  kann Gibson (1981) entnommen werden.

Gemäß den Ausführungen von Gibson & Ashby (1999) wird eine geometrische Nichtlinearität jedoch erst ab einer globalen Verzerrung des Wabenkerns von ca. 20 % relevant.

Neben der vorgestellten Herleitung für eine einheitliche Wanddicke  $t$  der horizontalen und geneigten Wabenwände leiten Gibson & Ashby (1999) zusätzlich äquivalente Materialkennwerte für eine doppelte Wanddicke  $2t$  der horizontalen Wände ab. Werden auch hier nur die Biegeanteile zur Berechnung der Wandverschiebungen herangezogen, bleiben die vorstehenden Bestimmungsgleichungen der Materialkennwerte  $E^*_1$ ,  $E^*_{-1}$ ,  $v^*_{12}$  und  $v^*_{21}$  wegen der beanspruchungsfreien horizontalen Wabenwände unverändert. Hingegen ist die doppelte Wanddicke bei der Herleitung des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  zu berücksichtigen, da gemäß Abbildung 3.10a die Verschiebung  $u^{III}_2$  aus der Verformung der horizontalen Wand resultiert. Infolge eines inkorrekten Ansatzes der Biegesteifigkeit  $EI_{2cw}$  der horizontalen Wand kann Gleichung (3.26) eine zu Gibson & Ashby (1999) korrigierte Lösung für  $G^*_{12}$  entnommen werden.

$$G^*_{12} = \frac{6EI_{cw}(2h + l\cos\theta)}{h^2(h + 2l)l\sin\theta H_c} \quad (3.26)$$

$$\text{mit: Biegesteifigkeit der h-Wand } EI_{2cw} = E_{cw} \frac{(2t)^3 H_c}{12} = 8E_{cw} \frac{t^3 H_c}{12} = 8EI_{cw}$$

Zur Herleitung von  $G^*_{12}$  ist im zweiten Term von Gleichung (3.22) lediglich die Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  durch die Biegesteifigkeit bei doppelter Wanddicke  $EI_{2cw}$  zu ersetzen. Aufgrund der doppelten Wanddicke der horizontalen Wände geht bei einem Wabenkern mit einer Form als reguläres Hexagon das Materialverhalten nicht mehr zur Isotropie in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene über.

Vorstehende Herleitungen der äquivalenten Materialkennwerte beziehen sich auf die ausschließliche Betrachtung von Biegeverformung der Wabenwände. Laut Gibson & Ashby (1999) ist diese Betrachtung für Wabenwände mit Schlankheiten von  $t/l < 0,2$  zutreffend. Ist die Schlankheit geringer oder tritt ein biaxialer Zustand mit gleichzeitiger Wirkung äußerer Belastungen in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung auf, sind die Verschiebungsanteile der Wabenwände aus Axial- und Schubverformung nicht mehr vernachlässigbar. Insbesondere für den biaxialen Belastungszustand können die äußeren Einwirkungen zu einer Verringerung der Momentenbeanspruchung der Wabenwände führen, wodurch der Einfluss der Axialverformungen signifikant werden kann. Aus diesem Grund erweitern Gibson & Ashby (1999) die in den Kapiteln 3.4.2.1 und 3.4.2.2 abgeleiteten Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte um die Verschiebungsanteile aus den Axial- und Schubverformungen der Wabenwände bei einheitlicher Wanddicke. Zur Bestimmung des Schubanteils der Wandverschiebung verwenden Gibson & Ashby (1999) einen von Timoshenko & Goodier (1970) hergeleiteten Ansatz, aus welchem sich der Schubanteil  $u_s$  über den Biegeanteil  $u_B$  wie folgt ermitteln lässt.

$$u_s = u_B(2,4 + 1,5v_{cw}) \left(\frac{t}{l}\right)^2 \quad \text{und} \quad u_s = u_B(2,4 + 1,5v_{cw}) \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad (3.27)$$

mit: Querdehnzahl des Wabenwandmaterials  $v_{cw}$

Der Axialanteil der Wandverschiebungen wird von Gibson & Ashby (1999) hingegen direkt über die Normalkräfte in den Wabenwänden unter Berücksichtigung der jeweiligen Wandlänge und Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Wabenwände ermittelt. Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der mittleren Verzerrungen und zur Bestimmung der äquivalenten Materialkennwerte bleibt zu dem in den Kapiteln 3.4.2.1 und 3.4.2.2 beschriebenen Vorgehen unverändert.

Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Materialkennwerte  $E^*_1$ ,  $E^*_2$  und  $G^*_{12}$  bei einer doppelten Wanddicke  $2t$  der horizontalen Wabenwände mit allen drei Verschiebungsanteilen der Wabenwände aus Biege-, Axial- und Schubverformung leiten Malek & Gibson (2015) her. Zur Ermittlung des Biegeanteils bedienen sich diese wie bereits Gibson (1981) sowie Gibson & Ashby (1999) elementarer Lösungen zur Balkenverschiebung. Ebenfalls wird zur Ermittlung des Schubanteils Gleichung (3.27) herangezogen.

Unter Voraussetzung eines linear elastischen Materialverhaltens der Wabenwände lassen sich die Wandverschiebung, anstelle der zuvor beschriebenen elementaren Lösungen, mithilfe des Arbeitssatzes über das Prinzip der virtuellen Kräfte (kurz: PvK) berechnen. Hierbei wird die Formänderungsenergie im Arbeitssatz über die Zustandslinien der Schnittgrößen für eine gegebene Last und eine virtuelle "1"-Last bestimmt. Durch die zusätzliche Anwendung des Reduktionssatzes lässt sich die Verschiebung  $u$  am Angriffspunkt und in Richtung der virtuellen Last ermitteln. Werden Torsionsmomente vernachlässigt, lautet die allgemeine Definition des Reduktionssatzes für einen Kraftlastfall gemäß Gross et al. (2011a) wie folgt.

$$u = \int \frac{M\bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N\bar{N}}{EA} ds + \int \frac{Q\bar{Q}}{GA} ds \quad (3.28)$$

mit: Moment  $M$ , Normalkraft  $N$ , Querkraft  $Q$  infolge einer gegebenen Last  
 Moment  $\bar{M}$ , Normalkraft  $\bar{N}$ , Querkraft  $\bar{Q}$  infolge einer virtuellen Last "1"  
 Biegesteifigkeit  $EI$ , Dehnsteifigkeit  $EA$  und Schubsteifigkeit  $GA$  der Wand  
 Lokale Koordinate  $s$  des Balkens

Für die Definition nach Gleichung (3.28) wird davon ausgegangen, dass es sich bei der virtuellen Last um eine Kraft handelt. Durch die Vorgabe eines virtuellen Moments lassen sich ebenfalls Verdrehungen bestimmen. Für nähere Beschreibungen zur Herleitung des PvK sowie des Reduktionssatzes wird auf entsprechende Fachliteratur wie von Gross et al. (2011a) verwiesen. Das PvK wird beispielsweise von Balawi (2007) zur Ermittlung äquivalenter Materialkennwerte  $E^*_1$ ,  $E^*_2$ ,  $v^*_{12}$  und  $v^*_{21}$  für einen Wabenkern mit gekrümmten Wabenwänden im Übergangsbereich der geneigten zu den horizontalen Wabenwänden verwendet.

### 3.4.3 Befüllte Wabenkerne

Das in Kapitel 3.4.2 beschriebene Vorgehen zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte bezieht sich auf Wabenkerne mit unausgefüllten Hohlräumen. Dieses lässt sich nicht direkt auf befüllte Geozellen anwenden, da der Einfluss aus dem zusätzlichen Füllmaterial auf die äquivalenten Materialkennwerte unberücksichtigt bleiben würde. Entgegen den unausgefüllten Wabenkernen können, wegen der üblicherweise angestrebten hohen spezifischen Festigkeit

von Sandwichwerkstoffen, der Literatur jedoch nahezu keine Veröffentlichungen zur Homogenisierung von ausgefüllten Wabenkernen entnommen werden. Lediglich Abd El-Sayed (1976) und Abd El-Sayed et al. (1979) gehen bei der Ableitung äquivalenter Materialkennwerte von einer Füllung mit einem isotropen, linear elastischen Füllmaterial des Wabenkerns aus. Die horizontalen Wabenwände besitzen hierbei eine doppelte Wanddicke.

Vorab ermittelt auch Abd El-Sayed (1976) die äquivalenten Materialkennwerte eines unbefüllten Wabenkerns. Ähnlich dem zuvor beschriebenen Prinzip der virtuellen Kräfte bedient sich dieser zur Verschiebungsberechnung der Wabenwände einer Formulierung der Formänderungsenergie  $U$  über die Zustandslinien der Schnittgrößen infolge einer äußeren Kraft  $F$ . Unter Vernachlässigung des Einflusses von Torsionsmomenten lässt sich diese in allgemeiner Form für einen Kraftlastfall gemäß Dankert & Dankert (2006) ausdrücken durch

$$U = \int \frac{M^2}{2EI} ds + \int \frac{N^2}{2EA} ds + \int \frac{Q^2}{2GA} ds. \quad (3.29)$$

Die Wandverschiebung  $u$  ergibt hieraus über den Satz von Castigliano durch die partielle Ableitung nach einer gegebenen äußeren Kraft  $F$  wie folgt (Dankert & Dankert 2006).

$$u = \frac{\partial U}{\partial F} \text{ oder alternativ } u = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial F} ds \quad (3.30)$$

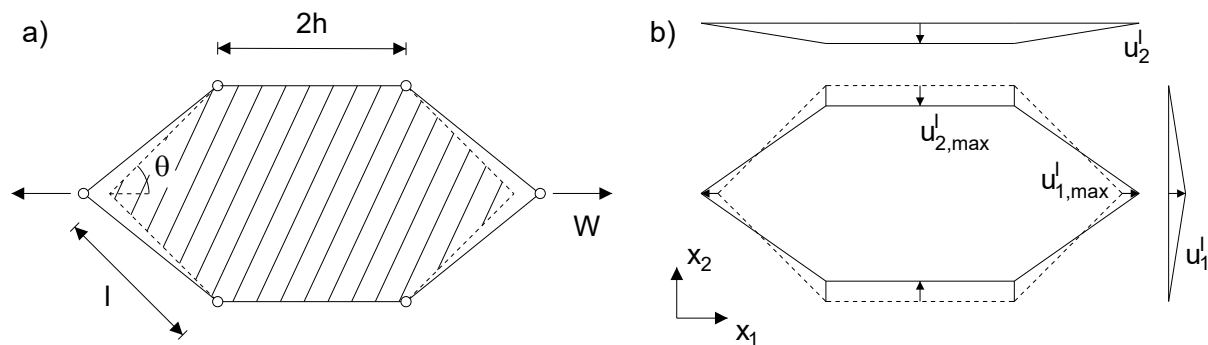
Zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte  $E^*_1$ ,  $E^*_2$ ,  $v^*_{12}$  und  $v^*_{21}$  berücksichtigt Abd El-Sayed (1976) ausschließlich die Biege- und Axialverformungen der geneigten Wände. Die maßgebenden Wandverschiebungen folgen durch den Ansatz der zugehörigen Biegemomente und Normalkräfte in Gleichung (3.30). Wird der Verschiebungsanteil der Axialverformungen vernachlässigt, gehen aus der Lösung von Abd El-Sayed (1976) die Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte gemäß Gleichung (3.18) und (3.20) hervor. Für die Ermittlung des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  werden hingegen nur die Biegeverformungen der geneigten Wände herangezogen. Abd El-Sayed (1976) leitet hieraus jedoch fälschlicherweise nur einen halb so großen Schubmodul  $G^*_{12}$  verglichen zu dem nach Gleichung (3.26) ab.

Zur Berücksichtigung des Einflusses einer isotropen, linear elastischen Befüllung der Hohlräume des Wabenkerns auf die äquivalenten Materialkennwerte  $E^*_1$  und  $E^*_2$  unterscheidet Abd El-Sayed (1976) folgende zwei Grenzfälle.

- 1) Die Füllung erfolgt mit einem weichen Material. Der Elastizitätsmodul  $E_f$  der Füllung ist gering verglichen zum Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  der Wabenwände. Es wird davon ausgegangen, dass das Füllmaterial und die Wabenwände eine einheitliche Verformung aufweisen. Folglich wird eine Kompatibilität der Verschiebungen vorausgesetzt.
- 2) Die Füllung erfolgt mit einem steifen Material. Der Elastizitätsmodul  $E_f$  der Füllung ist groß verglichen zum Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  der Wabenwände. Zusätzlich wird eine Fallunterscheidung zwischen einer Verschiebungskompatibilität und einer möglichen lokalen Ablösung der Wabenwände vom Füllmaterial bei Belastung in  $x_1$ -Richtung betrachtet.

Sowohl der erste Fall als auch die Betrachtung einer Verschiebungscompatibilität im zweiten Fall sind im Hinblick auf das Materialverhalten eines nichtbindigen Füllmaterials nicht auf das Verbundmaterial Geozelle-Boden übertragbar. Durch die vorausgesetzte Kompatibilität der Verschiebungen treten innerhalb des Füllmaterials Zugspannungen auf. Da ein nichtbindiges Füllmaterial keine oder nur eine vernachlässigbare Zugfestigkeit aufweist, kann dieses jedoch keine nennenswerten Zugspannungen aufnehmen. Folglich ist dieser Ansatz für befüllte Geozellen ungeeignet. Dementgegen liegen unter Annahme einer Ablösung der Wabenwände von dem Füllmaterial ausschließlich Druckspannungen im Füllmaterial vor, weshalb nachfolgend nur auf diesen Fall eingegangen wird.

Das von Abd El-Sayed (1976) angenommene Verformungsbild einer befüllten Wabe sowie die aus einer Zugbelastung folgenden Wandverschiebungen sind in Abbildung 3.11 für den Grundzustand I dargestellt. Die Befüllung befindet sich hierbei nur innerhalb der betrachteten Wabe.

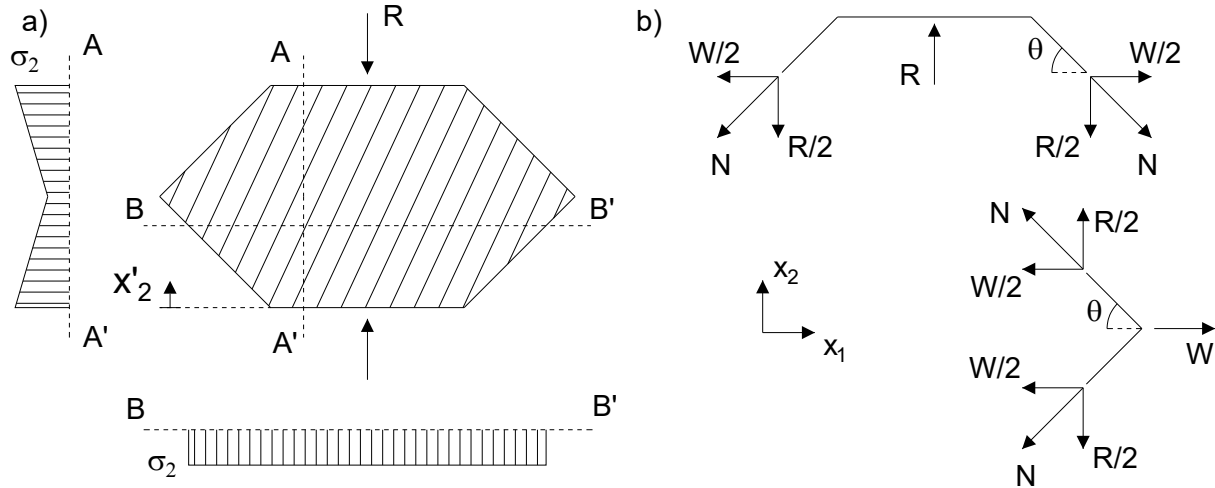


**Abb. 3.11:** a) Verformungsbild bei Ablösung und b) Wandverschiebungen nach Abd El-Sayed (1976)

Aus dem Verformungsbild wird ersichtlich, dass zwischen den horizontalen Wänden und dem Füllmaterial weiterhin von einer Verschiebungscompatibilität ausgegangen wird und die Ablösung sich nur auf die geneigten Zellwände beschränkt. Gemäß den in Abbildung 3.11b dargestellten Verschiebungsverteilungen ist hierbei die Verschiebung  $u_2^I$  über die horizontale Wand mit dem Wert  $u_{2,max}^I$  konstant und fällt zu den Seiten hin linear auf einen Wert von Null ab. Die Verschiebung  $u_1^I$  weist eine lineare Verteilung auf, wobei der Maximalwert mit  $u_{1,max}^I$  in Wabenmitte auftritt. An der Ober- und Unterseite der Wabe nimmt  $u_1^I$  den Wert Null an.

Für die Herleitung des äquivalenten Elastizitätsmoduls  $E_1^*$  geht Abd El-Sayed (1976) davon aus, dass die Wabenwände ausschließlich durch Normalkräfte beansprucht werden. Begründet wird dies durch die Ausbildung von plastischen Momentengelenken in den Eckpunkten der Wabenwände, welche sich infolge einer Überbeanspruchung des Wandmaterials durch konzentrierte Biegemomente bei verhältnismäßig höheren Belastungen einstellen. In Abbildung 3.11a sind die Momentengelenke durch Kreise in den Eckpunkten gekennzeichnet. Ergänzend wird vorausgesetzt, dass die Normalkräfte nur zu Axialverformungen in den geneigten und nicht in den horizontalen Wabenwänden führen, weshalb auch die in Abbildung 3.11b dargestellte Verteilung der Verschiebung von  $u_1^I$  an der oberen und unteren horizontalen Wabenwand den Wert Null annimmt.

Unter ausschließlicher Berücksichtigung einer Beanspruchung der geneigten Wände durch Normalkräfte zeigt Abbildung 3.12a den Kräftefreischnitt für das Füllmaterial. Folglich führt die äußere Belastung  $W$  zu einer Reaktionskraft  $R$  des Füllmaterials in  $x_2$ -Richtung. Aus Gründen des vertikalen Kräftegleichgewichts muss die Resultierende der Spannungen  $\sigma_2$  im Füllmaterial für jeden horizontalen Schnitt der Kraft  $R$  entsprechen. Durch die Annahme einer konstanten Spannungsverteilung in  $x_1$ -Richtung (s. Schnitt B-B') ergibt sich gemäß Abd El-Sayed (1976) infolge des veränderlichen Querschnitts des Füllmaterials innerhalb der Wabe eine lineare Spannungsverteilung  $\sigma_2$  in  $x_2$ -Richtung (s. Schnitt A-A').



**Abb. 3.12:** Kräftefreischnitt a) am Füllmaterial und b) an den Wabenwänden nach Abd El-Sayed (1976)

Wie in Abbildung 3.12b dargestellt folgt die Normalkraft in der geneigten Wabenwand als Resultierende aus der äußeren Belastung  $W$  und der Reaktionskraft  $R$ . Somit lassen sich sowohl die Normalkraft  $N$  als auch die Reaktionskraft  $R$  durch die Kraft  $W$  ausdrücken mit

$$N = \frac{W}{2\cos\theta} \text{ und } R = W\tan\theta. \quad (3.31)$$

Wegen der angenommenen Verschiebungskompatibilität in  $x_2$ -Richtung verursacht die Reaktionskraft  $R$  auch im Füllmaterial eine Verschiebung  $u_{2,\max}^I$  an der Ober- und Unterseite. Unter Berücksichtigung der inhomogenen Spannungsverteilung, des veränderlichen Querschnitts und der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ermittelt Abd El-Sayed (1976) diese durch Integration der Stauchung des Füllmaterials  $\epsilon_2^I$  über die halbe Zellbreite  $W_c$  wie folgt.

$$u_{2,\max}^I = \epsilon_2^I \frac{W_c}{2} = \int_0^{l\sin\theta} \frac{R dx_2'}{E_f A'} = \frac{R}{2E_f H_c} \int_0^{l\sin\theta} \frac{dx_2'}{h + x_2' \cot\theta} = \frac{W\tan^2\theta}{2E_f H_c} \ln\left(1 + \frac{l}{h} \cos\theta\right) \quad (3.32)$$

mit: Halbe Zellbreite als obere Integrationsgrenze  $W_c/2 = l\sin\theta$   
 Veränderliche Spannung im Füllmaterial  $\sigma_2 = R/A'$   
 Veränderlicher Füllmaterialquerschnitt in  $x_2$ -Richtung  $A' = H_c(2h + 2x_2' \cot\theta)$

Die Längenänderung der geneigten Wand  $u_1^I$  ergibt sich aus der Normalkraft und der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Wabenwand entsprechend Gleichung (3.33).



$$u_l^I = \frac{Nl}{EA_{cw}} = \frac{Wl}{2E_{cw}\cos\theta tH_c} \quad (3.33)$$

Zur Bestimmung der maßgebenden Verschiebung  $u_{1,max}^I$  wird von Abd El-Sayed (1976) ein Zusammenhang zwischen der Längenänderung der geneigten Wand und der Änderung der Wabengeometrie aufgestellt. Unter Annahme kleiner Verzerrungen ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} (l + u_l^I)^2 &= (l\cos\theta + u_{1,max}^I)^2 + (l\sin\theta - u_{2,max}^I)^2 \\ \Leftrightarrow u_l^I &= u_{1,max}^I\cos\theta - u_{2,max}^I\sin\theta \Leftrightarrow u_{1,max}^I = \frac{u_l^I}{\cos\theta} + u_{2,max}^I\tan\theta. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entsprechend der in Kapitel 3.4.1 beschriebenen Vorgehensweise folgt durch Einsetzen der vorstehenden Gleichungen und den Bezug der Verschiebung  $u_{1,max}^I$  sowie der Kraft  $W$  auf die zugehörigen Abmessungen der Wabe dann der äquivalente Elastizitätsmodul  $E_1^*$  zu

$$E_1^* = \frac{\frac{W}{2l\sin\theta H_c}}{\frac{u_1^I}{(2h + l\cos\theta)}} = \frac{1}{\frac{l}{E_{cw}\cos^2\theta t} + \frac{\tan^3\theta}{E_f}\ln\left(1 + \frac{l}{h}\cos\theta\right)} \frac{2h + l\cos\theta}{l\sin\theta}. \quad (3.35)$$

Eine vergleichbare Ableitung für den äquivalenten Elastizitätsmodul  $E_2^*$  im Fall einer Ablösung der horizontalen Wabenwände von dem Füllmaterial kann Abd El-Sayed (1976) nicht entnommen werden. Vielmehr geht dieser davon aus, dass infolge der Wandablösung die äußeren Kräfte vollständig in die geneigten Wände umgelagert werden und hieraus ein Versagen der herstellungsbedingten Verbindungsstelle zwischen den horizontalen Wänden mit doppelter Wanddicke eintritt. Eine Ableitung von Bestimmungsgleichungen zu äquivalenten Querdehnzahlen oder einem äquivalenten Schubmodul für befüllte Waben können der Veröffentlichung ebenfalls nicht entnommen werden.

Das in Abbildung 3.11a dargestellte RVE steht im Widerspruch zu der Definition eines RVE nach Kapitel 3.3. Durch die Vernachlässigung des außerhalb der Wabe liegenden Füllmaterials lässt sich die vollständige periodische Struktur des befüllten Wabenkerns nicht durch Translation oder Rotation abbilden. Weiterhin wird hierdurch der Einfluss der Spannungen  $\sigma_2$  im außerhalb der Wabe liegenden Füllmaterial auf die Verschiebung  $u_{2,max}^I$  vernachlässigt, worin auch die in Abbildung 3.12a dargestellte inhomogene  $\sigma_2$ -Spannungsverteilung begründet liegt.

Abschließend wird noch darauf hingewiesen, dass der Ansatz von Abd El-Sayed (1976) keine allgemein gültige Lösung für beliebige Werte der Wandsteifigkeit  $EA_{cw}$  und Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  abbildet. Vielmehr setzt dieser eine Wirkung des Füllmaterials wie hier beschrieben voraus. Somit besitzt der äquivalente Elastizitätsmodul  $E_1^*$  nach Gleichung (3.35) ausschließlich für die in Abbildung 3.11a dargestellte Situation jedoch nicht für den allgemeinen Fall befüllter Wabenkerne Gültigkeit.

### 3.5 Übertragbarkeit und allgemeine Vorgehensweise

Die periodische Zellstruktur von Geozellen und Wabenkernen ist vergleichbar. Demnach weisen auch Geozellen mit einer entsprechenden Orientierung des Koordinatensystems ein orthotropes Materialverhalten auf. Wie bei Wabenkernen kann die diskrete Zellstruktur durch ein homogenes Material mit äquivalenten Materialkennwerten abgebildet werden.

Eine direkte Übertragbarkeit der für Wabenkerne abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerte auf das Verbundmaterial Geozelle-Boden ist jedoch nicht möglich. Der überwiegende Anteil der Literatur zur Homogenisierung von diskreten Wabenstrukturen bezieht sich auf unbefüllte Wabenkerne, womit der Einfluss des Füllmaterials unberücksichtigt bleibt. Der von Abd El-Sayed (1976) beschriebene Ansatz zu befüllten Waben bezieht sich ausschließlich auf den äquivalenten Zugmodul  $E^*_1$ . Weitergehende analytische Ansätze zur Bestimmung äquivalenter Materialkennwerte von befüllten Wabenkernen mit einer diskreten Betrachtung der Wabenstruktur und des Füllmaterials können der Literatur nicht entnommen werden.

Auch wenn eine direkte Anwendung der zuvor beschriebenen Ansätze nicht möglich ist, verdeutlicht die vorgestellte Herleitung das grundsätzliche Vorgehen zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte von periodischen Zellstrukturen. Die Vorgehensweise lässt sich zusammenfassend in folgende Schritte unterteilen.

- 1) Abbildung der Zellwände über das mechanische Modell eines Balkens oder einer Platte
- 2) Getrennte Aufbringung von verschiedenen Grundzuständen der äußeren Belastung
- 3) Ermittlung der Wandverschiebungen unter ausschließlicher Wirkung der äußeren Belastung des jeweiligen Grundzustandes
- 4) Bezug der Verschiebungen und der äußeren Belastung auf die Geometrie des betrachteten RVE zur Bestimmung der zugehörigen mittleren Verzerrungen und Spannungen
- 5) Wahl einer geeigneten Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das homogene Material
- 6) Ableitung der äquivalenten Materialkennwerte unter Voraussetzung einer Äquivalenz der mittleren Verzerrungen und Spannungen des diskreten und homogenen Verbundmaterials

Die in Kapitel 3.4 vorgestellte Vorgehensweise bezieht sich ausschließlich auf die äquivalenten Materialkennwerte in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene. Eine Betrachtung der äquivalenten Materialkennwerte in  $x_3$ -Richtung ist nicht Bestandteil dieser Arbeit, wäre jedoch zur vollständigen Beschreibung des homogenisierten Materialverhaltens des Verbundmaterials Geozellen-Boden notwendig. Bei Anwendung der äquivalenten Materialkennwerte auf bestimmte mechanische Modelle ist die Angabe dieser Materialkennwerte aber ausreichend. Für eine Herleitung der äquivalenten Materialkennwerten  $G_{23}$ ,  $G_{13}$ ,  $\nu_{13}$  und  $\nu_{23}$  bei einheitlicher Wanddicke und bei Wabenkernen mit doppelter Wanddicke der horizontalen Wände wird an dieser Stelle auf entsprechende Fachliteratur wie Gibson & Ashby (1999) oder Malek & Gibson (2015) verwiesen. Hierbei werden nur unbefüllte Wabenkerne betrachtet.

## 4 Flächenbasierte Homogenisierung von Geozellen

### 4.1 Randbedingungen für die analytische Lösung

Das in Kapitel 3 vorgestellte flächenbasierte Homogenisierungsverfahren zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte von periodischen Zellstrukturen genügt gewissen allgemeinen Randbedingungen. Diese gelten in gleicher Weise auch für eine Homogenisierung des Verbundmaterial Geozelle-Boden. Zur Verdeutlichung sind nachfolgend die allgemeinen Randbedingungen sowie die für eine Homogenisierung relevanten Eigenschaften des Verbundmaterials aufgelistet.

- 1) Das befüllte Geozellensystem ist ausreichend groß und erstreckt sich ausreichend weit in der Aufspannebene ( $x_1$ - $x_2$ -Ebene). Das RVE repräsentiert somit das Verhalten des befüllten Geozellensystems.
- 2) Die Richtungen der Koordinatenachsen entsprechen der Längs-, Breiten- und Höhenrichtung der Geozellen.
- 3) Die Richtung der minimalen und maximalen Hauptspannungen und Hauptdehnungen im Füllmaterial stimmt für die Grundzustände I und II mit der  $x_1$ - und  $x_2$ -Achse überein.
- 4) Es liegen schlanke Zellwände mit  $t/l \ll 1$  vor, womit die Wände der Geozellen über das mechanische Modell eines Balkens oder Plattenstreifens abgebildet werden können.
- 5) Die geometrische Form der Geozelle lässt sich in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene als Hexagon mit geraden horizontalen und geneigten Zellwänden beschreiben (s. Abb. 2.5). Gekrümmte Wandbereiche, beispielsweise hin zu den Verbindungsstellen, liegen nicht vor.
- 6) Aufgrund der fehlenden Zugfestigkeit sind Zugspannungen im Füllmaterial unzulässig. Infolgedessen weist das Verbundmaterial ein abweichendes Materialverhalten bei äußerer Druck- oder Zugbelastung auf. Gemäß Abbildung 2.17 ergeben sich somit unterschiedliche äquivalente Materialkennwerte bei einer Druck- und Zugbelastung des Verbundmaterials Geozelle-Boden.

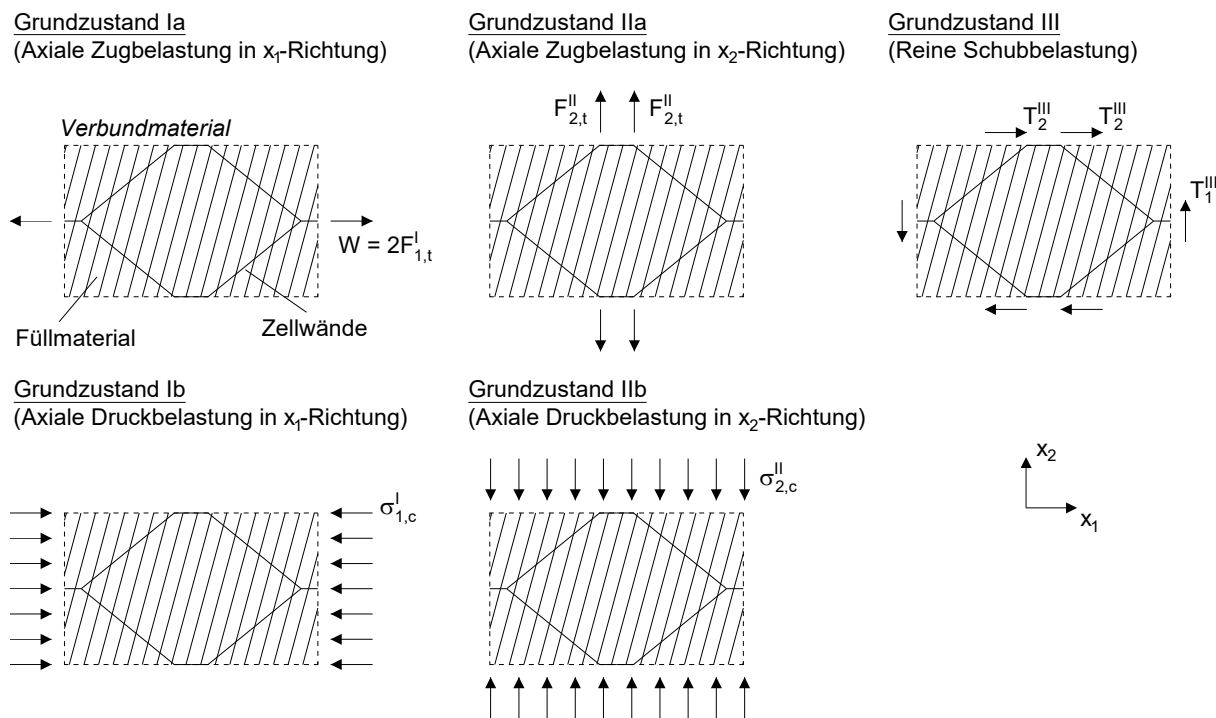
Weiterhin sind für eine möglichst einfache analytische Beschreibung des Verbundmaterials, bedingt durch das komplexe Materialverhalten der Einzelkomponenten sowie der komplexen Interaktion zwischen diesen, weitergehende Annahmen notwendig. Auch das in Kapitel 3.4 beschriebene Vorgehen zu Wabenstrukturen ist mit idealisierten Betrachtungen verbunden. Diese sowie die zusätzlich getroffenen Annahmen werden nachstehend zusammengefasst.

- 1) Die verschiedenen Grundzustände der äußeren Belastung umfassen ausschließlich monotone Einwirkungen.
- 2) Das befüllte Zellensystem wird isoliert von dem umgebenden Boden betrachtet. Zusätzliche Einflüsse auf die Verformung der Geozellen aus beispielsweise Scher- oder Normalspannungen an der Ober- und Unterseite des Verbundmaterials treten nicht auf.

- 3) Der Höheneinfluss der Zellenwände beschränkt sich nur auf das Flächenträgheitsmoment. Für die Zellwände und das Füllmaterial ist der Einfluss aus der  $x_3$ -Richtung unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes ESZ oder ebenen Verzerrungszustandes EVZ mit Querdehnnzahlen von  $v_{cw} = v_f = 0$  im ersten Ansatz irrelevant.
- 4) Das Füllmaterial und die Zellenwände sind im unverformten Ausgangszustand spannungsfrei. Eine Vorspannung der Zellwände durch Verdichtung sowie der Einfluss aus Bodeneigengewicht werden vernachlässigt.
- 5) Mögliche Effekte aus einer geometrischen Nichtlinearität bei großen Verformungen werden vernachlässigt.
- 6) Das Materialverhalten der Zellwände wird als homogen, isotrop und linear elastisch angenommen. Viskose Effekte bleiben somit unberücksichtigt.
- 7) Das Materialverhalten des Füllmaterials wird im Druckspannungsbereich vereinfacht als isotrop und linear elastisch angenommen. Eine Plastifizierung wird hierbei ausgeschlossen. (Anm.: Die Annahme lässt sich durch die Verdichtung des Füllmaterials beim Einbau zumindest teilweise rechtfertigen. Wird die Verdichtung als Erstbelastung interpretiert, stellt der jeweilige Grundzustand der Belastung eine Wiederbelastung dar. Ist die Wiederbelastung geringer als die Erstbelastung, kann üblicherweise von einem linear elastischen Materialverhalten ausgegangen werden.)
- 8) Es wird von einem „perfekten“ Verbund zwischen den Zellwänden und dem Füllmaterial ausgegangen. Dementsprechend wird die Interaktion am Übergang Zellwand-Boden nicht gesondert berücksichtigt und es treten dort keine Relativverschiebungen auf. (Anm.: Zur Begründung dieser Annahme wird auf die Versuchsergebnisse von Rahmenscherversuche zu den Verbundbeiwerten der Reibung  $\lambda$  zwischen Zellstreifen und Füllmaterial von Emersleben (2010) und Mahdi Biabani (2015) hingewiesen. In allen von Mahdi Biabani (2015) durchgeführten Versuchen mit Schotter und Zellenstreifen aus PE-HD wurden Verbundbeiwerte von  $\lambda > 1$  festgestellt. Auch Emersleben (2010) leitete aus den Versuchen mit Grobsand sowohl für Zellstreifen aus PE-HD als auch Vliesstoff Werte von  $\lambda > 0,96$  ab. Für Kiessand ergaben sich Werte von  $\lambda \geq 0,90$  bzw.  $\lambda \geq 0,98$  und für runden Kies Werte von  $\lambda \geq 0,80$  bzw.  $\lambda \geq 0,91$  für die Streifen aus PE-HD bzw. Vliesstoff. Somit stellt zumindest für die Verbundscherfestigkeit bei Füllmaterialien aus Schotter und Grobsand die Annahme eines perfekten Verbundes eine akzeptable Näherung dar.)

Aufgrund des abweichenden Materialverhaltens des Verbundmaterials Geozelle-Boden bei äußerer Druck- oder Zugbelastung ist eine zusätzliche Unterteilung des in Kapitel 3.4.1 definierten Grundzustandes I und II notwendig. Eine schematische Darstellung zu den betrachteten Grundzuständen zeigt Abbildung 4.1 am Beispiel einer Zelle als RVE. Im Grundzustand Ia und IIa wird wegen der nicht vorhandenen Zugfestigkeit des Füllmaterials die äußere Belastung durch an den Eckpunkten der Verbindungsstelle, d. h. horizontale Wand, angreifende

Kräfte  $W = 2F_{1,t}^I$  und  $P = 2F_{2,t}^{II}$  abgebildet. Hingegen wird im Grundzustand Ib und IIb die äußere Belastung über Spannungen  $\sigma_{1,c}^I$  und  $\sigma_{2,c}^{II}$  vorgegeben. Die äußere Belastung im Grundzustand III wird in Ermangelung einer Zugfestigkeit des Füllmaterials ebenfalls durch Kräfte  $T_{11}^{III}$  und  $T_{22}^{III}$  äquivalent einer allseitigen und konstanten Schubspannung  $\sigma_{\theta}^{III}$  aufgebracht. Wie im Grundzustand Ia und IIa greifen die Kräfte hierbei in den Endpunkten der Verbindungsstellen an. In allen Grundzuständen wird für die äußeren Belastungen eine Einhaltung der in Gleichung (3.10) definierten Äquivalenzbedingung vorausgesetzt.



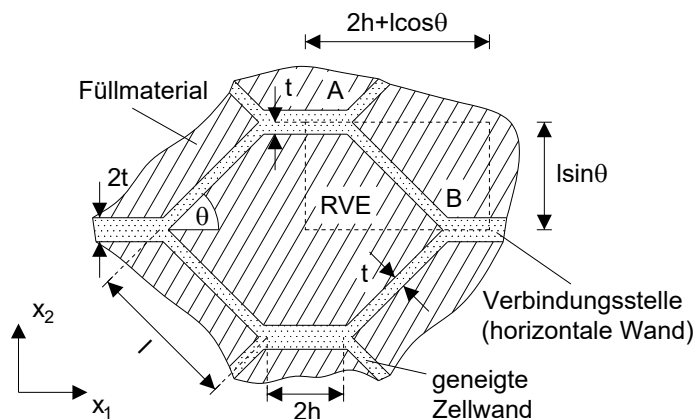
**Abb. 4.1:** Maßgebende Grundzustände der äußeren Belastung die ebene Homogenisierung des Verbundmaterials Geozelle-Boden

Nachfolgend werden für die verschiedenen Grundzustände Beispielberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt, anhand welcher die wesentlichen Zusammenhänge des Verhaltens des Verbundmaterials Geozelle-Boden beschrieben werden. Hervorgehend aus den Ergebnissen der Finite-Elemente-Berechnungen (kurz: FE-Berechnung) werden äquivalente statische Systeme für das diskrete Verbundmaterial definiert. Zur Lösung dieser statischen Systeme werden die gängigen Methoden der statisch unbestimmten Berechnung angewendet, woraus sich die maßgebenden Verschiebungen des diskreten Verbundmaterials in und quer zur Belastungsrichtung ermitteln lassen. Unter Berücksichtigung der in Kapitel 3.5 beschriebenen Vorgehensweise ergeben sich hieraus allgemeinen Bestimmungsgleichungen zu den verschiedenen äquivalenten Materialkennwerten. Durch Grenzwertbetrachtungen an den allgemeinen Bestimmungsgleichungen werden ergänzend vereinfachte Bestimmungsgleichungen für Zellwände mit einer sehr hohen Schlankheit  $t/l$  abgeleitet und die Plausibilität der allgemeinen Lösung im Hinblick auf den Übergang zu unbefüllten Zellsystemen überprüft. Abschließend werden analytische Anwendungsgrenzen zur Gültigkeit der Bestimmungsgleichungen bei Querdehnzahlen des Füllmaterials von  $\nu_f > 0$  hergeleitet.

## 4.2 Grundzustände I und II bei axialer Belastung

### 4.2.1 Verwendetes RVE in den Grundzuständen I und II

Wie in Kapitel 3.3 beschrieben kann das Verhalten des periodischen Geozellensystems an einem RVE abgebildet werden. Hierbei muss sich die vollständige befüllte Zellstruktur aus einer Translation und Rotation des RVE ergeben. Für die nachfolgende Herleitung der äquivalenten Materialkennwerte in den Grundzuständen I und II wird ein einheitliches RVE verwendet, welches die Bedingungen zur Abbildbarkeit des vollständigen Zellsystems erfüllt. Dieses ist schematisch in Abbildung 4.2 anhand des befüllten Zellsystems unter Angabe aller relevanten geometrischen Größen dargestellt.



**Abb. 4.2:** RVE für die Grundzustände I und II

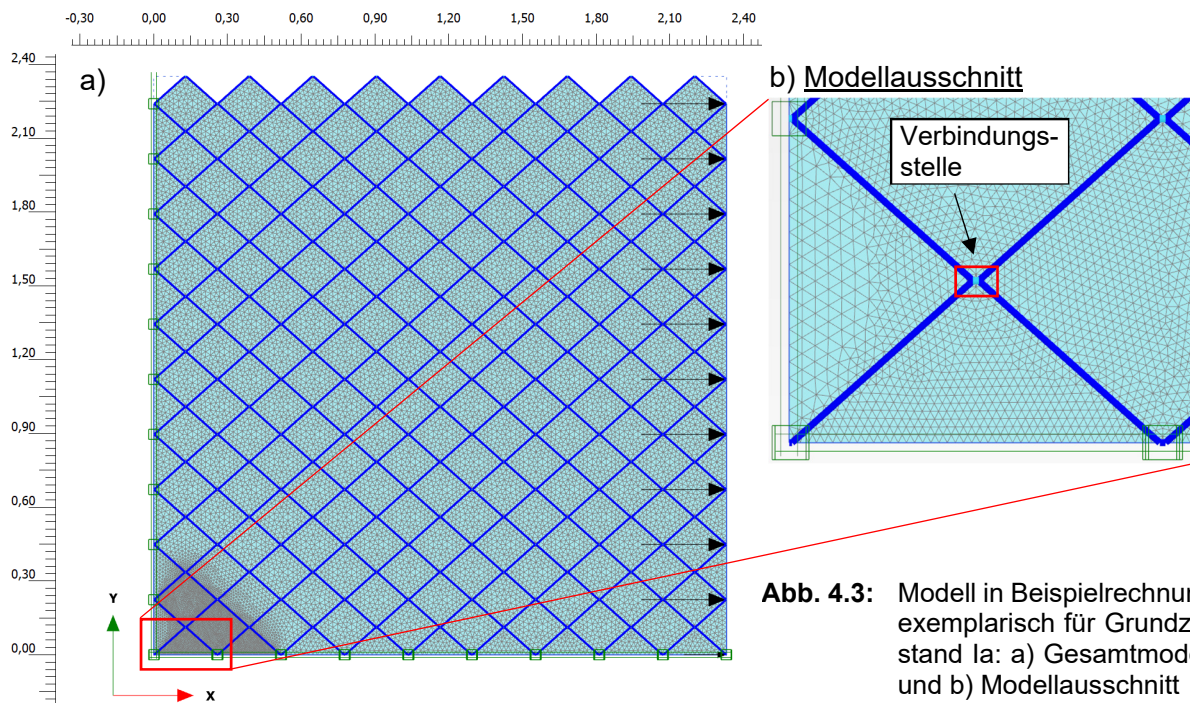
Das gewählte RVE umfasst zwei halbe Verbindungsstellen mit jeweils einer Länge  $h$  und eine geneigte Zellwand der Länge  $l$ . Im restlichen Bereich des RVE liegt das Füllmaterial vor. Bedingt durch die Periodizität der Zellstruktur weisen alle Zellwände im RVE eine Wanddicke  $t$  auf. Die Abmessung des betrachteten RVE beträgt in  $x_1$ -Richtung  $2h + l \cos \theta$  und in  $x_2$ -Richtung  $l \sin \theta$ . Zusätzlich sind in der Abbildung die Schnittpunkte der Verbindungsstellen mit der geneigten Zellwand durch die Buchstaben A und B gekennzeichnet.

### 4.2.2 Überblick zu den Finite-Elemente-Berechnungen im Grundzustand I und II

Zur Visualisierung der wesentlichen Zusammenhänge des Verbundmaterials Geozelle-Boden in den verschiedenen Grundzuständen und zur Hinführung auf die äquivalenten statischen Systeme werden nachfolgend Beispielberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt. Für die Berechnungen wird das Programm Plaxis 2D in der Version 2019 im ebenen Verzerrungszustand verwendet (Bringreve et al. 2019). Im ersten Ansatz wird der Einfluss einer Querdehnung des Füllmaterials  $v_f$  und der Zellenwände  $v_{cw}$  vernachlässigt. Eine Betrachtung des Einflusses der Querdehnzahlen erfolgt in Kapitel 4.5.

Abbildung 4.3 zeigt beispielhaft das Modell für den Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung mit dem nachfolgend betrachteten Modellausschnitt zur Darstellung der wesentlichen Zusammenhänge zum Verbundverhalten. Zur Vermeidung von Randeinflüssen auf das Verhalten des Modellausschnitts wird eine ausreichende Anzahl von neun Zellen in  $L_c$ -Richtung und 10,5

Zellen in  $W_c$ -Richtung vorgesehen. Weiterhin wird aufgrund der Symmetrie nur ein Viertel des Zellsystems betrachtet. Zur Berücksichtigung der in Kapitel 2.2.1 beschriebenen unterschiedlichen Wanddicke der Verbindungsstelle mit  $2t$  und geneigten Wände mit  $t$  werden zwei verschiedene Materialmodelle für die Zellwände verwendet (s. Abb. 4.3b).



**Abb. 4.3:** Modell in Beispielrechnung exemplarisch für Grundzustand Ia: a) Gesamtmodell und b) Modellausschnitt

Die x-Richtung im Modell entspricht hierbei der  $x_1$ -Richtung, die y-Richtung der  $x_2$ -Richtung und die z-Richtung der  $x_3$ -Richtung. Am linken und unteren Modellrand werden Verschiebungsrandbedingungen entsprechend der Achsensymmetrie definiert. Demnach sind an den beiden Modellrändern keine Knotenverschiebungen in Normalenrichtung zulässig und die Knotenverschiebungen parallel zu den Rändern sind frei. Zusätzlich wird dort eine Verdrehung der Knoten der Plattenelemente um die z-Richtung verhindert. Gemäß den in Abbildung 4.1 definierten Grundzuständen wird die äußere Last für den Grundzustand Ia über Kräfte am rechten Modellrand simuliert. Zur Berücksichtigung der Symmetrie wird am unteren Modellrand nur die Hälfte der Kraft aufgebracht. Sowohl am rechten als auch am oberen Rand werden keine Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben, womit die Knoten frei verschieblich sind. Der Einfluss der Netzfeinheit sowie die notwendige Zellenanzahl in x und y-Richtung zur Vermeidung von Randeinflüssen auf das Verhalten des Modellausschnitts wurden vorab geprüft. Im Bereich um den Modellausschnitt wurde das Finite-Elemente-Netz lokal verfeinert. Das vorliegende Modell umfasst 39.809 Kontinuumselemente und 319.663 Knoten mit einer mittleren Elementgröße von ca. 0,0172 m.

Wie in Kapitel 4.1 vorausgesetzt wurde, werden die Zellwände über Plattenelemente als fünfknotige Linienelemente mit acht Gaussintegrationspunkten und Interpolationsfunktionen 4. Ordnung für die Verschiebungen abgebildet. Die Gaussintegrationspunkte sind hierbei paarweise zur Mittelachse über die Dicke des Plattenelements angeordnet. Als Freiheitsgrade

liegen die Verschiebungen in x- und y-Richtung sowie die Verdrehung um die z-Achse in jedem Knoten vor. Die Implementierung der Plattenelemente basiert auf der Mindlin'schen Theorie. Folglich werden sowohl Biegeverformungen als auch Schub- und Axialverformungen berücksichtigt. Die Plattenelemente besitzen im Modell keine geometrische Dicke. Die Wanddicke wird ausschließlich über die vorgegebenen Materialkennwerte bei Integration auf Elementebene berücksichtigt. Zur Diskretisierung des Kontinuums werden 15-knotige isoparametrische Flächenelemente mit 12 Gaussintegrationspunkten und Interpolationsfunktionen 4. Ordnung für die Verschiebungen verwendet. Die Freiheitsgrade stellen die Knotenverschiebung in x- und y-Richtung dar.

Für die geometrischen Größen und die Materialkennwerte der Geozellen in den Beispielberechnungen werden exemplarische Werte in Anlehnung an die in Kapitel 2.2 angegebenen Wertebereiche gängiger Geozellenprodukte verwendet. Tabelle 4.1 zeigt eine Übersicht zu den verwendeten Eingangsgrößen der Zellwände und des Füllmaterials.

**Tab. 4.1:** Kennwerte zur Beispielrechnung mit der Finite-Elemente-Methode

Geometrische Kennwerte der Geozellen					
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$
0,259 m	0,224 m	0,002 m	0,1682 m	0,0017 m	41,75°
Steifigkeiten der Zellwände bei <u>einfacher</u> Wanddicke					
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$El_{cw}$	$GA_{cw}$		
150 MN/m <sup>2</sup>	255 kN/m	6,141E-5 kNm <sup>2</sup> /m	106,25 kN/m		
Steifigkeiten der Zellwände bei <u>doppelter</u> Wanddicke					
$E_{cw}$	$EA_{2cw}$	$El_{2cw}$	$GA_{2cw}$		
150 MN/m <sup>2</sup>	510 kN/m	4,913E-2 kNm <sup>2</sup> /m	212,5 kN/m		
Materialkennwerte des Füllmaterials					
$E_f$	$\nu_f$	$c'$	$\varphi'$	$\psi'$	$\sigma'_t$
30 MN/m <sup>2</sup>	0	300 kN/m <sup>2</sup>	30°	0°	0 kN/m <sup>2</sup>

Die Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  und Biegesteifigkeit  $El_{cw}$  folgen unter Voraussetzung eines rechteckigen Querschnittes der Zellwände in Verbindung mit den geometrischen Kennwerten gemäß Tabelle 4.1. Das Flächenmoment zweiten Grades der geneigten und horizontalen Wände mit einfacher und doppelter Wanddicke ist hierbei wie folgt definiert.

$$I_{cw} = \frac{H_c t^3}{12} \text{ und } I_{2cw} = \frac{H_c (2t)^3}{12} \quad (4.1)$$

Wegen der Modellierung im EVZ beziehen sich alle Wandsteifigkeiten auf den laufenden Meter. Demzufolge ist für die Flächenträgheitsmomente gemäß Gleichung (4.1) eine Zellwandhöhe von  $H_c = 1$  m einzusetzen. Die Schubsteifigkeit  $GA_{cw}$  wird vom Programm direkt aus der Dehnsteifigkeit unter Berücksichtigung eines Schubkorrekturfaktors  $\kappa$  berechnet. Hierzu wird die Definition entsprechend Gleichung (4.2) für ein isotropes, linear elastisches Materialverhalten in Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls  $E_{cw}$  und der Querdehnzahl  $\nu_{cw}$  verwendet.



$$GA_{cw} = \frac{E_{cw}}{2(1 + \nu_{cw})} \kappa A_{cw} = \frac{5EA_{cw}}{12(1 + \nu_{cw})} \quad (4.2)$$

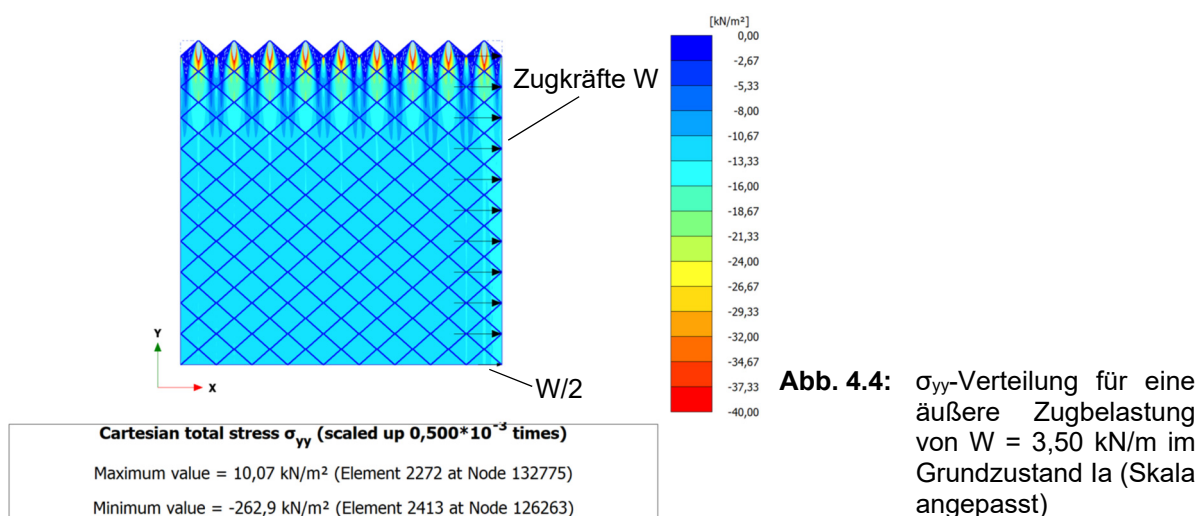
mit: Schubkorrekturfaktor für rechteckigen Querschnitt  $\kappa = 5/6$

In Übereinstimmung mit den in Kapitel 4.1 definierten Vorgaben wird für das Füllmaterial von einer vernachlässigbaren Zugfestigkeit und von einem isotropen linear elastischen Materialverhalten im Druckspannungsbereich ausgegangen. Zur Berücksichtigung der beiden Materialeigenschaften wird ein isotropes linear elastisches, ideal plastisches Stoffmodell mit einer nicht-assozierten Fließregel für das Füllmaterial verwendet. Die Fließbedingung ist bei diesem Stoffmodell im Druckspannungsbereich über das Festigkeitskriterium von Mohr-Coulomb formuliert. Aufgrund der ausschließlichen Betrachtung eines linear elastischen Verhaltens des Füllmaterials im Druckbereich wird zur Vermeidung einer Plastifizierung die Kohäsion mit  $c' = 300 \text{ kN/m}^2$  sehr hoch gewählt. Zur zusätzlichen Vermeidung von Zugspannungen im Füllmaterial wird für die Zugfestigkeit ein Wert von  $\sigma'_t = 0 \text{ kN/m}^2$  vorgegeben. Weiterhin wird eine Dilatanz des Füllmaterials mit  $\psi' = 0^\circ$  vernachlässigt.

### 4.2.3 Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung

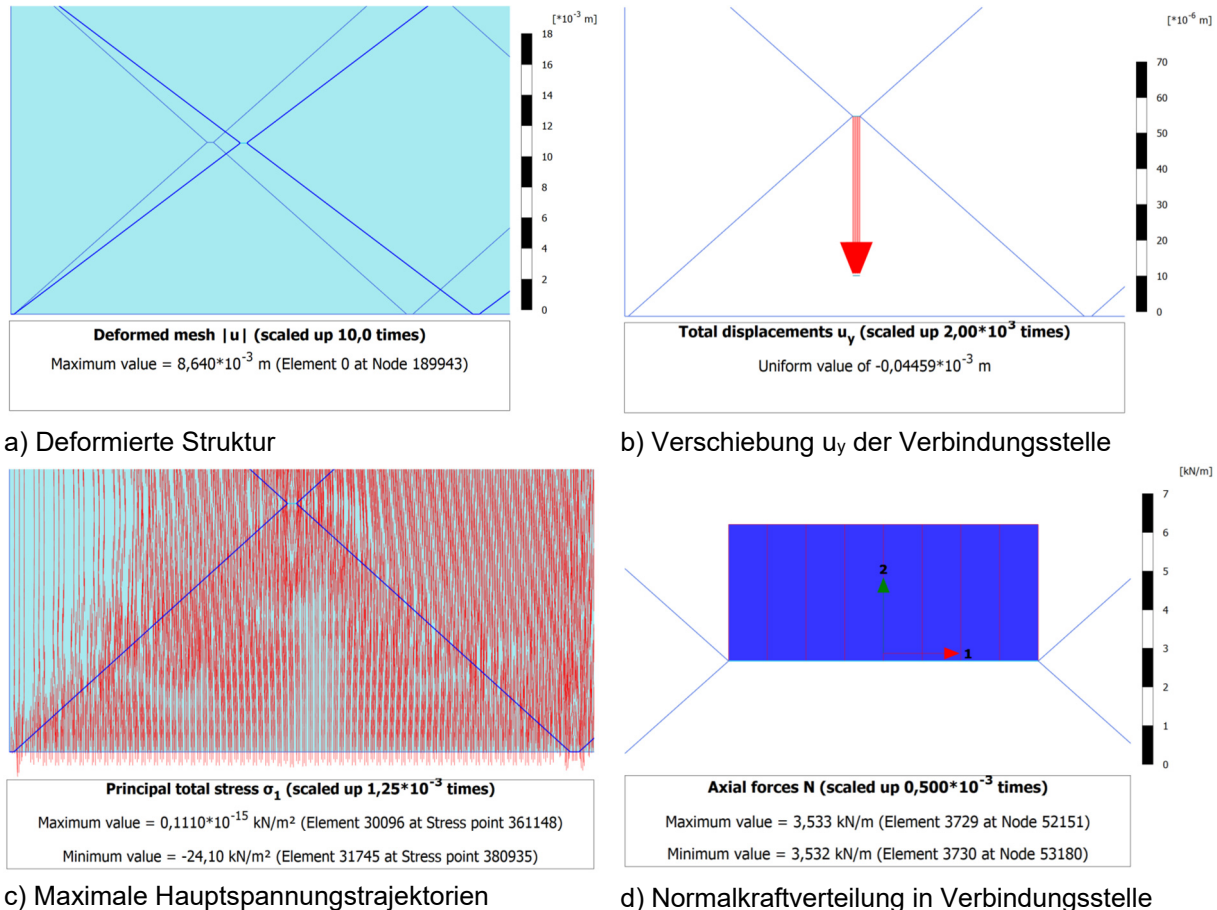
#### 4.2.3.1 Äquivalentes statisches System im Grundzustand Ia

Unter Berücksichtigung der Definition der äußeren Belastung im Grundzustand Ia gemäß Kapitel 4.1 zeigt Abbildung 4.4 die  $\sigma_{yy}$ -Verteilung des Berechnungsbeispiels für eine äußere Belastung von  $W = 2F_{1,t} = 3,5 \text{ kN/m}$ . Die äußere Last bezieht sich hierbei auf die Kraft pro Zellenstreifen in  $y$ -Richtung. Aus der Abbildung wird deutlich, dass die äußere Belastung in  $x$ -Richtung eine Reaktion des Füllmaterials in  $y$ -Richtung hervorruft. Am oberen freien Modellrand treten Spannungskonzentrationen auf. Dieser Bereich erstreckt sich über etwa zwei Zellenstreifen, sodass sich mit zunehmendem Abstand von dem oberen Rand eine weitestgehend homogene Spannungsverteilung einstellt.



Im Hinblick auf die Ableitung eines äquivalenten statischen Systems zur Ermittlung der maßgebenden Verschiebungen und hieraus der äquivalenten Materialkennwerte zeigt Abbildung 4.5

ausgewählte Ergebnisse an dem in Abbildung 4.3 definierten Modellausschnitt. Die tatsächlichen Zahlenwerte sind hierbei irrelevant, da aufgrund der rein linear elastischen Betrachtung des Füllmaterials und der Zellwände ein linearer Zusammenhang zwischen den Kräften bzw. Spannungen und Verschiebungen bzw. Verzerrungen besteht.



**Abb. 4.5:** Ausgewählte Simulationsergebnisse am Modellausschnitt für den Grundzustand Ia

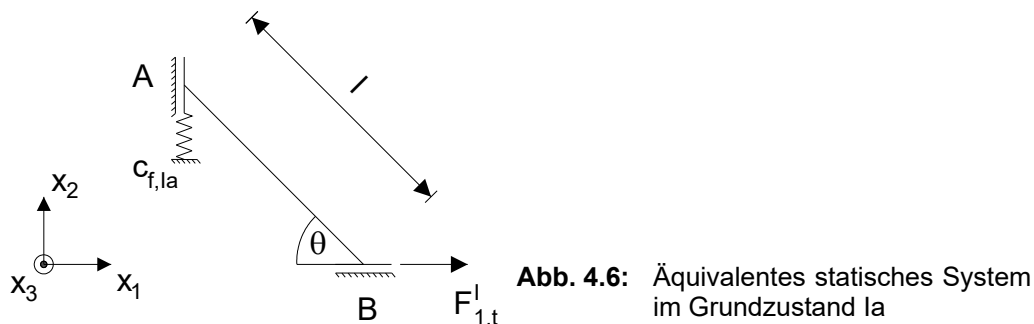
Wie anhand des deformierten Modellausschnitts aus Abbildung 4.5a ersichtlich wird, findet infolge der hier gewählten verhältnismäßig hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  verglichen zu den Wandsteifigkeiten vornehmlich eine Verschiebung der Zellwände in x-Richtung statt. Die geneigten Wände bleiben hierbei nahezu eben. Lediglich in den Eckbereichen am Übergang zu den Verbindungsstellen tritt eine geringe Krümmung der Wandachse auf. Diese ist auf den lokal begrenzten Einfluss der Biegesteifigkeit der Zellwände und eine damit einhergehende Verminderung der Querschnittsverdrehung der Wände hin zu den Eckbereichen zurückzuführen. Aus der in Abbildung 4.5b dargestellten Verschiebung  $u_y$  wird zusätzlich deutlich, dass sich die Verbindungsstelle im Modellausschnitt einheitlich in y-Richtung verschiebt und dort keine Krümmung der Wandachse auftritt.

Die Darstellung zur maximalen Hauptspannungsrichtung gemäß Abbildung 4.5c zeigt eine vornehmliche Orientierung der maximalen Hauptspannung  $\sigma_1$  in y-Richtung, sodass diese den Spannung  $\sigma_{yy}$  entsprechen. Infolge des zuvor beschriebenen lokalen Einflusses der Biegesteifigkeit treten in den Eckbereichen der Zellwände Spannungskonzentrationen auf. Diese sind

jedoch lokal auf den Bereich um die Verbindungsstelle begrenzt, weshalb, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, eine nahezu homogene Verteilung für  $\sigma_{yy}$  bzw.  $\sigma_1$  im Bereich des Modellausschnitts vorliegt. Dementgegen fällt die Richtung der minimalen Hauptspannung  $\sigma_3$  mit der x-Richtung zusammen. Infolge der nicht vorhandenen Zugfestigkeit des Füllmaterials treten für die Hauptspannung  $\sigma_3$  nur vernachlässigbar geringe Werte auf. Vergleichbare Zusammenhänge lassen sich auch für die zugehörigen Dehnungen im Füllmaterial feststellen. Grafische Darstellungen zu der minimalen Hauptspannung, den Dehnungen sowie weiteren relevanten Berechnungsergebnissen können Anhang B.1 entnommen.

Wie aus der Normalkraftverteilung von Abbildung 4.5d deutlich wird, weist die Normalkraft mit ca. 3,53 kN/m infolge des horizontalen Kräftegleichgewichts einen konstanten Wert vergleichbar zu der äußeren Belastung mit  $W = 3,5$  kN/m auf. Die Querkräfte und Biegemoment sind wegen der einheitlichen Verschiebung  $u_y$  der Verbindungsstelle hingegen minimal (s. Anhang B.1). Ein Vergleich der Schnittgrößen der Zellwände und der in Kapitel 3.4.2.1 beschriebenen Wabenwände zeigt, dass sich in beiden Fällen vergleichbare Zusammenhänge ergeben. Auch bei Wabenstrukturen treten für den Grundzustand I keine Querkräfte und Biegemomente in den Verbindungsstellen auf. Folglich besitzen die aus der Periodizität folgenden Eigenschaften auch bei befüllten Geozellen Gültigkeit.

Mit dem in Kapitel 4.2.1 definierten RVE führt ein Übertrag des in der Beispielberechnung festgestellten Verhaltens auf das in Abbildung 4.6 dargestellte äquivalente statische System. Aus Gründen der Symmetrie greift an dem System die äußere Kraft  $W/2 = F_{1,t}^I$  im Punkt B an. Da die Verbindungsstelle eine einheitliche Verschiebung  $u_y$  aufweist und aus dieser wegen der ausschließlichen Wirkung von Normalkräften nur Axialverschiebungen resultieren, lassen sich die Verbindungsstellen und die geneigte Zellwand getrennt voneinander betrachten. Folglich umfasst das System nur die geneigte Zellwand. Die resultierende Verschiebung am Rand des RVE folgt anschließend aus der Superposition der beiden Verschiebungsanteile aus der Verbindungsstelle und der geneigten Wand.



**Abb. 4.6:** Äquivalentes statisches System im Grundzustand Ia

Zur Abbildung der periodischen Eigenschaften der Zellstruktur und den damit einhergehenden Schnittgrößen in der geneigten Zellwand werden die beiden Auflager in den Punkten A und B als Parallelführung definiert. Infolge der einheitlichen Verschiebung  $u_y$  der Verbindungsstelle stimmt diese mit der Verschiebung im Punkt A überein, weshalb die Reaktion des Füllmaterials ausschließlich im Punkt A angesetzt werden kann. Entsprechend der zuvor beschriebenen

Simulationsergebnisse wird das Füllmaterial im Grundzustand Ia nur  $x_2$ -Richtung beansprucht, wohingegen in  $x_1$ -Richtung keine Spannungen auftreten. Hierbei stimmen die Hauptspannungsrichtungen mit den Koordinatenachsen überein, sodass die Hauptspannungen den Spannungskomponenten in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung entsprechen. Folglich kann die Füllmaterialreaktion durch eine eindimensionale Feder mit der Federkonstante  $c_{f,Ia}$  im äquivalenten statischen System berücksichtigt werden. Da für die Spannung  $\sigma_{yy}$  bzw.  $\sigma_1$  sowie die Dehnung  $\varepsilon_{yy}$  bzw.  $\varepsilon_1$  des Füllmaterials im Bereich des RVE von einer nahezu homogenen Verteilungen ausgegangen werden kann, lässt sich die Federkonstante direkt aus dem Elastizitätsmodul  $E_f$  des Füllmaterials und den Abmessungen des RVE gemäß Abbildung 4.2 wie folgt ermitteln.

$$c_{f,Ia} = \frac{E_f A_{RVE,Ia}}{L_{f,Ia}} = E_f \frac{2h + l \cos \theta}{l \sin \theta} H_c \quad (4.3)$$

mit: Querschnittsfläche des RVE in  $x_1$ -Richtung  $A_{RVE,Ia} = L_c / 2 H_c$

Federlänge  $L_{f,Ia} = W_c / 2$

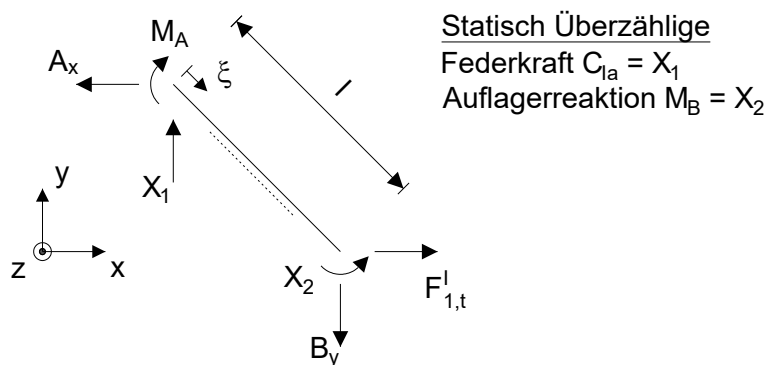
Zelllänge  $L_c = 4h + 2l \cos \theta$

Zellbreite  $W_c = 2l \sin \theta$

Bedingt durch die Spiegelsymmetrie des betrachteten RVE zur  $x_1$ -Achse entspricht die Federlänge  $L_{f,Ia}$  in der Gleichung der halben Zellbreite  $W_c/2$ . Weiterhin stimmt die maßgebende Querschnittsfläche zur Ermittlung der Federkonstanten mit der Querschnittsfläche des RVE in  $x_1$ -Richtung überein.

#### 4.2.3.2 Äquivalente Materialkennwerte im Grundzustand Ia

Bei dem äquivalenten statischen System entsprechend Abbildung 4.6 handelt es sich um ein zweifach statisch überbestimmtes System, zu dessen Lösung das bereits in Kapitel 3.4.2.3 beschriebene Prinzip der virtuellen Kräfte (PvK) verwendet werden kann. Eine schematische Darstellung zu den Auflagerreaktionen zeigt Abbildung 4.7.



**Abb. 4.7:** Auflagerreaktionen im Grundzustand Ia

Die Federkraft  $C_{Ia}$  und die Auflagerreaktion  $M_B$  werden hierbei als statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$  gewählt, wobei die Federkraft der Reaktionskraft des Füllmaterials entspricht. Aufgrund der anschaulicheren Indizierung werden anstelle der Koordinatenbezeichnung  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  für die statische Berechnung die Koordinaten mit  $x = x_1$ ,  $y = x_2$  und  $z = x_3$  verwendet. Als positive Richtung der Schnittgrößen wird die in der Technischen Mechanik gängige Definition bezogen auf die in der Abbildung dargestellte gestrichelte Faser verwendet (Gross et al. 2002).

Eine detaillierte Beschreibung des Lösungsweges ist in Anhang B.2 dargestellt. Hier wird lediglich auf die beiden Kompatibilitätsbedingungen zur Ermittlung der statisch Überzähligen hingewiesen. Aufgrund der Parallelführung im Punkt B ist die Verdrehung des Querschnitts der Zellwand dort null. Weiterhin entspricht die Verschiebung in y-Richtung im Punkt A der Überzähligen  $X_1$  dividiert durch die Federkonstante  $c_{f,la}$ . Die Kompatibilitätsbedingungen lassen sich somit formulieren als

$$u_y^A = -\frac{X_1}{c_{f,la}} \text{ und } \psi_z^B = 0. \quad (4.4)$$

Das negative Vorzeichen resultiert hierbei aus der entgegengesetzten Richtung der Verschiebung  $u_y^A$  und der Überzähligen  $X_1$ . Aus der im Anhang B.2 beschriebenen Lösung ergibt sich die Federkraft  $C_{la}$  und damit die Resultierende der Füllmaterialreaktion wie folgt.

$$C_{la} = X_1 = -F_{1,t}^I \sin\theta \cos\theta \cdot Y_t^I \quad (4.5)$$

$$\text{mit: } Y_t^I = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}$$

Demnach wird die Reaktionskraft des Füllmaterials ausschließlich durch die Wandsteifigkeiten, die Zellgeometrie sowie die Federkonstante  $c_{f,la}$  bestimmt. Wie in Kapitel 3.4.1 angeführt ist zur Bestimmung der äquivalenten Materialkennwerte die Ermittlung der Verschiebungen  $u_x^B$  und  $u_y^A$  notwendig. Wegen der einheitlichen Verschiebung der Verbindungsstelle in  $x_2$ -Richtung entspricht die Verschiebung  $u_y^A$  direkt der resultierenden Verschiebung  $u_{2,t}^I$  am Rand des RVE. Diese ergibt sich aus der Kompatibilitätsbedingung nach Gleichung (4.4) zu

$$u_{2,t}^I = u_y^A = F_{1,t}^I \sin\theta \cos\theta \frac{Y_t^I}{c_{f,la}}. \quad (4.6)$$

Die Bestimmung von  $u_x^B$  erfolgt über die Formulierung der Formänderungsenergie  $U$  aus den Zustandslinien der resultierenden Schnittgrößen und durch anschließende Anwendung des in Kapitel 3.4.3 beschriebenen Satzes von Castigliano. Zur Ermittlung von  $U$  ist hierbei der zusätzliche Anteil der Formänderungsenergie aus der Feder zu berücksichtigen (s. Anhang B.2). Die Gleichung für die Verschiebung  $u_x^B$  der geneigten Wand lautet demnach

$$u_x^B = F_{1,t}^I l \left[ \frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} (1 - Y_t^I \sin^2\theta)^2 + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \sin^2\theta (1 + Y_t^I \cos^2\theta)^2 + \frac{Y_t^{I^2}}{c_{f,la}l} \sin^2\theta \cos^2\theta \right]. \quad (4.7)$$

Infolge der in Kapitel 4.2.3.1 beschriebenen getrennten Ermittlung der Verschiebungsanteile der geneigten Wand und der Verbindungsstelle sind auf  $u_x^B$  noch die Verschiebungen  $u_{h,t}^I$  aus der Längenänderung der Verbindungsstelle zu addieren. Diese lassen sich aus der Normalkraft  $N_h = F_{1,t}^I$  sowie der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  und Länge der Verbindungsstelle berechnen.

Unter Berücksichtigung, dass im RVE als Verbindungsstelle zwei horizontale Wände der Länge  $h$  vorliegen (s. Abb. 4.2), ergibt sich die resultierende Verschiebung  $u_{1,t}^I$  am Rand des RVE somit zu

$$u_{1,t}^I = u_x^B + 2u_{h,t}^I = u_x^B + \frac{2F_{1,t}^I h}{EA_{cw}}. \quad (4.8)$$

Die Berechnung des äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  folgt wie bereits in Kapitel 3.4 durch den Bezug der äußeren Kraft  $F_{1,t}^I$  und der Verschiebung  $u_{1,t}^I$  auf die jeweiligen Abmessungen des RVE. Eine Äquivalenz der mittleren Spannungen und Verzerrungen des diskreten und homogenen Verbundmaterials wird gemäß den in Kapitel 3.4.1 getroffenen Definitionen vorausgesetzt. Unter Berücksichtigung der Abmessungen des RVE gemäß Abbildung 4.2 können die mittleren Dehnung und Spannung in  $x_1$ -Richtung folglich berechnet werden aus

$$\bar{\varepsilon}_{1,t}^* = \bar{\varepsilon}_{1,t} = \frac{u_{1,t}^I}{2h + l \cos \theta} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{1,t}^* = \bar{\sigma}_{1,t} = \frac{F_{1,t}^I}{l \sin \theta H_c}. \quad (4.9)$$

Mit der Annahme einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung für das homogene Verbundmaterial lässt sich durch Einsetzen der Verschiebung  $u_{1,t}^I$  nach Gleichung (4.8) und der Federkonstanten  $c_{f,la}$  nach Gleichung (4.3) in Gleichung (4.9) der äquivalente Zugmodul  $E_{1,t}^*$  für den Grundzustand Ia wie folgt bestimmen.

$$E_{1,t}^* = \frac{\bar{\sigma}_{1,t}^*}{\bar{\varepsilon}_{1,t}^*} = \frac{F_{1,t}^I}{u_{1,t}^I} \frac{2h + l \cos \theta}{l \sin \theta H_c} = \frac{1}{Y_{t,l}^I + Y_{t,h}^I + Y_{t,f}^I} \frac{2h + l \cos \theta}{l^2 \sin \theta H_c} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: Anteil } Y_{t,l}^I &= \frac{\cos^2 \theta (1 - Y_t^I \sin^2 \theta)^2}{EA_{cw}} + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \sin^2 \theta (1 + Y_t^I \cos^2 \theta)^2 \\ \text{Anteil } Y_{t,h}^I &= \frac{2h}{EA_{cw} l} \\ \text{Anteil } Y_{t,f}^I &= \frac{Y_t^{I^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{c_{f,la} l} \\ Y_t^I &= \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la} l}} \quad \text{und} \quad c_{f,la} = E_f \frac{(2h + l \cos \theta) H_c}{l \sin \theta} \end{aligned}$$

Ein ergänzender Bezug der Verschiebung  $u_{2,t}^I$  auf die zugehörige Abmessung des RVE in  $x_2$ -Richtung liefert die mittlere Dehnung  $\bar{\varepsilon}_{2,t}^*$  des homogenen Verbundmaterials. Mit der Definition der Querdehnzahl nach Gleichung (3.13) und der Dehnung  $\bar{\varepsilon}_{1,t}^*$  nach Gleichung (4.6) lässt sich die äquivalente Querdehnung  $v_{12,t}^*$  im Grundzustand Ia aus folgender Bestimmungsgleichung ermitteln.

$$v_{12,t}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_{2,t}^*}{\bar{\varepsilon}_{1,t}^*} = -\frac{\frac{u_{2,t}^I}{l \sin \theta}}{\frac{u_{1,t}^I}{2h + l \cos \theta}} = -\frac{Y_{t,l}^I}{Y_{t,l}^I + Y_{t,h}^I + Y_{t,cf}^I} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{c_{f,la} l^2} \quad (4.11)$$

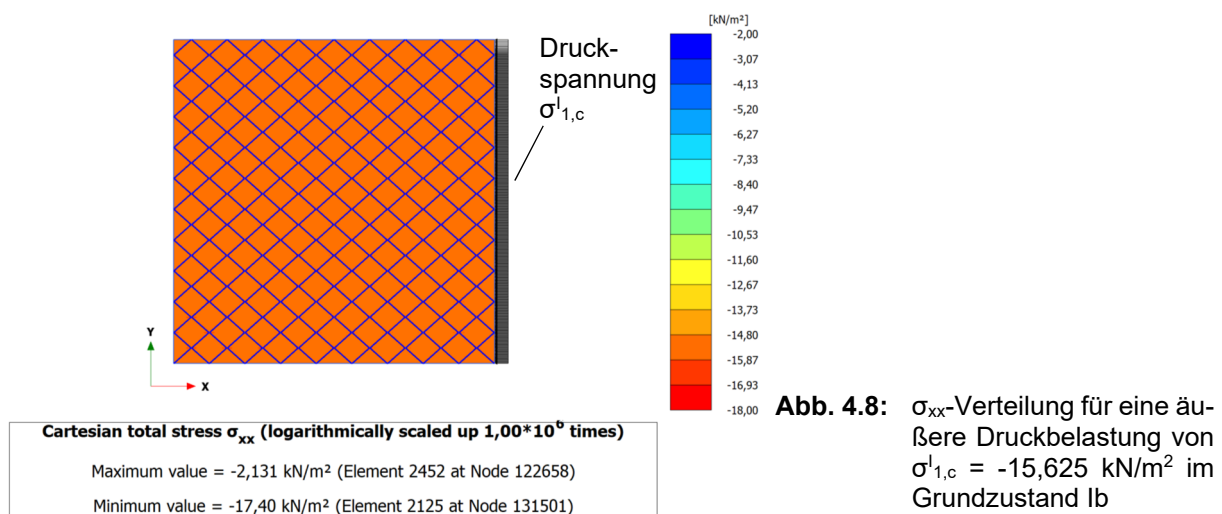
Wie bereits die Federkraft  $C_{la}$  hängen der äquivalente Zugmodul  $E_{1,t}^*$  und die äquivalente Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  ausschließlich von den Eigenschaften der Geozellen und der Federkonstante  $c_{f,la}$  ab. Zur Prüfung der abgeleiteten Gleichungen wurde der angegebene Lösungsweg in

Matlab, Version 2018a, programmiert und die hieraus folgende Lösung mit den vorstehenden Gleichungen verglichen. Das verwendete Skript findet sich in Anhang B.2 wieder.

#### 4.2.4 Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung

##### 4.2.4.1 Äquivalentes statisches System im Grundzustand Ib

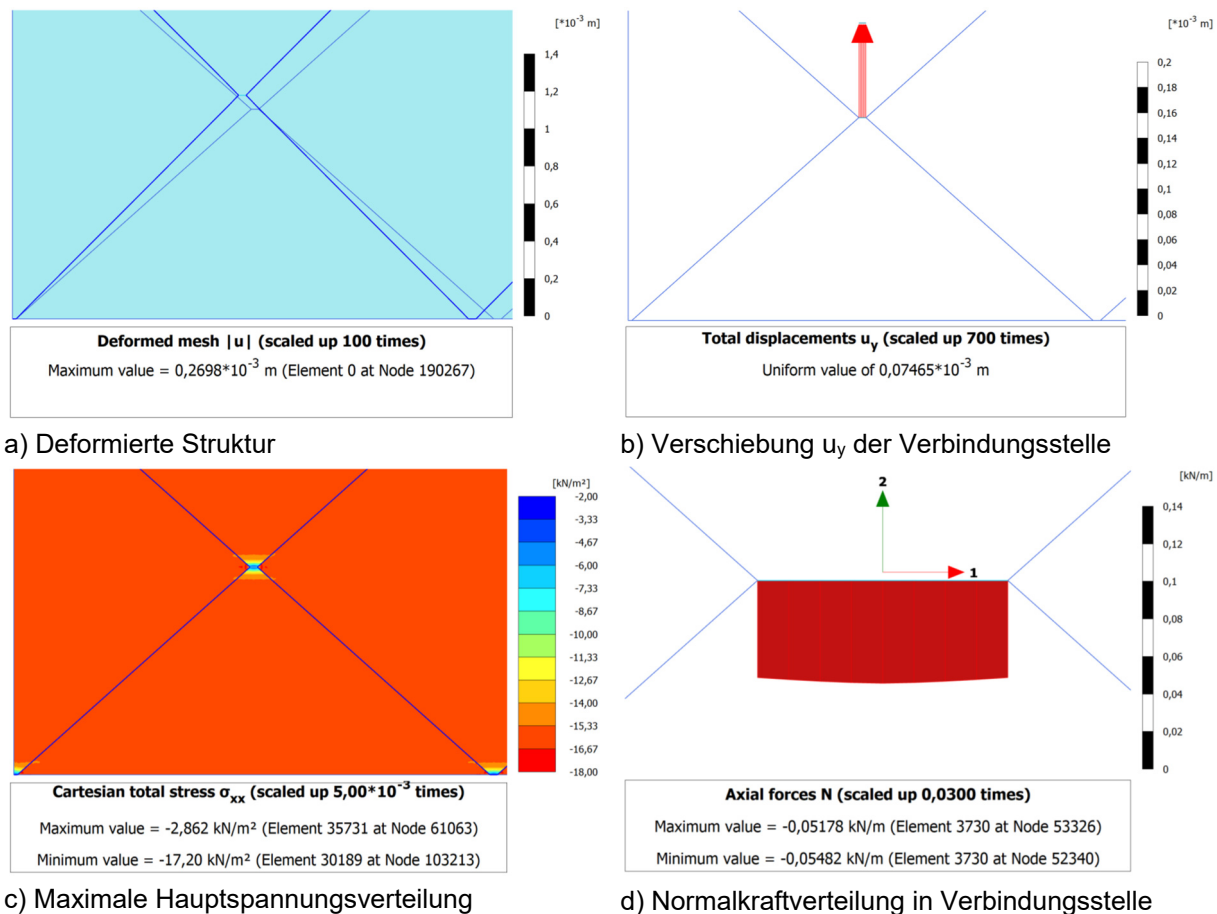
Bereits zu den Grundzuständen in Kapitel 4.1 wurde beschrieben, dass wegen des abweichenden Materialverhaltens des Verbundmaterials Geozelle-Boden auf Druck und Zug eine ergänzende Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte bei Druckbeanspruchung notwendig ist. Zur Veranschaulichung der wesentlichen Zusammenhänge und zur Ableitung des äquivalenten statischen Systems wird erneut eine Finite-Elemente-Berechnung durchgeführt. Das hierzu verwendete Modell ist weitestgehend identisch zu dem für den Grundzustand Ia. Aufgrund der gegebenen Druckfestigkeit des Füllmaterials wird hier jedoch als äußere Belastung anstelle von Kräften eine Spannung  $\sigma_{1,c}^I$  am rechten Modellrand vorgegeben. Diese wird entsprechend der in Kapitel 4.2.3.1 gewählten Kraft  $W = 3,5 \text{ kN/m}$  bezogen auf die Zellbreite  $W_c = 0,224 \text{ m}$  zu  $\sigma_{1,c}^I = -15,625 \text{ kN/m}^2$  gewählt. Wie zuvor ist auch hier die tatsächliche Größe der Belastung unerheblich, sondern dient lediglich zur Verdeutlichung des Verbundverhaltens. Eine Darstellung des Modells mit der äußeren Belastung sowie die hieraus resultierende Spannungsverteilung  $\sigma_{xx}$  ist in Abbildung 4.8 dargestellt.



Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass infolge der vorgegebenen Druckspannung als äußere Belastung eine weitestgehend homogene Verteilung der Spannung  $\sigma_{xx}$  im gesamten Modell vorliegt. Die noch im Grundzustand Ia beobachteten Spannungskonzentrationen am unbelasteten Modellrand treten nicht auf. Der Wert von  $\sigma_{xx}$  entspricht hierbei im Wesentlichen der aufgetragenen äußeren Last  $\sigma_{1,c}^I$ .

Ausgewählte Ergebnisse der Beispielberechnung zeigt Abbildung 4.9. Aus der in Abbildung 4.9a dargestellten deformierten Struktur zeigt sich, dass die Zellwände durch die Druckbelastung  $\sigma_{1,c}^I$  in negative  $x$ -Richtung und positive  $y$ -Richtung verschoben werden. Vergleichbar zu den Wandverformungen im Grundzustand Ia bleiben ebenfalls im Grundzustand Ib die

geneigten Wände weitestgehend eben. Nur in den Eckbereichen treten erneut geringe Krümmungen der Wandachse auf, welche sich auf den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit der Zellwände zurückführen lassen.



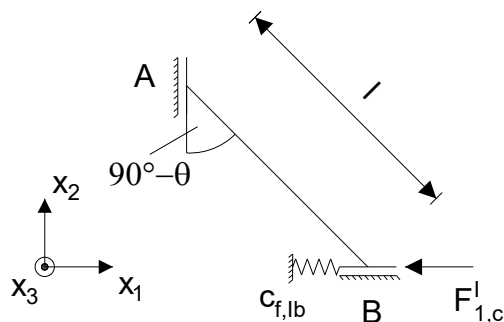
**Abb. 4.9:** Ausgewählte Simulationsergebnisse am Modellausschnitt für den Grundzustand Ib

Weiterhin liegt für die Verbindungsstelle eine einheitliche Verschiebung in y-Richtung vor (s. Abb. 4.9b), sodass diese keine Wandkrümmung erfährt. Ergänzend sind in Abbildung 4.9c die Spannung  $\sigma_{xx}$  im Modellausschnitt dargestellt. Hervorgehend aus dem Einfluss der Biegesteifigkeit in den Eckbereichen treten um die Verbindungsstellen Spannungskonzentrationen auf. Diese sind jedoch lokal begrenzt, womit von einer homogenen Verteilung für  $\sigma_{xx}$  ausgegangen werden kann. Wie im Grundzustand Ia fallen die Richtungen der minimalen und maximalen Hauptspannungen mit den Richtungen der Koordinatenachsen zusammen. Demzufolge lässt sich auch in diesem Grundzustand von einer Übereinstimmung der Hauptspannungen mit den Spannungsponenten in x- und y-Richtung ausgehen. Abweichend zum Grundzustand Ia gilt jedoch hier für die Hauptspannungen  $\sigma_1 = \sigma_{xx}$  und  $\sigma_3 = \sigma_{yy}$ . Infolge der nicht vorhandenen Zugfestigkeit des Füllmaterials weisen die minimalen Hauptspannungen  $\sigma_3$  bzw. die Spannungen  $\sigma_{yy}$  weitestgehend einen Wert von Null auf. Wie für die Hauptspannungen stimmen auch Hauptdehnungen mit den Verzerrungskomponenten in x- und y-Richtung überein und es gilt  $\varepsilon_1 = \varepsilon_{xx}$  und  $\varepsilon_3 = \varepsilon_{yy}$ . Entsprechende Abbildungen hierzu und zu weiteren wesentlichen Simulationsergebnissen lassen sich Anhang B.3 entnehmen.



Eine Betrachtung der Normalkraftverteilung von Abbildung 4.9d zeigt, dass in der Verbindungsstelle Druckkräfte von ca. 0,55 kN/m auftreten. Diese resultieren wie die zuvor beschriebene Wandkrümmungen aus dem Einfluss der Biegesteifigkeit in den Eckbereichen in Verbindung mit den lokalen Spannungskonzentrationen. Eine einfache Berücksichtigung dieser Normalkräfte in der analytischen Lösung ist wegen der Abhängigkeit von dem Steifigkeitsverhältnis des Füllmaterials zu den Wandsteifigkeiten sowie der Zellgeometrie nicht möglich. Aus diesem Grund wird nachfolgend vereinfacht auf eine Berücksichtigung der Verbindungsstellen in der analytischen Lösung verzichtet, womit die zusätzlichen Verschiebungen aus diesen in  $x_1$ -Richtung unberücksichtigt bleiben. Eine nachfolgend in Kapitel 5 durchgeführte Plausibilitätsprüfung zeigt, dass aufgrund des großen Einflusses der geneigten Zellwand der hieraus resultierende Fehler erst bei zunehmender Länge der Verbindungsstellen und gleichzeitig kleiner Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  relevant wird. Wie im Grundzustand Ia nehmen die Querkräfte und Biegemomente in der Verbindungsstelle aufgrund der Periodizität und der damit vorhandenen einheitlichen Verschiebung  $u_y$  vernachlässigbar geringe Werte an (vgl. Anhang B.3).

Unter Berücksichtigung der festgestellten Modelleigenschaften sowie des RVE gemäß Abbildung 4.2 lässt sich für den Grundzustand Ib das in Abbildung 4.10 dargestellte äquivalente statische System ableiten. Dieses umfasst aufgrund der zuvor beschriebenen Vernachlässigung der Verbindungsstelle nur die geneigte Zellwand. Mit der Äquivalenzbedingung nach Gleichung (3.10) lässt sich die äußere Belastung  $\sigma_{1,c}^I$  durch eine im Punkt B angreifende Kraft  $F_{1,c}^I$  abbilden.



**Abb. 4.10:** Äquivalentes statisches System im Grundzustand Ib

Die beiden Parallelführung an den Endpunkten A und B spiegeln wie bereits im Grundzustand Ia die Periodizität der Zellstruktur wider. Da die minimale Hauptspannung in  $x_2$ -Richtung einen Wert von Null aufweist, wird zur Abbildung des Füllmaterials erneut eine eindimensionale Feder mit der Federkonstante  $c_{f,Ib}$  verwendet. Abweichend zum Grundzustand Ia liegt die Feder hier am Punkt B an und ist entsprechend der maximalen Hauptspannungsrichtung im Füllmaterial parallel zur äußeren Belastung gerichtet. Infolge der homogenen Spannungs- und Dehnungsverteilung im Bereich des Modellausschnitts lässt sich die Federkonstante ähnlich zu Gleichung (4.3) über die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und die Abmessungen des RVE entsprechend Gleichung (4.12) ausdrücken.

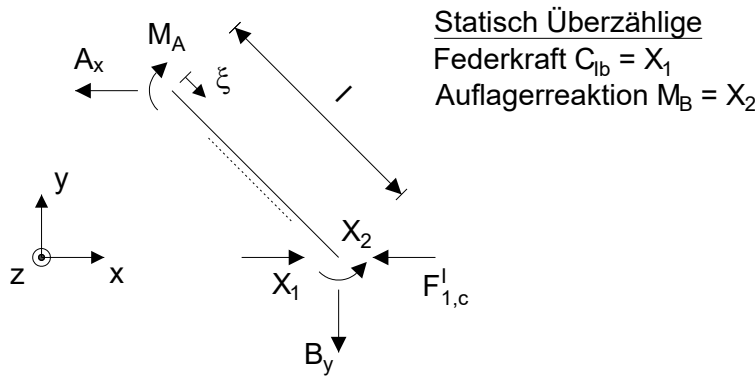
$$c_{f,lb} = \frac{E_f A_{RVE,lb}}{L_{f,lb}} = E_f \frac{l \sin \theta}{h + l \cos \theta} H_c \quad (4.12)$$

mit: Querschnittsfläche des RVE in  $x_2$ -Richtung  $A_{RVE,lb} = W_c/2 H_c$   
 Federlänge  $L_{f,lb} = L_c/2 - h$

Bei dem Ansatz der Federlänge  $L_{f,lb}$  ist zu berücksichtigen, dass sich das Füllmaterial am Punkt B nur über die Länge  $L_c/2 - h$  in  $x_1$ -Richtung erstreckt und sich die Querschnittsfläche zur Ermittlung der Federkonstanten  $c_{f,lb}$  auf die Querschnittsfläche des RVE in  $x_2$ -Richtung bezieht.

#### 4.2.4.2 Äquivalente Materialkennwerte im Grundzustand Ib

Das in Abbildung 4.10 angegebene äquivalente statische System stellt auch im Grundzustand Ib ein zweifach statisch überstimmtes System dar. Demzufolge ist die Ableitung der maßgebenden Verschiebungen am Rand des RVE über das PvK weitestgehend identisch zu der für den Grundzustand Ia. Für eine vollständige Beschreibung des Lösungswegs wird auf Anhang B.4 verwiesen. Die zum System gehörigen Auflagerreaktionen sowie die Definition der statisch Überzähligen zeigt Abbildung 4.11. Als statisch Überzählige werden die Federkraft  $C_{lb}$  und das Moment  $M_B$  im Punkt B gewählt.



**Abb. 4.11:** Auflagerreaktionen im Grundzustand Ib

In Anlehnungen an die Beschreibungen zu den Kompatibilitätsbedingungen im Grundzustand Ia lassen sich diese im Grundzustand Ib wie folgt formulieren.

$$u_x^B = -\frac{X_1}{c_{f,lb}} \text{ und } \psi_z^B = 0 \quad (4.13)$$

Für die Federkraft  $C_{lb}$  und somit die Reaktion des Füllmaterials ergibt sich hieraus im Grundzustand Ib folgende Lösung.

$$C_{lb} = X_1 = F_{1,c}^I \cdot Y_c^I \quad (4.14)$$

$$\text{mit: } Y_c^I = \frac{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,lb}l}}$$

Die Verschiebung  $u_x^B$  folgt direkt aus der Kompatibilitätsbedingung nach Gleichung (4.13). Zur Ermittlung der Verschiebung  $u_y^A$  wird der Reduktionssatz entsprechend der Definition nach Gross et al. (2011a) verwendet (s. Anhang B.4). Durch die Vernachlässigung der horizontalen

Zellwände der Verbindungsstelle stimmen die beiden Verschiebungen mit den resultierenden Verschiebungen am Rand des RVE überein und können folgendermaßen berechnet werden.

$$u_{1,c}^I = u_x^B = -\frac{F_{1,c}^I \cdot Y_c^I}{c_{f,lb}} \quad (4.15)$$

$$u_{2,c}^I = u_y^A = F_{1,c}^I l \sin \theta \cos \theta (Y_c^I - 1) \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$$

Ein Bezug der Verschiebung  $u_{1,c}^I$  und der Kraft  $F_{1,c}^I$  auf die Abmessungen des RVE liefert unter Berücksichtigung der Äquivalenzbedingungen gemäß Kapitel 3.4.1 die mittlere Dehnung und Spannung des homogenen Verbundmaterials.

$$\bar{\varepsilon}_{1,c}^* = \bar{\varepsilon}_{1,c} = \frac{u_{1,c}^I}{2h + l \cos \theta} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{1,c}^* = \bar{\sigma}_{1,c} = -\frac{F_{1,c}^I}{l \sin \theta H_c} \quad (4.16)$$

Bei der mittleren Spannung ist zu beachten, dass diese als Druckspannung ein negatives Vorzeichen aufweist.

Das Vorgehen zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte stimmt mit dem für den Grundzustand Ia überein, womit der äquivalente Druckmodul  $E_{1,c}^*$  im Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in  $x_1$ -Richtung aus folgender Bestimmungsgleichung berechnet werden kann.

$$E_{1,c}^* = \frac{\bar{\sigma}_{1,c}^*}{\bar{\varepsilon}_{1,c}^*} = -\frac{F_{1,c}^I}{u_{1,c}^I} \frac{2h + l \cos \theta}{l \sin \theta H_c} = \frac{c_{f,lb}}{Y_c^I} \frac{2h + l \cos \theta}{l \sin \theta H_c} \quad (4.17)$$

$$\text{mit: } Y_c^I = \frac{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,lb} l}} \quad \text{und} \quad c_{f,lb} = E_f \frac{l \sin \theta H_c}{h + l \cos \theta}$$

Der äquivalente Druckmodul  $E_{1,c}^*$  hängt nur von den Eigenschaften der Geozelle und mit der in Gleichung (4.12) definierten Federkonstanten  $c_{f,lb}$  von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab. Durch den zusätzlichen Bezug der resultierenden Verschiebung  $u_{2,c}^I$  auf die Abmessung des RVE in  $x_2$ -Richtung und der hieraus folgenden mittleren Dehnung  $\bar{\varepsilon}_{2,c}^*$  ergibt sich die äquivalente Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  im Grundzustand Ib aus

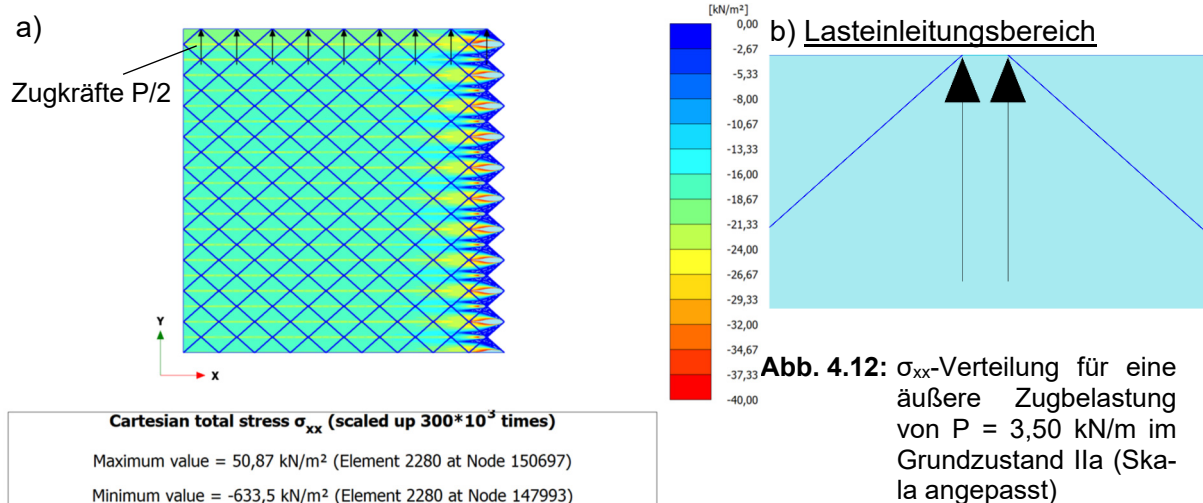
$$v_{12,c}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_{2,c}^*}{\bar{\varepsilon}_{1,c}^*} = -\frac{\frac{u_{2,c}^I}{l \sin \theta}}{\frac{u_{1,c}^I}{2h + l \cos \theta}} = -\frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l}. \quad (4.18)$$

Die Federsteifigkeit  $c_{f,lb}$  lässt sich hierbei im Zuge der Umformung aus der Gleichung eliminieren, sodass die äquivalente Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  nur von den Eigenschaften der Geozelle abhängig ist. Somit besitzt der Elastizitätsmodul  $E_f$  des Füllmaterial im Grundzustand Ib keinen Einfluss auf die äquivalente Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  des homogenen Verbundmaterials. Das zur Prüfung der Herleitung verwendete Matlab Skript findet sich in Anhang B.4 wieder.

## 4.2.5 Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung

### 4.2.5.1 Äquivalentes statisches System im Grundzustand IIa

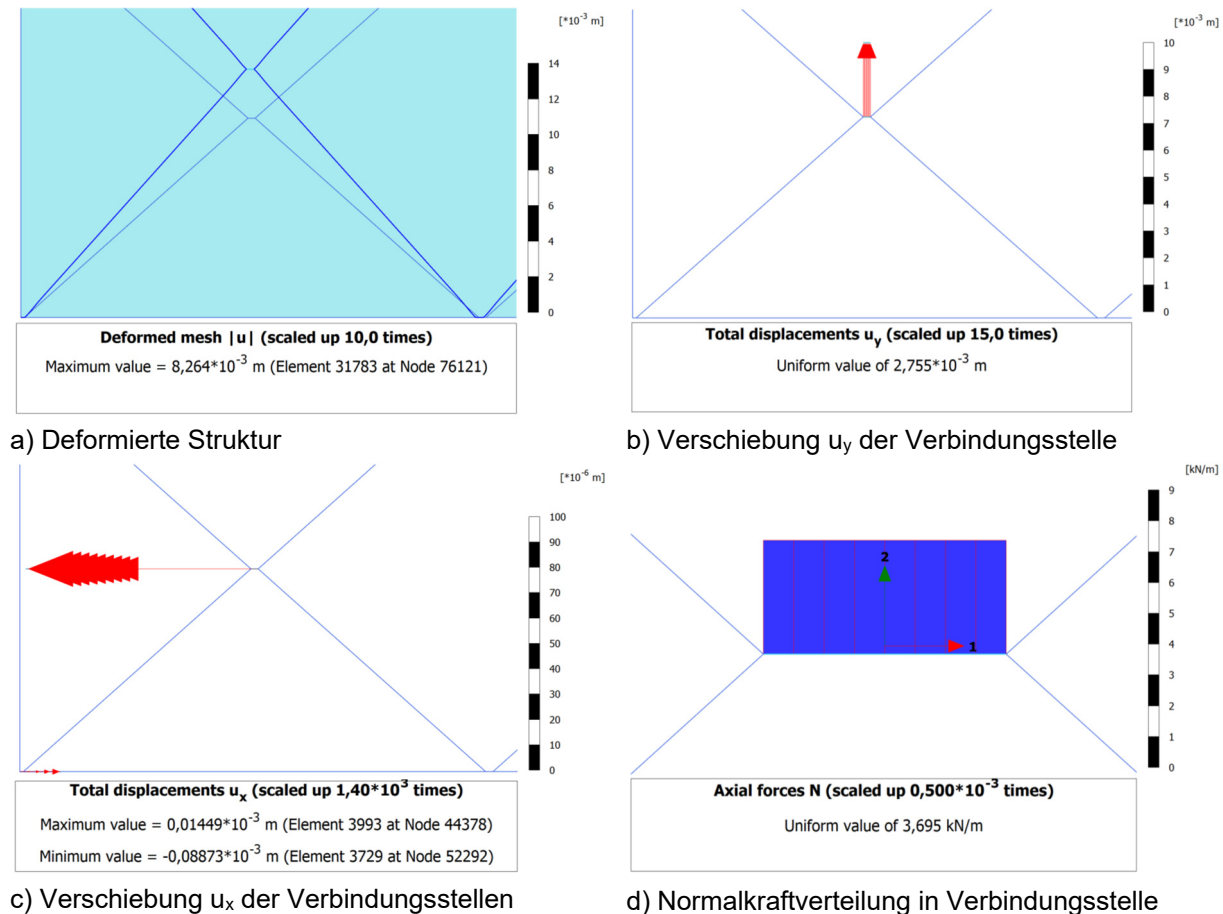
Das Vorgehen zur Ableitung eines äquivalenten statischen Systems für die Grundzustand II ist weitestgehend vergleichbar zu dem in den Kapiteln 4.2.3 und 4.2.4 beschriebenen Vorgehen für den Grundzustand I. Dementsprechend wird nachfolgend nur auf die Besonderheiten dieses Grundzustandes eingegangen. Im Grundzustand IIa wird mangels der Zugfestigkeit des Füllmaterials die äußere Belastung über Kräfte abgebildet. Wie in Abbildung 4.1 definiert greifen die Kräfte jeweils an den Eckpunkten der Verbindungsstellen mit einem Wert von  $P/2 = F_{II}^I = 1,75 \text{ kN/m}$  in  $y$ -Richtung an. Bezogen auf die Länge  $L_c$  einer Zelle beträgt die resultierende Kraft, wie im Grundzustand Ia, somit  $P = 3,5 \text{ kN/m}$ . Abbildung 4.12a zeigt die hieraus resultierende Verteilung der Spannungen  $\sigma_{xx}$ .



Entgegengesetzt zum Grundzustand Ia ruft die äußere Zugbelastung in  $y$ -Richtung eine Reaktion des Füllmaterials in  $x$ -Richtung hervor. Am unbelasteten rechten Rand treten hohe Spannungskonzentrationen auf, welche jedoch nach zwei Zellreihen in eine vergleichsweise homogene Spannungsverteilung übergehen. Im Bereich des Modellausschnitts liegen keine nennenswerten Einflüsse aus den Modellrändern vor.

Das in Abbildung 4.13a dargestellte deformierte Verbundmaterial im Modellausschnitt zeigt ein ähnliches Verformungsbild verglichen mit dem im Grundzustand Ib (s. Abb. 4.9a). Infolge des Einflusses des Füllmaterials fallen hier jedoch die Verschiebungen in  $x$ -Richtung gegenüber denen in  $y$ -Richtung geringer aus. Dabei ergeben sich wie im Grundzustand I einheitliche Verschiebungen  $u_y$  der Verbindungsstellen ohne Krümmung der Wandachse (s. Abb. 4.13b). Aus den Verschiebungsvektoren gemäß Abbildung 4.13c lässt sich zusätzlich erkennen, dass die beiden benachbarten Verbindungsstellen im Modellausschnitt eine entgegengesetzte Verschiebungsrichtung aufweisen. Während sich für die obere Verbindungsstelle eine Verschiebung nach links ergibt, liegt für die untere Verbindungsstelle eine Verschiebung nach rechts vor. Aus Gründen des horizontalen Kräftegleichgewichts führt die Reaktion des Füllmaterials

gemäß Abbildung 4.13d zu Zugkräften in den Verbindungsstellen. Diese Zugkräfte bewirken eine Längenänderung der Verbindungsstellen, wodurch sich entsprechend Abbildung 4.13c, bezogen auf die Mitte der jeweiligen Verbindungsstelle, zusätzlich Relativverschiebungen in x-Richtung hin zum Füllmaterial ergeben.

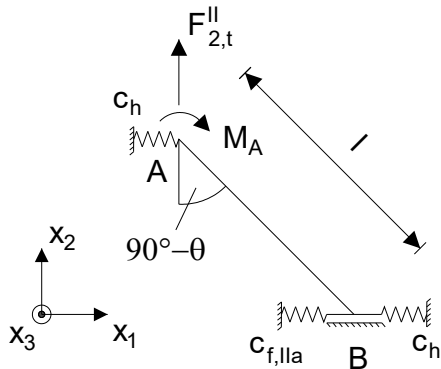


**Abb. 4.13:** Ausgewählte Simulationsergebnisse am Modellausschnitt für den Grundzustand IIa

Wie im Grundzustand I stimmen die Richtungen der maximalen Hauptspannungen und Hauptdehnungen mit den Koordinatenachsen überein. Die Querkräfte und Biegemomente in den Verbindungsstellen sind wegen der einheitlichen Verschiebung  $u_y$  minimal. Ebenfalls treten im Bereich des Modellausschnitts Spannungskonzentrationen auf, welche hier zwar etwas höher ausfallen, jedoch weiterhin nur lokal begrenzt vorliegen. Folglich kann erneut von einer homogenen Spannungs- und Dehnungsverteilungen ausgegangen werden. Grafische Darstellungen zu den vorstehenden Ausführungen finden sich in Anhang B.5 wieder.

Ein äquivalentes statisches System, welches das zuvor festgestellte Modellverhalten abbildet, ist in Abbildung 4.14 dargestellt. Als äußere Belastung greift die Kraft  $F_{2,t}^{\parallel}$  im Punkt A an. Die periodischen Eigenschaften einer verhinderten Wandverdrehung an den Enden der geneigten Wand werden im Punkt B durch die Parallelführung und im Punkt A durch das Moment  $M_A$  abgebildet. Das Füllmaterial lässt sich wie zuvor wegen der Homogenität der Spannungs- und Dehnungsverteilung in  $x_1$ -Richtung sowie den vernachlässigbaren Spannungen in  $x_2$ -Richtung über eine eindimensionale Feder mit der Federkonstante  $c_{f,IIb}$  darstellen. Bedingt durch die

entgegengesetzten Verschiebungen der Verbindungsstellen gemäß Abbildung 4.13b wirken sich diese, abweichend zum Grundzustand Ia, auf die Reaktionskraft des Füllmaterials aus. Aus diesem Grund ist der Einfluss aus den Verbindungsstellen bei der Ermittlung der Federkraft und damit auch im statischen System zu berücksichtigen. Da die Verbindungsstellen nur Normalkräfte erfahren, lassen sich diese als Pendelstäbe auffassen. Dementsprechend kann der Einfluss aus den Verbindungsstellen über zwei Federn mit einer Federkonstante  $c_h$  in den Punkten A und B abgebildet werden. Die Federkonstante ergibt sich hierbei aus dem Quotienten der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  zur Länge  $h$  der Verbindungsstelle.



**Abb. 4.14:** Äquivalentes statisches System im Grundzustand IIa

Die beiden Federn im Punkt B erfahren aufgrund des gleichen Angriffspunkts eine identische Kraft. Folglich lassen sich diese als zwei in Reihe geschaltete Federn zusammenfassen. Für die zugehörige Federkonstante  $c_{n,IIa}$  im Punkt B gilt somit

$$c_{n,IIa} = \frac{1}{\frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{1}{c_h}}. \quad (4.19)$$

mit: Federkonstante der Verbindungsstelle (horizontale Wand)  $c_h = EA_{cw}/h$   
 Federkonstante des Füllmaterials  $c_{f,IIa} = c_{f,Ib} = E_f[l \sin \theta / (h + l \cos \theta)] H_c$

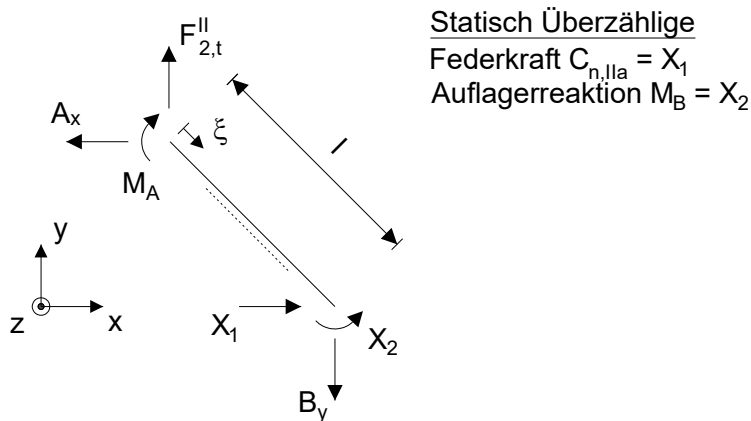
Die Federkonstante  $c_{f,IIa}$  des Füllmaterials entspricht der bereits in Gleichung (4.12) definierten Federkonstante  $c_{f,Ib}$  des Grundzustandes Ib.

#### 4.2.5.2 Äquivalente Materialkennwerte im Grundzustand IIa

Auch bei dem in Abbildung 4.14 dargestellten System handelt es sich um ein zweifach statisch unbestimmtes System. Demzufolge wird ebenfalls hier das PvK zur Ermittlung der statisch Überzähligen angewendet. Als Überzählige werden die Federkraft  $C_{n,IIa}$  der in Reihe geschalteten Feder und als Auflagerreaktion das Moment  $M_B$  im Punkt B gewählt (s. Abb. 4.15). Eine vollständige Beschreibung des Lösungswegs kann Anhang B.6 entnommen werden.

Ein ergänzender Nachweis der Plausibilität des äquivalenten statischen Systems lässt sich aus der Betrachtung des horizontalen Kräftegleichgewichts ableiten. Mangels weiterer Kräfte in x-Richtung stimmt die Auflagerkraft  $A_x$  mit der statisch Überzähligen  $X_1$  überein. Da sowohl die Auflagerkraft  $A_x$  als auch die Überzählige  $X_1$  wegen der Reihenschaltung direkt die jeweilige Normalkraft in den beiden Verbindungsstellen darstellen, werden im RVE somit beide

horizontalen Zellwände durch die gleiche Normalkraft beansprucht. Im Hinblick auf die periodischen Eigenschaften stellt dies eine notwendige Bedingung dar.



**Abb. 4.15:** Auflagerreaktionen im Grundzustand IIa

Die zur Lösung des Gleichungssystems erforderlichen Kompatibilitätsbedingungen im Grundzustand IIa lassen sich wie folgt definieren.

$$u_x^B = -\frac{X_1}{c_{n,IIa}} \text{ und } \psi_z^B = 0 \quad (4.20)$$

Die Federkraft ergibt sich unter Anwendung des PvK dann im Grundzustand IIa zu

$$C_{n,IIa} = X_1 = -F_{2,t}^{II} \sin \theta \cos \theta \cdot Y_t^{II} . \quad (4.21)$$

$$\text{mit: } Y_t^{II} = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{l} \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right)}$$

Wie im Grundzustand Ib lässt sich die Verschiebung  $u_x^B$  aus der Kompatibilitätsbedingung nach Gleichung (4.20) durch Einsetzen von Gleichung (4.21) ermitteln. Zur Bestimmung der Verschiebung  $u_y^A$  wird der Satz von Castigliano verwendet (s. Anhang B.6), sodass die beiden Verschiebungen wie folgt berechnet werden können.

$$u_x^B = \frac{F_{2,t}^{II} l \sin \theta \cos \theta \cdot Y_t^{II}}{c_{n,IIa}}$$

$$u_{2,t}^{II} = u_y^A = F_{2,t}^{II} l \left[ \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} (1 - Y_t^{II} \cos^2 \theta)^2 + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \cos^2 \theta (1 + Y_t^{II} \sin^2 \theta)^2 + \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right) \frac{Y_t^{II^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{l} \right] \quad (4.22)$$

Die Verschiebung  $u_y^A$  stellt hierbei direkt die resultierenden Verschiebung  $u_{2,t}^{II}$  am Rand des RVE dar. Dementgegen ist zur Ermittlung der resultierenden Verschiebung  $u_{1,t}^{II}$  auf die Verschiebung  $u_x^B$ , ähnlich zum Grundzustand Ia, zusätzlich noch die Verschiebung  $u_{h,t}^{II}$  aus der Längenänderung der Verbindungsstelle am Punkt B zu addieren. Die Normalkraft in der Verbindungsstelle entspricht aufgrund der Reihenschaltung der beiden Federn  $c_{f,IIa}$  und  $c_h$  der Federkraft  $C_{n,IIa} = X_1$  nach Gleichung (4.21). Durch die Formulierung der Längenänderung  $u_{h,t}^{II}$

über die Federkonstante  $c_h$  sowie der Definition von  $c_n$  nach Gleichung (4.19) lässt sich  $u_{1,t}^{II}$  folgendermaßen bestimmen.

$$u_{1,t}^{II} = u_x^B + u_{h,t}^{II} = -\frac{X_1}{c_{n,IIa}} + \frac{N_h}{c_h} = -X_1 \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{1}{c_h} \right) + \frac{X_1}{c_h} = \frac{F_{2,t}^{II} \sin\theta \cos\theta \cdot Y_t^{II}}{c_{f,IIa}} \quad (4.23)$$

Aus Gleichung (4.23) wird ersichtlich, dass sich die aus der statisch unbestimmten Berechnung folgende Verschiebung und die aus der Längenänderung ergebende Verschiebung  $u_{h,t}^{II}$  der Verbindungsstelle am Punkt B wegen den entgegengesetzten Verschiebungsrichtungen gegenseitig aufheben.

Entsprechend dem Vorgehen für den Grundzustand I ergeben sich die äquivalenten Materialkennwerte aus der vorausgesetzten Äquivalenz der mittleren Spannungen und Dehnungen des diskreten und homogenen Verbundmaterials. Ein Bezug der äußeren Belastung  $F_{2,t}^{II}$  und der resultierenden Verschiebung  $u_{2,t}^{II}$  auf die in Abbildung 4.2 dargestellten Abmessungen des RVE liefert

$$\bar{\varepsilon}_{2,t}^* = \bar{\varepsilon}_{2,t} = \frac{u_{2,t}^{II}}{l \sin\theta} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{2,t}^* = \bar{\sigma}_{2,t} = \frac{F_{2,t}^{II}}{(2h + l \cos\theta) H_c}. \quad (4.24)$$

Wird weiterhin von einem linearen Spannungs-Dehnungs-Verhalten des homogenen Materials ausgegangen, lässt sich der äquivalente Zugmodul  $E_{2,t}^*$  für den Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung folgendermaßen berechnen.

$$E_{2,t}^* = \frac{\bar{\sigma}_{2,t}^*}{\bar{\varepsilon}_{2,t}^*} = \frac{F_{2,t}^{II}}{u_{2,t}^{II}} \frac{l \sin\theta}{2h + l \cos\theta} = \frac{1}{Y_{t,l}^{II} + Y_{t,h}^{II} + Y_{t,f}^{II}} \frac{\sin\theta}{(2h + l \cos\theta) H_c} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: Anteil } Y_{t,l}^{II} &= \frac{\sin^2\theta(1 - Y_t^{II} \cos^2\theta)^2}{EA_{cw}} + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \cos^2\theta(1 + Y_t^{II} \sin^2\theta)^2 \\ \text{Anteil } Y_{t,h}^{II} &= \frac{2h}{EA_{cw}} \frac{Y_t^{II^2} \sin^2\theta \cos^2\theta}{l} \\ \text{Anteil } Y_{t,f}^{II} &= \frac{Y_t^{II^2} \sin^2\theta \cos^2\theta}{c_{f,IIa} l} \\ Y_t^{II} &= \frac{\frac{1}{EA_{cw}} \frac{1}{GA_{cw}} \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIa} l} + \frac{2h}{EA_{cw} l}} \quad \text{und} \quad c_{f,IIa} = E_f \frac{l \sin\theta H_c}{h + l \cos\theta} \end{aligned}$$

In der Gleichung wurde die Federsteifigkeit  $c_h$  bereits durch die Formulierung über die Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  und Wandlänge  $h$  substituiert (s. Gl. (4.19)). Durch den ergänzenden Bezug der resultierenden Verschiebung  $u_{1,t}^{II}$  auf die Länge des RVE in  $x_1$ -Richtung folgt dann die äquivalente Querdehnzahl  $\nu_{21,t}^*$  im Grundzustand IIa entsprechend Gleichung (4.26).

$$\nu_{21,t}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_{1,t}^*}{\bar{\varepsilon}_{2,t}^*} = -\frac{\frac{u_{1,t}^{II}}{2h + l \cos\theta}}{\frac{u_{2,t}^{II}}{l \sin\theta}} = -\frac{Y_t^{II}}{Y_{t,l}^{II} + Y_{t,h}^{II} + Y_{t,f}^{II}} \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{c_{f,IIa} (2h + l \cos\theta)} \quad (4.26)$$

Aus einer näheren Betrachtung der Gleichungen (4.25) und (4.26) lässt sich erkennen, dass auch im Grundzustand IIa die äquivalenten Materialkennwerte nur von der Zellgeometrie, den

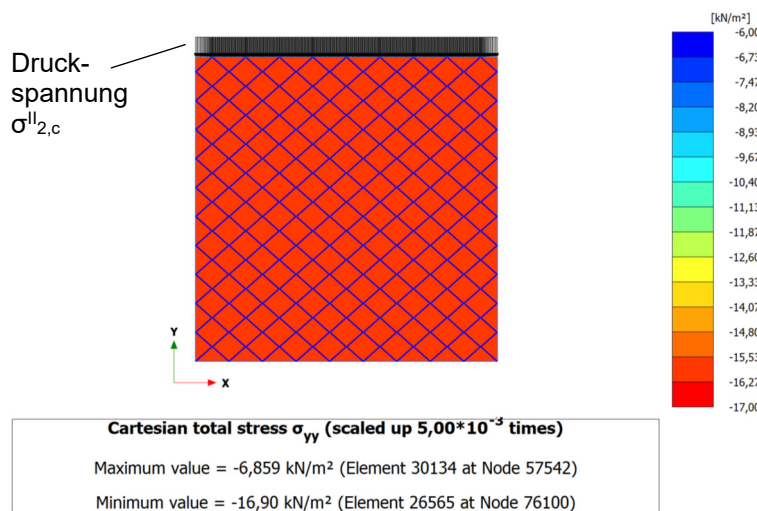


Wandsteifigkeiten sowie der Füllmaterialsteifigkeit abhängen. Das zur Prüfung der vorstehenden Herleitung verwendete Matlab-Skript ist Anhang B.6 beigefügt.

#### 4.2.6 Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung

##### 4.2.6.1 Äquivalentes statisches System im Grundzustand IIb

Wie im Grundzustand I ist aufgrund des abweichenden Materialverhaltens auf Druck und Zug eine zusätzliche Bestimmung der äquivalenten Materialkennwerte für den Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung notwendig. Die äußere Belastung wird wie für den Grundzustand Ib wegen der gegebenen Druckfestigkeit des Füllmaterials über eine Randspannung  $\sigma_{2,c}^{\text{II}}$  von  $-15,625 \text{ kN/m}^2$  vorgegeben. In Abbildung 4.16 ist die hieraus resultierende Verteilung der Spannung  $\sigma_{yy}$  dargestellt. Durch die Vorgabe einer Randspannung als äußere Belastung treten nahezu keine Inhomogenität in der Spannungsverteilung auf und die Größe der Spannung  $\sigma_{yy}$  entspricht weitestgehend der vorgegebenen Belastung.

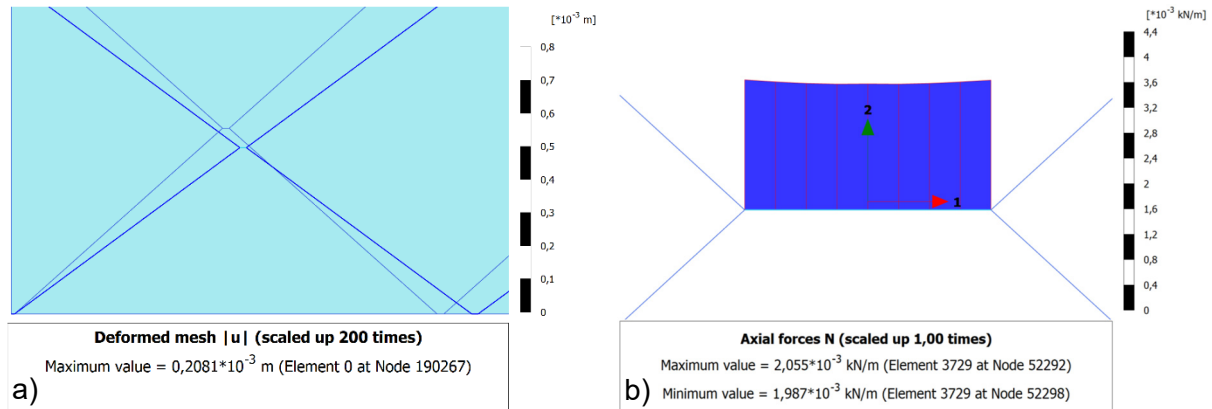


**Abb. 4.16:**  $\sigma_{yy}$ -Verteilung für eine äußere Druckspannung von  $\sigma_{2,c}^{\text{II}} = -15,625 \text{ kN/m}^2$  im Grundzustand IIb

Aus der in Abbildung 4.17a angegebenen deformierten Struktur wird ein zu Grundzustand Ia vergleichbares Verformungsbild ersichtlich. Die Zellwände werden hierbei in negative y-Richtung und positive x-Richtung verschoben. Unter Vernachlässigung der geringen Wandkrümmung infolge des lokalen Einflusses der Biegesteifigkeit in den Eckbereichen bleiben auch hier die Zellwände überwiegend eben. Abweichend zu den zuvor betrachteten Grundzuständen sind die Normalkräfte in der Verbindungsstelle wegen des vertikalen Kräftegleichgewichts vernachlässigbar gering (Abb. 4.17b). Dementsprechend ergeben sich aus der Verbindungsstelle keine zusätzlichen Verschiebungen in x-Richtung. Weiterhin findet eine einheitliche Verschiebung der Verbindungsstelle in y-Richtung statt, sodass diese sich im Grundzustand IIb ausschließlich als Starrkörper verschieben.

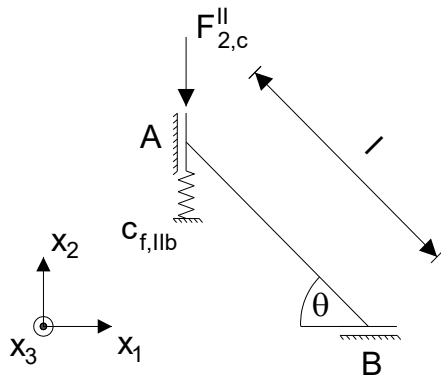
Die aus der Normalkraftverteilung nach Abbildung 4.17b hervorgehenden Werte von ca.  $2 \text{ N/m}$  resultieren wie die Wandkrümmungen der geneigten Zellwand aus den lokal begrenzten Spannungskonzentrationen um die Verbindungsstelle infolge des Einflusses der Biegesteifigkeit.

Hinsichtlich der Größe und Richtungen der Hauptspannungen und -dehnungen liegen gegenüber dem Grundzustand Ia vergleichbare Zusammenhänge vor, sodass auf eine erneute Beschreibung verzichtet und auf die Darstellungen in Anhang B.7 verwiesen wird.



**Abb. 4.17:** Ausgewählte Simulationsergebnisse mit a) der deformierten Struktur und b) Normalkraftverteilung in der Verbindungsstelle am Modellausschnitt im Grundzustand IIb

Hervorgehend aus dem beschriebenen Modellverhalten ist in Abbildung 4.18 das zugehörige äquivalente statische System für den Grundzustand IIb dargestellt. Bedingt durch den nicht vorhandenen Einfluss der Verbindungsstelle auf die Verschiebungen umfasst das System nur die geneigte Zellwand. Äquivalent zur äußeren Spannung  $\sigma_{2,c}^{II}$  greift im Punkt A die Kraft  $F_{2,c}^{II}$  an (s. Gl. 3.10). Die beiden Parallelführungen bilden wie zuvor die aus der Periodizität folgenden Schnittgrößen an den Endpunkten der geneigten Wand ab.



**Abb. 4.18:** Äquivalentes statisches System im Grundzustand IIb

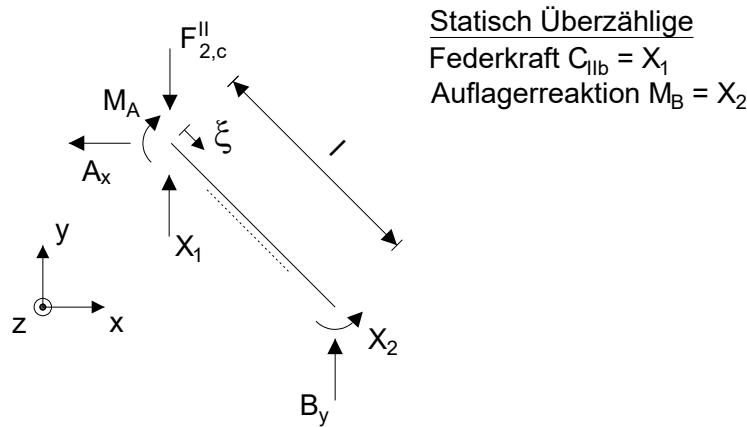
Unter Berücksichtigung der homogenen Spannungs- und Dehnungsverteilungen sowie der Richtung der maximalen Hauptspannung und -dehnungen lässt sich die Reaktion des Füllmaterials durch eine Einzelfeder in  $x_2$ -Richtung mit der Federkonstante  $c_{f,IIb}$  abbilden. Da die Verbindungsstelle eine einheitliche Verschiebung erfährt, ist ein Ansatz der Feder im Punkt A der geneigten Wand ausreichend. Die Federkonstante  $c_{f,IIb}$  entspricht hierbei der Federkonstante  $c_{f,Ia}$  des Grundzustand Ia nach Gleichung (4.3) und es gilt

$$c_{f,IIb} = c_{f,Ia} = E_f \frac{2h + l \cos \theta}{l \sin \theta} H_c. \quad (4.27)$$

Wie bei den vorherigen Grundzuständen ergibt sich die Federkonstante aus den geometrischen Abmessungen des RVE gemäß Abbildung 4.2 und dem Elastizitätsmodul  $E_f$  des Füllmaterials.

#### 4.2.6.2 Äquivalente Materialkennwerte im Grundzustand IIb

Zur Ermittlung der resultierenden Verschiebungen des in Abbildung 4.18 definierten äquivalenten statischen Systems zeigt Abbildung 4.19 die Auflagerreaktionen samt der gewählten statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$  für das zweifach statisch überbestimmte System. Als Überzählige werden die Federkraft  $C_{IIb}$  und das Moment  $M_B$  gewählt. Auch hier wird zur Lösung des statischen Systems das PvK angewendet. Eine detaillierte Beschreibung des Lösungswegs ist in Anhang B.8 dargestellt.



**Abb. 4.19:** Auflagerreaktionen im Grundzustand IIb

Zur Lösung des Gleichungssystems liegen folgende Kompatibilitätsbedingungen vor.

$$u_y^A = -\frac{X_1}{c_{f,IIb}} \text{ und } \psi_z^B = 0 \quad (4.28)$$

Die Federkraft und damit die Reaktionskraft des Füllmaterials lässt sich im Grundzustand IIb über das PvK ermitteln aus

$$C_{IIb} = X_1 = F_{2,c}^{II} \cdot Y_c^{II} . \quad (4.29)$$

$$\text{mit: } Y_c^{II} = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIb}l}}$$

Da sich aus der Verbindungsstelle keine zusätzlichen Verschiebungsanteile ergeben, stimmen die beiden Verschiebungen  $u_x^B$  und  $u_y^A$  mit den resultierenden Verschiebungen  $u_{1,c}^{II}$  und  $u_{2,c}^{II}$  am Rand des RVE überein. Hierbei lässt sich  $u_y^A$  direkt aus Gleichung (4.28) durch Einsetzen der Federkraft  $C_{IIb}$  bestimmen. Zur Ermittlung von  $u_x^B$  wird der Reduktionssatz in Verbindung mit einem zugeordneten statischen System verwendet (vgl. Anhang B.8).

$$u_{1,c}^{II} = u_x^B = F_{2,c}^{II} l \sin \theta \cos \theta (Y_c^{II} - 1) \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \quad (4.30)$$

$$u_{2,c}^{II} = u_y^A = -\frac{F_{1,c}^I \cdot Y_c^{II}}{c_{f,Ib}}$$

Die maßgebenden mittleren Spannungen und Dehnungen lassen sich durch den Bezug auf die Abmessungen des RVE gemäß Abbildung 4.2 entsprechend Gleichung (4.31) berechnen.

$$\bar{\varepsilon}_{2,c}^* = \bar{\varepsilon}_{2,c} = \frac{u_{2,c}^{II}}{l \sin \theta} \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{2,c}^* = \bar{\sigma}_{2,c} = -\frac{F_{2,c}^{II}}{(2h + l \cos \theta) H_c} \quad (4.31)$$

Für ein lineares Spannungs-Dehnungs-Verhalten des homogenen Verbundmaterials ergibt sich somit der äquivalente Druckmodul  $E_{2,c}^*$  im Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in  $x_2$ -Richtung folgendermaßen.

$$E_{2,c}^* = \frac{\bar{\sigma}_{2,c}^*}{\bar{\varepsilon}_{2,c}^*} = -\frac{F_{2,c}^{II}}{u_{2,c}^{II}} \frac{l \sin \theta}{(2h + l \cos \theta) H_c} = \frac{c_{f,IIb}}{Y_c^{II}} \frac{l \sin \theta}{(2h + l \cos \theta) H_c} \quad (4.32)$$

$$\text{mit: } Y_c^{II} = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIb} l}} \quad \text{und} \quad c_{f,IIb} = E_f \frac{(2h + l \cos \theta) H_c}{l \sin \theta}$$

In Verbindung mit der zugehörigen Abmessung des RVE in  $x_1$ -Richtung kann abschließend aus der Verschiebung  $u_{1,c}^{II}$  die Querdehnzahl  $\nu_{21,c}^*$  für den Grundzustand IIb ermitteln werden aus

$$\nu_{21,c}^* = -\frac{\bar{\varepsilon}_{1,c}^*}{\bar{\varepsilon}_{2,c}^*} = -\frac{\frac{u_{1,c}^{II}}{2h + l \cos \theta}}{\frac{u_{2,c}^{II}}{l \sin \theta}} = -\frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{2h + l \cos \theta}. \quad (4.33)$$

Wie bereits für den Grundzustand Ib lässt sich im Zuge der Ableitung die Federkonstante  $c_{f,IIb}$  aus Gleichung (4.33) eliminieren, sodass diese ausschließlich von den Eigenschaften der Geozelle abhängt. Das zur Prüfung der vorstehenden Gleichungen verwendete Matlab-Skript ist Anhang B.8 beigelegt.

## 4.2.7 Vereinfachte analytische Lösung für die Grundzustände I und II

### 4.2.7.1 Wandsteifigkeiten zur Grenzwertbetrachtung

In vorstehenden Kapiteln werden die Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten in allgemeiner Form hergeleitet. Während bei einigen Geozellenprodukten verhältnismäßig dickwandige Zellwände vorliegen und damit die allgemeine Formulierung für eine korrekte Beschreibung des Materialverhaltens notwendig ist, weist der Hauptteil handelsüblicher Geozellenprodukte Zellwände eine sehr hohe Wandschlankheit  $t/l$  auf (s. Kap. 2.2.1). Zur Ableitung vereinfachter Bestimmungsgleichungen für die verschiedenen äquivalenten Materialkennwerten im Bereich sehr hoher Schlankheiten werden nachstehend ergänzende Untersuchungen angestellt. Da die Schlankheit maßgebend durch die Zellwanddicke  $t$  bestimmt wird, lassen sich die vereinfachten Bestimmungsgleichungen aus der zuvor hergeleiteten allgemeinen Formulierung über eine Grenzwertbetrachtung mit der Wanddicke  $t \rightarrow 0$  ableiten. Für eine Plausibilitätsprüfung der allgemeinen Bestimmungsgleichungen wird weiterhin untersucht, ob diese den Übergang zu dem Fall unbefüllter Geozellen korrekt wiedergeben. Hierzu wird eine ergänzende Grenzwertbetrachtung mit der Federkonstante  $c_f \rightarrow 0$ , d. h. keine Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$ , durchgeführt.

Zur Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  ist eine Formulierung der Wandsteifigkeiten  $EA_{cw}$  und  $EI_{cw}$  in Abhängigkeit der Wanddicke  $t$  unter Annahme eines rechteckigen Zellwandquerschnitts notwendig. Für die Schubsteifigkeit  $GA_{cw}$  wird die Definition nach Gleichung (4.2) über Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  mit einer Querdehnzahl der Zellwand von  $\nu_{cw} = 0$  verwendet. Die Wandsteifigkeiten lauten somit wie folgt.

$$EA_{cw} = E_{cw}tH_c \text{ und } EI_{cw} = \frac{E_{cw}t^3H_c}{12} \text{ und } GA_{cw} = \frac{5EA_{cw}}{12} = \frac{5E_{cw}tH_c}{12} \quad (4.34)$$

Diese Wandsteifigkeiten sind vor der jeweiligen Grenzwertbetrachtung in die allgemeinen Bestimmungsgleichungen einzusetzen.

#### 4.2.7.2 Grenzwertbetrachtung mit einer Federkonstante $c_f \rightarrow 0$

Eine Grenzwertbetrachtung mit der Federkonstanten  $c_f \rightarrow 0$  des  $Y_t^I$ -Terms in Gleichung (4.5) liefert für die Federkraft  $C_a^I$  im Grundzustand Ia folgenden Grenzwert.

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} Y_t^I(c_f) = 0 \Rightarrow C_a^I = 0 \quad (4.35)$$

Demnach nimmt die Federkraft bei vernachlässigbar geringer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  einen Wert von Null an, sodass die Gleichung den Übergang für den Fall eines unbefüllten Zellsystems korrekt abbildet. Der gleiche Zusammenhang lässt sich durch eine Grenzwertbetrachtung für die Federkräfte der weiteren Grundzustände Ib, IIa und IIb ableiten. Eine Übersicht hierzu kann Anhang B.9 entnommen werden.

Im Hinblick auf die äquivalenten Druck- und Zugmodule der homogenisierten Zellstruktur ohne Füllmaterial für den Grenzfall  $c_f \rightarrow 0$  zeigt Tabelle 4.2 eine Übersicht der sich hieraus ergebenden vereinfachten Bestimmungsgleichungen.

**Tab. 4.2:** Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Druck- und Zugmodule im Grenzfall  $c_f \rightarrow 0$

$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{1,t}^* = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{2h}{EA_{cw}l}} \frac{2h + l\cos\theta}{l^2\sin\theta H_c} \quad (4.36)$
$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{1,c}^* = \frac{1}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{2h + l\cos\theta}{l^2\sin\theta H_c} \quad (4.37)$
$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{2,t}^* = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{\sin\theta}{(2h + l\cos\theta)H_c} \quad (4.38)$
$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{2,c}^* = \frac{1}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{\sin\theta}{(2h + l\cos\theta)H_c} \quad (4.39)$

Aus dem Vergleich wird ersichtlich, dass sich für  $c_f \rightarrow 0$  im Grundzustand II unabhängig von einer äußeren Druck- oder Zugbelastung die selben Bestimmungsgleichungen ergeben. Die beiden Bestimmungsgleichungen für den Grundzustand I weichen lediglich um den Ausdruck der Längenänderung der Verbindungsstelle im Nenner jeweiligen der Gleichungen ab. Dieser

Unterschied resultiert aus der in Kapitel 4.2.4.1 beschriebenen Vernachlässigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle im Grundzustand Ib, womit auch hier die Grenzwertbetrachtung die Plausibilität der Lösung bestätigt. Ein zusätzlicher Vergleich der in Tabelle 4.2 angegebenen Gleichungen mit dem Ausdruck von Gleichung (3.18) in Kapitel 3.4.2.1 zeigt, dass bei Vernachlässigung der Wandverschiebungen infolge Axial- und Schubverformungen, d. h. nur Biegeverformungen, die Lösung mit der von Gibson (1981) übereinstimmt.

In gleicher Weise wie für die äquivalenten Druck- und Zugmodule lässt sich durch die Grenzwertbetrachtung  $c_f \rightarrow 0$  zeigen, dass gemäß Tabelle 4.3 die Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Querdehnzahlen bei äußerer Druck- und Zugbelastung für unbefüllte Zellen ineinander übergehen. Die Unterschiede zwischen Gleichung (4.40) und (4.41) resultieren hierbei wieder aus der Vernachlässigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle bei der Herleitung im Grundzustand Ib.

**Tab. 4.3:** Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Querdehnzahlen im Grenzfall  $c_f \rightarrow 0$

$\lim_{c_f \rightarrow 0} v_{12,t}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{2h}{EA_{cw}l}} \frac{(2h + l\cos\theta)\cos\theta}{l}$	(4.40)
$v_{12,c}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{(2h + l\cos\theta)\cos\theta}{l}$	(4.41)
$\lim_{c_f \rightarrow 0} v_{21,t}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{l\sin^2\theta\cos\theta}{2h + l\cos\theta}$	(4.42)
$v_{21,c}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{l\sin^2\theta\cos\theta}{2h + l\cos\theta}$	(4.43)

Da sich gemäß den Ausführungen in Kapitel 4.2.4.2 und 4.2.6.2 bei der Herleitung die Federkonstanten  $c_{f,IIa}$  und  $c_{f,IIb}$  eliminieren lassen, ist eine Grenzwertbetrachtung für die äquivalenten Querdehnzahlen im Grundzustand Ib und IIb nicht notwendig. Aus dem erneuten Vergleich der Gleichungen von Tabelle 4.3 mit der von Gibson (1981) angegebenen Lösung gemäß Gleichung (3.20) wird ersichtlich, dass sich bei ausschließlicher Berücksichtigung der Biegeverformungen aus den Zellwänden auch hier die selben Gleichungen ergeben.

Zusammenfassend kann somit festgestellt werden, dass für unbefüllte Geozellen die äquivalenten Materialkennwerte jeweils im Grundzustand Ia und Ib sowie Grundzustand IIa und IIb die gleichen Werte annehmen. Aufgrund des linear elastischen Verhaltens der Zellwände stellt dies eine notwendige Bedingung dar, da das Materialverhalten der unbefüllten Zellen in diesem Fall unabhängig von einer Druck- oder Zugbelastung ist. Weiterhin reduzieren sich die

allgemeinen Bestimmungsgleichungen durch die Grenzwertbetrachtung zu der von Gibson (1981) angegebenen Lösung, womit die hier hergeleitete allgemeine Lösung den Übergang zu einem unbefüllten Zellsystem korrekt abbildet.

#### 4.2.7.3 Grenzwertbetrachtung mit einer Zellwanddicke $t \rightarrow 0$

Wie in Kapitel 4.2.7.1 beschrieben ist zur Grenzwertbetrachtung mit einer Wanddicke  $t \rightarrow 0$ , d. h. sehr schlanke Zellwände, vorab eine Substitution der Wandsteifigkeiten  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $EI_{cw}$  mit den in Gleichung (4.34) definierten Ausdrücken in den verschiedenen Gleichungen der Grundzustände I und II notwendig. Bezogen auf den  $Y_t^I$ -Term und damit der Federkraft  $C_{Ia}$  gemäß Gleichung (4.5) folgt hieraus für den Grundzustand Ia

$$\lim_{t \rightarrow 0} Y_t^I(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{12}{5} - \frac{l^2}{t^2}}{\sin^2 \theta + \frac{12}{5} \cos^2 \theta + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{t^2} + \frac{E_{cw} t H_c}{c_{f, Ia} l}} = -\frac{1}{\cos^2 \theta} \quad (4.44)$$

$$\Rightarrow C_{Ia} = F_{1,t}^I \tan \theta.$$

Folglich reduziert sich die Gleichung für die Federkraft auf einen einfachen trigonometrischen Ausdruck in Abhängigkeit der äußeren Kraft  $F_{1,t}^I$  und des Zellwinkels  $\theta$ . Zusätzlich lässt sich aus der Grenzwertbetrachtung für die Normalkraft  $N_{l,t}^I$  der geneigten Wand im Grundzustand Ia folgende Gleichung ableiten (s. Anhang B.9).

$$\lim_{t \rightarrow 0} N_{l,t}^I(t) = \frac{F_{1,t}^I}{\cos \theta} \quad (4.45)$$

Somit liegt auch hier ein einfacher trigonometrischer Zusammenhang zwischen der Normalkraft und der äußeren Kraft vor. Die Ausdrücke nach Gleichung (4.44) und (4.45) entsprechen der von Abd El-Sayed (1976) angegebenen Lösung nach Gleichung (3.31), wobei zu den dort verwendeten Definitionen der Kräfte der Zusammenhang  $W = 2F_{1,t}^I$  und  $R = 2C_{Ia}$  besteht. Dementgegen nehmen die Querkräfte und Biegemomente in den geneigten Wänden für eine sehr geringe Wanddicke mit  $t \rightarrow 0$  jeweils einen Wert von Null an. Folglich gibt die allgemeine Lösung den Übergang zu befüllten Geozellen mit sehr schlanken Zellwänden und einer verhältnismäßig hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  korrekt wieder. Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass sich auch in den weiteren Grundzuständen durch die Grenzwertbetrachtung einfache trigonometrische Zusammenhänge ergeben oder einzelne Größen einen Wert von Null annehmen. Eine Übersicht hierzu kann Anhang B.9 entnommen werden.

Die aus der Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  folgenden Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Druck- und Zugmodulen sind in Tabelle 4.4 dargestellt. Die verschiedenen Federkonstanten wurden hierbei bereits durch die zugehörigen Ausdrücke mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und der Zellgeometrie ersetzt. Wie aus den Gleichungen ersichtlich wird, hängen die Druck- und Zugmodule nur von der Zellgeometrie, dem Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials  $E_{cw}$  und des Füllmaterials  $E_f$  ab. Entgegen der Betrachtung der unbefüllten Zellen ergeben sich

aufgrund des Einflusses der Füllmaterialsteifigkeit unterschiedliche Bestimmungsgleichungen bei Druck- und Zugbelastung. Infolge der geringen Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  verglichen zur Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  nimmt der äquivalente Druckmodul  $E_{2,c}^*$  im Grundzustand IIb den Wert der Füllmaterialsteifigkeit an. Der hierzu abweichende Ausdruck im Grundzustand Ib resultiert aus der in Kapitel 4.2.4.1 beschriebenen Vernachlässigung der Verschiebungen der Verbindungsstelle bei der Herleitung. Bei geringen Längen  $h$  der Verbindungsstellen stimmt jedoch auch hier der äquivalente Druckmodul  $E_{1,c}^*$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  überein.

**Tab. 4.4:** Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Druck- und Zugmodule im Grenzfall  $t \rightarrow 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} E_{1,t}^* = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw}t} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \frac{\sin^3 \theta}{E_f(2h + l \cos \theta)}} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{l^2 \sin \theta} \quad (4.46)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} E_{1,c}^* = E_f \frac{2h + l \cos \theta}{h + l \cos \theta} \quad (4.47)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} E_{2,t}^* = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw}t} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \frac{(h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{E_f l^2 \sin \theta}} \frac{\sin^3 \theta}{2h + l \cos \theta} \quad (4.48)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} E_{2,c}^* = E_f \quad (4.49)$	

Ergänzend sind in Tabelle 4.5 die Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Querdehnzahlen für den Grenzfall  $t \rightarrow 0$  dargestellt. Wie für die äquivalenten Zug- und Druckmodule liegen infolge des Einfluss der Füllmaterialsteifigkeit auch für die äquivalenten Querdehnzahlen unterschiedliche Gleichungen bei Zug- und Druckbelastung in den beiden Grundzuständen vor. Ebenfalls hängen diese nur von den geometrischen Eigenschaften der Zelle, dem Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials  $E_{cw}$  und des Füllmaterials  $E_f$  ab.

**Tab. 4.5:** Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Querdehnzahlen im Grenzfall  $t \rightarrow 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} v_{12,t}^* = \frac{1}{\frac{E_f(2h + l \cos \theta)}{E_{cw}t \sin \theta} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \sin^2 \theta} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l} \quad (4.50)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} v_{12,c}^* = \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l \sin^2 \theta} \quad (4.51)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} v_{21,t}^* = \frac{1}{\frac{E_f l^2 \sin \theta}{E_{cw}t(h + l \cos \theta)} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \cos^2 \theta} \frac{l \sin^2 \cos \theta}{2h + l \cos \theta} \quad (4.52)$	
$\lim_{t \rightarrow 0} v_{21,c}^* = \frac{l \sin^2 \theta}{(2h + l \cos \theta) \cos \theta} \quad (4.53)$	

Die Querdehnzahlen im Grundzustand Ib und IIb werden, wie bereits in Kapitel 4.2.7.2 beschrieben, trotz des Füllmaterials nur durch die Verformung der Zellwände bestimmt. Gemäß den Ausführungen in Kapitel 3.4.2.1 resultieren diese jedoch bei einem unbefüllten Zellsystem und bei sehr hoher Schlankheit hauptsächlich aus der Biegeverformung der



geneigten Zellwand, womit aus der Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  für die Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  direkt die von Gibson (1981) hergeleitete Lösung nach Gleichung (3.20) hervorgeht. Eine weitere Vereinfachung der äquivalenten Materialkennwerte im Grundzustand Ib und IIb lässt sich aus der gängigen Annahmen für planare Geokunststoffe ableiten. Hierbei wird davon ausgegangen, dass in den planaren Geokunststoffen durch die Abbildung über das mechanische Modell einer Membran ausschließlich axiale Zugkräfte auftreten können. Die Aufnahme von Druckkräften ist mangels einer ausreichenden Stabilität gegen Ausknicken nicht zulässig. Im Grundzustand Ib und IIb werden die Zellwände jedoch ausschließlich durch Druckkräfte beansprucht, weshalb eine Übertragung der vorstehenden Annahme zu folgenden äquivalenten Querdehnnzahlen führt.

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_{12,c}^* = \lim_{t \rightarrow 0} v_{21,c}^* = v_s \quad (4.54)$$

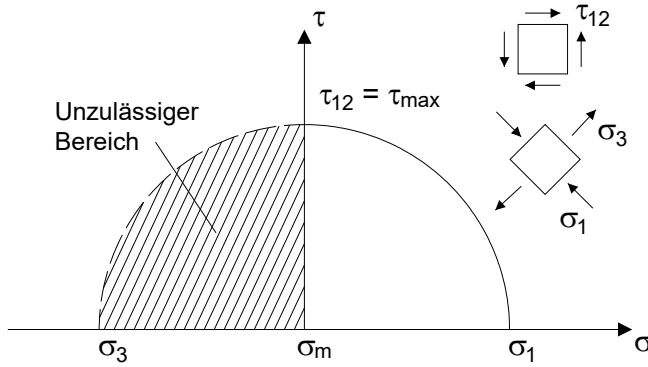
Demzufolge nehmen in diesem Fall die äquivalenten Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  die Querdehnnzahl  $v_s$  des Füllmaterials an. Wird zusätzlich der in Tabelle 4.4 angegebene Übergang der äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  zu der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  berücksichtigt, liegt somit für das Verbundmaterial bei äußerer Druckbelastung und Zellwänden mit sehr hoher Schlankheit ein homogenes und richtungsunabhängiges Verhalten entsprechend der Materialeigenschaften des Füllmaterials vor.

Im Fall sehr schlanker Zellwände und einer relativ hohen Füllmaterialsteifigkeit reduzieren sich die Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte zu einfachen Ausdrücken in Abhängigkeit der Zellgeometrie, dem Elastizitätsmodul der Zellwand  $E_{cw}$  und des Füllmaterials  $E_f$ . Als Schnittgrößen treten in den Zellwänden lediglich Normalkräfte auf. Folglich bildet auch hier die Grenzwertbetrachtung mit  $t \rightarrow 0$  den Übergang der allgemeinen Lösung zu einer sehr dünnwandigen und befüllten Zellstruktur korrekt ab.

## 4.3 Grundzustand III bei reiner Schubbelastung

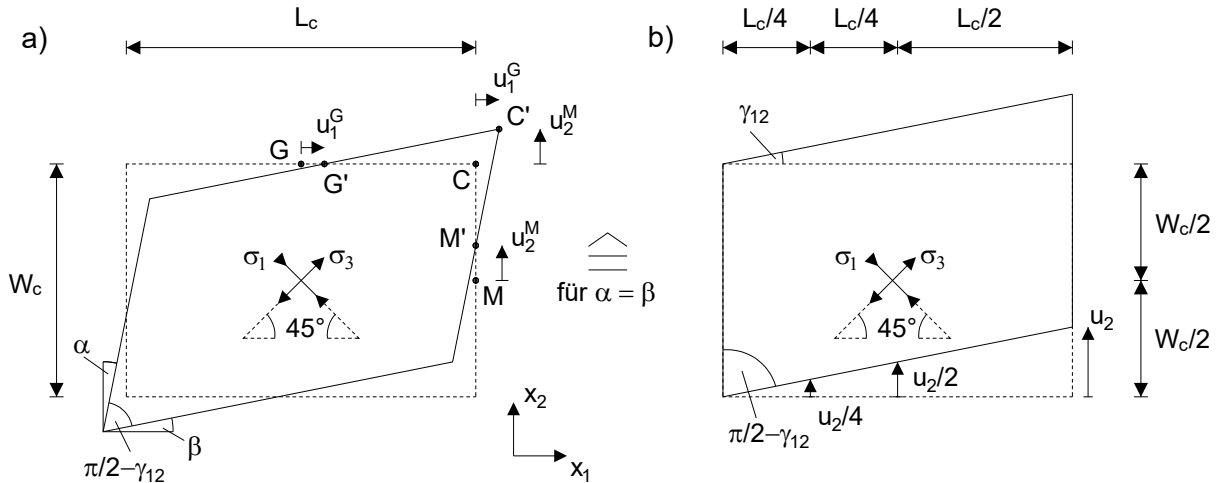
### 4.3.1 Vorbemerkung zum Grundzustand III

Zur Ermittlung des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  sind ergänzend zu den Grundzuständen I und II besondere Überlegungen notwendig. Bei einem reinen Schubspannungszustand eines isotropen und linear elastischen Materials treten in um  $45^\circ$  gedrehten Schnitten betragsmäßig identische Hauptspannungen mit jeweils positiven und negativen Vorzeichen auf. Die mittlere Spannung  $\sigma_m$  ist null. Zur Veranschaulichung ist der zugehörige Spannungskreis in Abbildung 4.20 dargestellt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die maximale Hauptspannung  $\sigma_1$  einer maximalen Druckspannung und die minimale Hauptspannung  $\sigma_3$  einer maximalen Zugspannung entsprechen. Infolge der nicht vorhandenen Zugfestigkeit können jedoch im Füllmaterial keine Zugspannungen auftreten. Folglich liefert das Füllmaterial für einen reinen Schubspannungszustand keinen Widerstand.



**Abb. 4.20:** Spannungskreis für reinen Schubspannungszustand

Aufgrund der späteren Relevanz werden nachfolgend ergänzend einige wesentliche Zusammenhänge zur Gleitung  $\gamma_{12}$  beschrieben. Hierfür können Abbildung 4.21a schematisch ein deformiertes Element bei reiner Schubbeanspruchung und Abbildung 4.21b eine hierzu äquivalente Darstellung entnommen werden (Gross et al. 2011a).



**Abb. 4.21:** a) Deformiertes Element bei reiner Schubbeanspruchung sowie b) äquivalente Darstellung. Die allgemeine Definition der Gleitung  $\gamma_{12}$  in Abhängigkeit der beiden Winkelländerungen  $\alpha$  und  $\beta$  lautet gemäß Gross et al. (2011a)

$$\gamma_{12} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (4.55)$$

Aus dem in Abbildung 4.21a dargestellten deformierten Element wird ersichtlich, dass die Verschiebung  $u_1^G$  vom Punkt G zum Punkt G' die für die Ermittlung der Winkelländerung  $\alpha$  relevante Verschiebung des Punktes C zu Punkt C' darstellt. Der gleiche Zusammenhang ergibt sich für die Verschiebung  $u_2^M$  des Punktes M zu M' für die Winkelländerung  $\beta$ . Die Gleitung  $\gamma_{12}$  kann somit folgendermaßen berechnet werden.

$$\gamma_{12} = \alpha + \beta = \frac{u_1^G}{\frac{W_c}{2}} + \frac{u_2^M}{\frac{L_c}{2}} = \frac{\frac{u_1^G}{2}}{\frac{W_c}{4}} + \frac{\frac{u_2^M}{2}}{\frac{L_c}{4}} \quad (4.56)$$

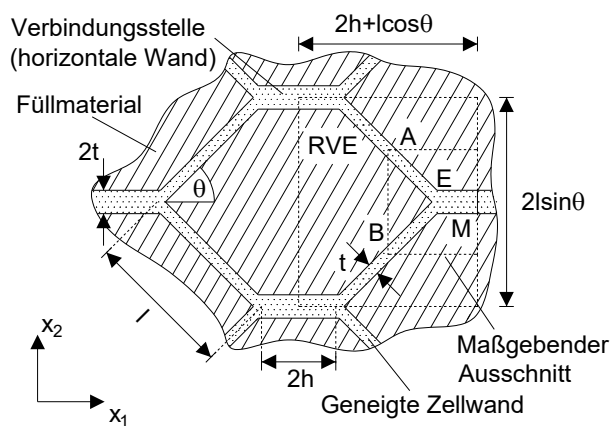
Für den Fall gleicher Winkelländerungen mit  $\alpha = \beta$  lässt sich die Gleitung nur durch eine der beiden Winkelländerungen ausdrücken, sodass die Gleitung  $\gamma_{12}$  alternativ entsprechend Gleichung (4.57) berechnet werden kann.

$$\gamma_{12} = 2\alpha = 2\beta \quad (4.57)$$

Weiterhin kann für den Fall  $\alpha = \beta$  die äquivalente Abbildung gemäß Abbildung 4.21b verwendet werden. Infolge der einheitlichen Winkeländerung über die Länge  $L_c$  lässt sich hier die Gleitung  $\gamma_{12}$  folgendermaßen ermitteln.

$$\gamma_{12} = \frac{u_2}{L_c} = \frac{\frac{u_2}{2}}{\frac{L_c}{2}} = \frac{\frac{u_2}{4}}{\frac{L_c}{4}} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{12} = \frac{u_1}{W_c} = \frac{\frac{u_1}{2}}{\frac{W_c}{2}} = \frac{\frac{u_1}{4}}{\frac{W_c}{4}} \quad (4.58)$$

Zur Bestimmung des äquivalenten Schubmoduls im Grundzustand III wird das von Gibson und Ashby (1999) gewählte RVE gemäß Abbildung 3.9 herangezogen. Eine schematische Darstellung des RVE mit dem Füllmaterial sowie allen relevanten geometrischen Größen ist in Abbildung 4.22 dargestellt. Demnach umfasst dieses eine Abmessung in  $x_1$ -Richtung von  $2h+l\cos\theta$  und von  $2l\sin\theta$  in  $x_2$ -Richtung.



**Abb. 4.22:** RVE für Grundzustand III

Aufgrund der bereits in Kapitel 3.4.2.2 beschriebenen antisymmetrischen Verformung der geneigten Zellwände im RVE ist eine Betrachtung des in der Abbildung dargestellten Ausschnitts ausreichend. Die Punkte A, B und M kennzeichnen die Mittelpunkte der geneigten Wände und der Verbindungsstelle. Der Punkt E markiert den Schnittpunkt der drei Zellwände im maßgebenden Ausschnitt.

#### 4.3.2 Modellbeschreibung zum Grundzustand III

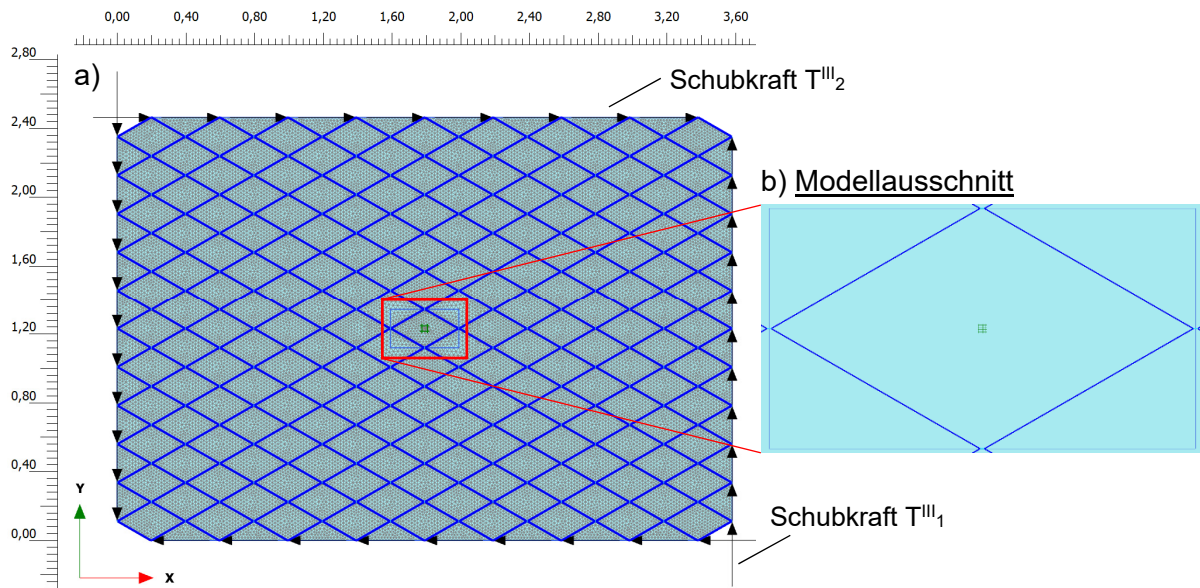
Zur besseren Veranschaulichung des Einflusses der Verbindungsstelle auf die Verformung des RVE wird gegenüber dem Grundzustand I und II ein abweichendes Berechnungsmodell verwendet. Verglichen zu dem in Kapitel 4.2.2 beschriebenen Modell wird hier für den Zellwinkel exemplarisch ein Wert von  $\theta = 30^\circ$  gewählt. Eine vollständige Übersicht zu den geometrischen Eigenschaften der Geozellen ist in Tabelle 4.6 dargestellt.

**Tab. 4.6:** Zellgeometrie zur Beispielrechnung mit der Finite-Elemente-Methode im Grundzustand III

$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$
0,398 m	0,224 m	0,002 m	0,225 m	0,0017 m	$30^\circ$

Die Materialeigenschaften der Zellwände und des Füllmaterial bleiben hingegen unverändert und können Tabelle 4.1 entnommen werden. Abbildung 4.23 zeigt das verwendete Modell

sowie den für die Betrachtung des Verbundverhaltens verwendeten Ausschnitt in Modellmitte. Das Modell umfasst demnach neun Zellen in x-Richtung und elf Zellen in y-Richtung. Durch den im vorherigen Kapitel beschriebenen fehlenden Widerstandes des Füllmaterials gegen eine reine Schubbeanspruchung wird die äußere Belastung über Kräfte äquivalent zu einer äußeren Randschubspannung  $\sigma_{12}^{III} = \tau_{12}^{III}$  abgebildet. Die äußeren Kräfte greifen hierbei an den Enden der jeweiligen Zellenwände an und erfüllen in Summe das globale Momentengleichgewicht. Für den oberen und unteren Modellrand werden die Kräfte pro Zelle, ähnlich zum Grundzustand IIa, auf die beiden Endpunkte der Verbindungsstelle verteilt (vgl. Abb. 4.1).



**Abb. 4.23:** FE-Modell für den Grundzustand III: a) Gesamtmodell und b) Modellausschnitt

Die äußeren Ränder des Modells sind frei verschieblich. Hingegen werden in Modellmitte vier Verschiebungsbedingungen zur Vermeidung numerischer Instabilitäten definiert. Die Verschiebungsbedingungen sind hierbei quadratisch in einem Abstand von 0,002 m in x- und y-Richtung von der Modellmitte aus angeordnet und unterbinden jeweils die beiden Freiheitsgrade der Verschiebung in x- und y-Richtung (grün markierte Quadrate in Abb. 4.23b). Vergleichsberechnungen mit variierendem Abstand zum Mittelpunkt zeigten, dass die Störung des Verschiebungsfeld hieraus vernachlässigbar gering ist. Eine Prüfung der Netzfeinheit ergibt eine ausreichende Genauigkeit für ein Modell mit 61986 Kontinuumselementen und 497.313 Knoten bei einer mittleren Elementgröße von 0,01806 m.

In der vorliegenden Beispielberechnung wird eine einheitliche äußere Schubspannung von  $\tau_{12}^{III} = 13 \text{ kN/m}^2$  verwendet. In Verbindung mit den in Tabelle 4.6 gewählten Zellenabmessungen von  $L_c = 0,398 \text{ m}$  und  $W_c = 0,224 \text{ m}$  ergeben sich für die äußeren Schubkräfte  $T_1^{III}$  und  $T_2^{III}$  folgende Werte.

$$T_1^{III} = \tau_{12}^{III} W_c = 13 \cdot 0,224 = 2,912 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \text{ und } T_2^{III} = \tau_{12}^{III} \frac{L_c}{2} = 13 \cdot \frac{0,398}{2} = 2,587 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad (4.59)$$

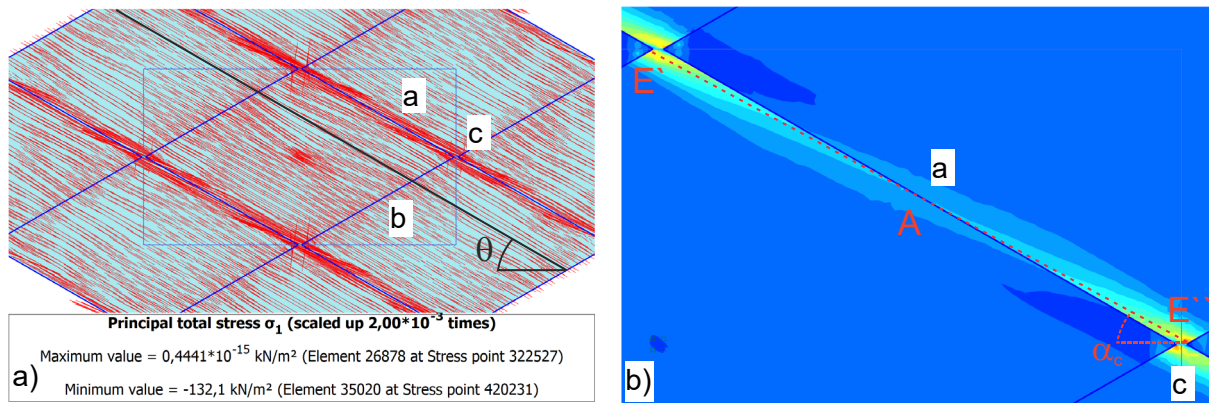
Demnach entspricht die resultierende äußere Kraft an der Ober- und Unterseite des Modells bezogen auf die Zelllänge  $L_c$  einer ganzen Geozelle der Kraft  $2T_2^{III}$ . Die tatsächlichen Werte

der äußeren Belastung  $T^{III}_1$  und  $T^{III}_2$  sind aufgrund des angenommen linear elastischen Materialverhaltens der Zellwände und des Füllmaterials unerheblich und dienen lediglich zur Veranschaulichung der wesentlichen Zusammenhänge des Verbundmaterials.

### 4.3.3 Äquivalentes statisches Ersatzsystem im Grundzustand III

#### 4.3.3.1 Ableitung des äquivalenten statischen Ersatzsystems

Wie bereits im Grundzustand I und II wird anhand des Modellverhaltens ein äquivalentes statisches System abgeleitet. Hierzu lässt sich Abbildung 4.24a eine Darstellung zu der maximalen Hauptspannungsrichtung im Bereich des Modellausschnitts entnehmen. Ergänzend sind in der Abbildung die beiden geneigten Zellwände als Wand a und b sowie die Verbindungsstelle als Wand c gekennzeichnet. Wegen des in Kapitel 4.3.1 beschriebenen Einflusses der nicht vorhandenen Zugfestigkeit des Füllmaterials stellt sich die maximale Hauptspannungsrichtung nicht unter  $45^\circ$  gegen die Horizontale ein, sondern verläuft in einem gewissen Abstand von den Verbindungsstellen unter dem Zellwinkel  $\theta$  nahezu parallel zu der geneigten Wand a.



**Abb. 4.24:** a) Maximale Hauptspannungstrajektorien im Bereich des Modellausschnitts und b) Verteilung der maximalen Hauptspannung entlang der geneigten Zellwand a

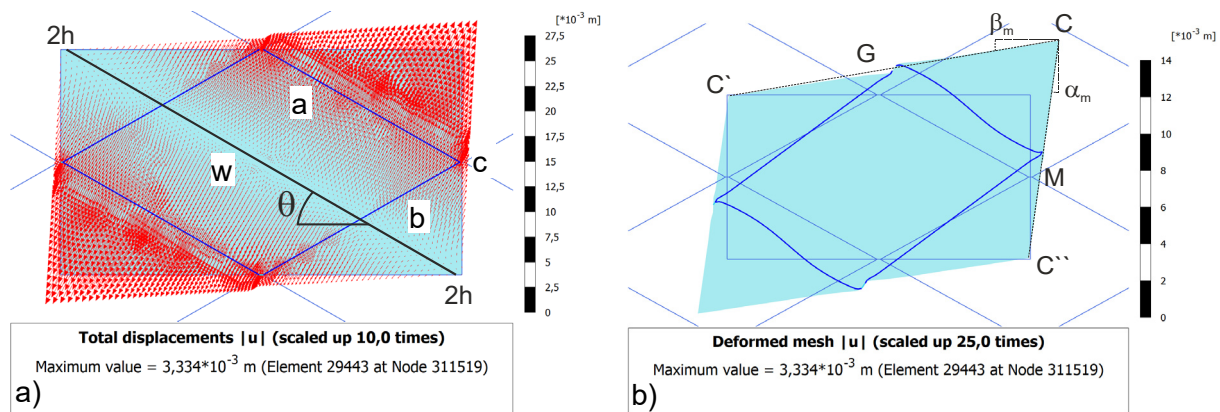
Die Verteilung der maximalen Hauptspannung ist hierbei jedoch nicht homogen, sondern es treten im Bereich der Verbindungsstelle Spannungskonzentrationen auf. Abbildung 4.24b verdeutlicht dies anhand der maximalen Hauptspannungsverteilung im Bereich der geneigten Wand a. Ausgehend von den Extremwerten der Spannungen in den Eckpunkten E' und E'' zweier benachbarter Verbindungsstellen verläuft die Spannungskonzentration entlang der geneigten Wand a und schneidet diese im Punkt A. Die Neigung entspricht jedoch nicht dem Zellwinkel  $\theta$ , sondern in Näherung der Neigung  $\alpha_c$  der Verbindungslinie zwischen den beiden Endpunkten E' und E'' der Verbindungsstellen. In Abhängigkeit der Zellgeometrie lässt sich die Neigung  $\alpha_c$  wie folgt definieren.

$$\alpha_c = \arctan\left(\frac{\frac{W_c}{2}}{2h + \frac{L_c}{2}}\right) = \arctan\left(\frac{l \sin \theta}{4h + l \cos \theta}\right) \quad (4.60)$$

$$\text{mit: } \begin{aligned} W_c &= 2l \sin \theta \\ L_c &= 2h + l \cos \theta \end{aligned}$$

Die minimale Hauptspannungsrichtung verläuft definitionsgemäß senkrecht zur Richtung der maximalen Hauptspannung. Aufgrund der nicht gegebenen Zugfestigkeit des Füllmaterials weist diese, wie bereits im Grundzustand I und II, einen vernachlässigbaren Wert auf. Eine grafische Darstellung hierzu kann Anhang C.1 entnommen werden.

Im Hinblick auf die maßgebenden Verformungen des Modellausschnitts zeigt Abbildung 4.25a die resultierenden Verschiebungsvektoren. Das Minimum der Verschiebungen tritt hierbei entlang der in der Abbildung dargestellten Geraden  $w$  in Richtung der maximalen Hauptspannungen auf (vgl. Abb. 4.24a). Weiterhin wird ersichtlich, dass die Verschiebungen eine weitestgehend einheitliche Richtung aufweisen und mit größer werdendem Abstand von der Geraden zunehmen. Hierbei verläuft die Verschiebungsrichtung nicht lotrecht zu der Geraden, sondern entspricht weitestgehend der minimalen Hauptspannungsrichtung. Zur besseren Veranschaulichung kann Anhang C.1 eine ergänzende Darstellung mit einer Länge der Verbindungsstelle von  $h = 25$  mm entnommen werden.



**Abb. 4.25:** a) Vektorielle Darstellung zur Verschiebung und b) Verformungsbild des Modellausschnitts. Somit kann festgestellt werden, dass das Verbundmaterial im Modellausschnitt ein abweichendes Verformungsverhalten in Richtung der maximalen und minimalen Hauptspannung aufweist. Dieses lässt sich durch die gegebene Druckfestigkeit in maximaler Hauptspannungsrichtung und die fehlende Zugfestigkeit in minimaler Hauptspannungsrichtung erklären.

Für eine weitergehende Betrachtung des Verformungsverhaltens und zur Bestimmung der Gleitung  $\gamma_{12}$  werden die Verschiebungen der in Abbildung 4.25b gekennzeichneten Punkte herangezogen. Abweichend zu den theoretischen Verformungen gemäß Abbildung 4.21a treten für den Modellausschnitt in den Punkten  $G$  und  $M$  neben Verschiebungskomponenten parallel zu den Rändern zusätzlich Verschiebungskomponenten normal hierzu auf. Die Verschiebungen erfüllen, wie nachfolgend anhand der Relativverschiebungen zweier benachbarter Punkte gezeigt wird, die Eigenschaften der Periodizität. Für den in Abbildung 4.25b betrachteten Modellausschnitt lassen sich die Relativverschiebungen, ausgedrückt durch die Verschiebungsdifferenzen zwischen den verschiedenen Punkten, Tabelle 4.7 entnehmen.

Aus den Relativverschiebungen werden zwei wesentliche Zusammenhänge zum Materialverhalten des Verbundmaterials ersichtlich. Zum einen sind die Relativverschiebungen zweier

benachbarter Punkte bedingt durch die Periodizität entlang einer Seite des Modellausschnittes einander identisch. Zum anderen entsprechen die Absolutverschiebung  $u_x^G$  im Punkt G und die Absolutverschiebung  $u_y^M$  im Punkt M den für die Winkeländerung  $\alpha$  und  $\beta$  jeweils maßgebenden Verschiebungen (grau unterlegte Zellen). Die geringfügigen Abweichungen der Verschiebungen sind auf eine gewisse Ungenauigkeit der FE-Berechnung zurückzuführen. Folglich gilt auch für ein befülltes Zellsystem unter reiner Schubbeanspruchung der in Abbildung 4.21a dargestellt Zusammenhang und die Gleitung  $\gamma_{12}$  lässt sich aus der Definition nach Gleichung (4.55) über die Absolutwerte der Verschiebung der Punkte G und M ermitteln.

**Tab. 4.7:** Verschiebungsdifferenzen entlang der beiden Seiten C'-C und C''-C für die exemplarische Modellierung in [mm]

Verschiebungen entlang der Seite C'-C									
Punkt C'		Punkt G		Punkt C		Punkt C'-G		Punkt G-C	
$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$	$\Delta u_x$	$\Delta u_y$	$\Delta u_x$	$\Delta u_y$
0,0797	-0,0652	0,8080	1,447	1,536	2,959	0,7283	1,512	0,7280	1,512
Verschiebungen entlang der Seite C''-C									
Punkt C''		Punkt M		Punkt C		Punkt C''-M		Punkt M-C	
$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$	$u_x$	$u_y$	$\Delta u_x$	$\Delta u_y$	$\Delta u_x$	$\Delta u_y$
-0,0782	0,0680	0,7286	1,515	1,536	2,959	0,8068	1,444	0,8074	1,444

Gemäß der Definitionen nach Kapitel 3.3 sind im Rahmen der Homogenisierung die mittleren Gleitungen des diskreten mit denen des homogenen Verbundmaterials gleichzusetzen. Demzufolge werden die aus Abbildung 4.25b folgenden, bereichsweise uneinheitlichen Winkeländerungen durch die mittlere Winkeländerungen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  ersetzt. Unter Berücksichtigung der Antimetrie des Modellausschnitts sowie der Definition nach Gleichung (4.56) lässt sich folglich die mittlere Gleitung über die Verschiebungen  $u_x^G$  und  $u_y^M$  bestimmen zu

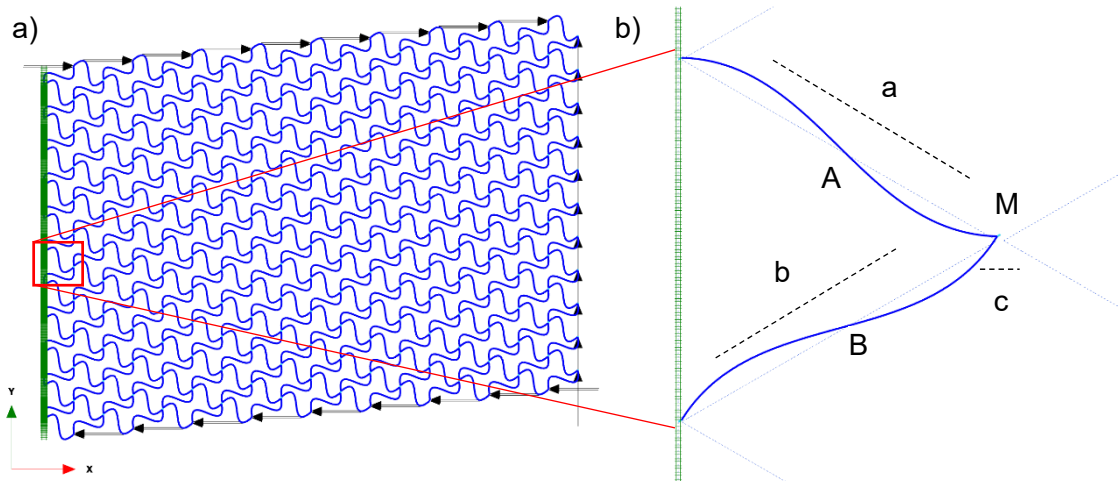
$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{12}^* &= \alpha_m + \beta_m = \frac{u_x^G}{\frac{W_c}{2}} + \frac{u_y^M}{\frac{L_c}{2}} \\ &= \frac{8,080 \cdot 10^{-4}}{\frac{0,224}{2}} + \frac{1,515 \cdot 10^{-4}}{\frac{0,398}{2}} = 7,21 \cdot 10^{-3} + 7,61 \cdot 10^{-3} = 1,48 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}\quad (4.61)$$

Aus der Betrachtung der Zahlenwerte für die mittleren Winkeländerungen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  wird ersichtlich, dass im vorliegenden Fall  $\alpha_m \neq \beta_m$  gilt. Demnach wäre eigentlich eine Ermittlung beider Winkeländerungen notwendig und die Definition nach Gleichung (4.57) ist nicht mehr anwendbar. Jedoch fallen die Unterschiede zwischen den beiden Winkeländerung gering aus, sodass nachfolgend für ein befülltes Zellsystem vereinfacht von einer einheitlichen mittleren Winkeländerung mit  $\alpha_m = \beta_m$  ausgegangen wird.

Zur genaueren Beurteilung des Einflusses des Füllmaterials auf die Schnittgrößen der Zellwände wurde eine ergänzende Beispielsberechnung nur an der Zellstruktur ohne Füllmaterial durchgeführt. Das Modell entspricht weitestgehend dem nach Abbildung 4.23 definierten



Modell. Da gemäß Kapitel 3.4.2.2 die Zellstruktur die Bedingung einheitlicher Winkeländerungen mit  $\alpha_m = \beta_m$  erfüllt, wird jedoch anstelle einer allseitigen äußeren Schubbelastung die äquivalente Darstellung entsprechend Abbildung 4.21b mit einer linksseitig angeordneten Verschiebungsrandbedingung verwendet. Demzufolge werden die Verschiebungen am linken Modellrand in x- und y-Richtung unterbunden. An den restlichen Modellrändern werden hingegen weiterhin äußere Schubkräfte  $T^{III}_1$  und  $T^{III}_2$  gemäß der in Gleichung (4.59) definierten Werte vorgegeben. Abbildung 4.26 zeigt die Ergebnisse der Berechnung anhand der deformierten Zellstruktur des Gesamtsystems und eines Modellausschnitts am linken Rand.



**Abb. 4.26:** Verformungsbild für a) das Gesamtsystem und b) einen Modellausschnitt im unbefüllten Fall. Aus der genaueren Betrachtung von Abbildung 4.26a wird ersichtlich, dass die einzelnen Zellen im System ein periodisches Verformungsbild aufweisen. Wie aus der deformierten Struktur im Modellausschnitt nach Abbildung 4.26b ersichtlich wird, erfährt die Verbindungsstelle c nur eine Verschiebung in y-Richtung, während die geneigten Wänden a und b einen einheitlichen Drehsinn um die Verbindungsstelle c besitzen. Weiterhin treten bei den Mittelpunkte A und B der geneigten Wände keine Verschiebungen in x-Richtung auf und es liegen dort Wendepunkte der Biegelinie vor. Dementsprechend nehmen die Biegemomente in den Punkten A und B einen Wert von Null an. Eine ergänzende Übersicht zu den wesentlichen Zusammenhängen der Schnittgrößen in den geneigten Zellwänden a und b sowie der Verbindungsstelle c für unbefüllte und befüllte Zellen kann Tabelle 4.8 entnommen werden.

Der Vergleich verdeutlicht die Unterschiede in dem Systemverhalten. Während infolge des horizontalen Kräftegleichgewichts für die unbefüllten Zellen in der Verbindungsstelle c keine Normalkraft auftritt, liegt für diese bei befüllten Zellen eine Zugkraft in etwa der äußeren Belastung  $2T^{III}_2$  vor. Infolge der Wirkungsrichtung des Füllmaterials entlang der geneigten Zellwand a (vgl. Abb. 4.24), wird diese durch das Füllmaterial entlastet und die Druckbeanspruchung geht in eine geringfügige Zugbeanspruchung über. Dementgegen bleibt die Normalkraft in der Zellwand b wegen der vernachlässigbar geringen minimalen Hauptspannung  $\sigma_3$  weitestgehend unverändert. Die Querkräfte und Biegemomente in den geneigten Wänden a und b streben bei hoher Füllmaterialsteifigkeit gegen einen Wert von Null. Lediglich in den Eckbereichen



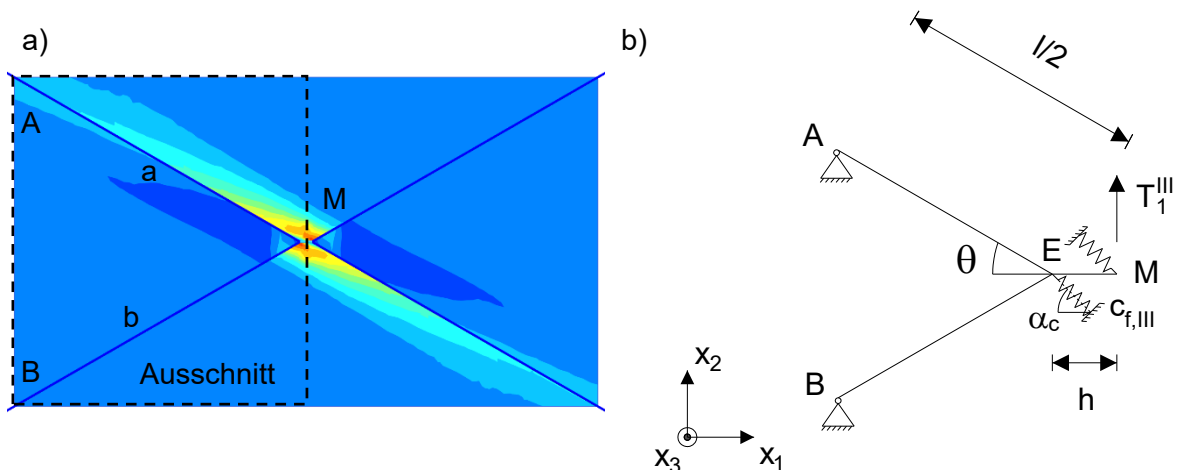
treten infolge des lokalen Einflusses der Biegesteifigkeit gewisse Konzentration auf. Die Werte der Querkraft und des Biegemomentes in der Verbindungsstelle nehmen zwar durch die Wirkung des Füllmaterials ebenfalls ab, werden jedoch nicht null.

**Tab. 4.8:** Übersicht zu den Schnittgrößen in den Zellwänden für den unbefüllten und befüllten Fall im Grundzustand III

Wand	Normalkraft N	Querkraft Q	Schnittmoment M	
			Schnittpunkt E	Wandmittelpunkte A, B und C
Schnittgrößen für das unbefüllte Zellsystem				
Wand c	$N_c = 0$	$Q_c = -T^{III}_1$	$M^E_c = T^{III}_1 \cdot h$	$M^M_c = 0$
Wand a	$N_a = -N_b$	$Q_a$	$M^E_a = -T^{III}_1 \cdot h/2$	$M^A_a = 0$
Wand b	$N_b$	$Q_b = Q_a$	$M^E_b = M^E_a$	$M^B_b = 0$
Schnittgrößen für das befüllte Zellsystem				
Wand c	$N_c \rightarrow 2T^{III}_2$	$Q_c \neq 0$	$M^E_c \neq 0$	$M^M_c = 0$
Wand a	$N_b > N_a > 0$	$Q_a \rightarrow 0$	$M^E_a \rightarrow 0$	$M^A_a = 0$
Wand b	$N_b$	$Q_b \rightarrow 0$	$M^E_b \rightarrow 0$	$M^B_b = 0$

Unabhängig von dem Ansatz eines Füllmaterials bleiben die Wendepunkte der Biegelinie in den Zellwänden erhalten, sodass für die Biegemomente in den Mittelpunkten A, B und C weiterhin ein Wert von Null vorliegt. Eine grafische Gegenüberstellung der Schnittgrößen für die drei Zellwände a, b und c im unbefüllten und befüllten Fall ist Anhang C.1 beigelegt.

Entgegen dem Grundzustand I und II konnte für den Grundzustand III kein Ersatzsystem abgeleitet werden, welches das Verbundverhalten vollständig wiedergibt. Das nachfolgend definierte System stellt lediglich eine Näherungslösung zur Abbildung der wesentlichen Eigenschaften des befüllten Zellsystems dar. Unter Berücksichtigung des in Abbildung 4.22 gewählten RVE zeigt Abbildung 4.27 den Übergang zu dem äquivalenten statischen System.



**Abb. 4.27:** a) Ausschnitt zur maximalen Hauptspannungsverteilung und b) äquivalentes statisches System für den Grundzustand III

Das Ersatzsystem umfasst unter Ausnutzung der antimetrischen Eigenschaften jeweils die Länge  $l/2$  der geneigten Zellwand a und b mit einer Wanddicke  $t$  sowie die Länge  $h$  der Verbindungsstelle c mit einer doppelten Wanddicke  $2t$ . Für das so definierte System fallen die

Eckpunkte A, B und M mit den jeweiligen Wendepunkten der Biegelinie zusammen. Zur Abbildung des aus der Periodizität resultierenden Nulldurchgangs der Momentenverteilung für das unbefüllte und befüllte Zellsystem gemäß Tabelle 4.8 wird in den Punkten A und B jeweils ein zweiwertiges gelenkiges Auflager angeordnet. Die äußere Belastung  $T^{III}_1$  wirkt im Mittelpunkt M der Verbindungsstelle.

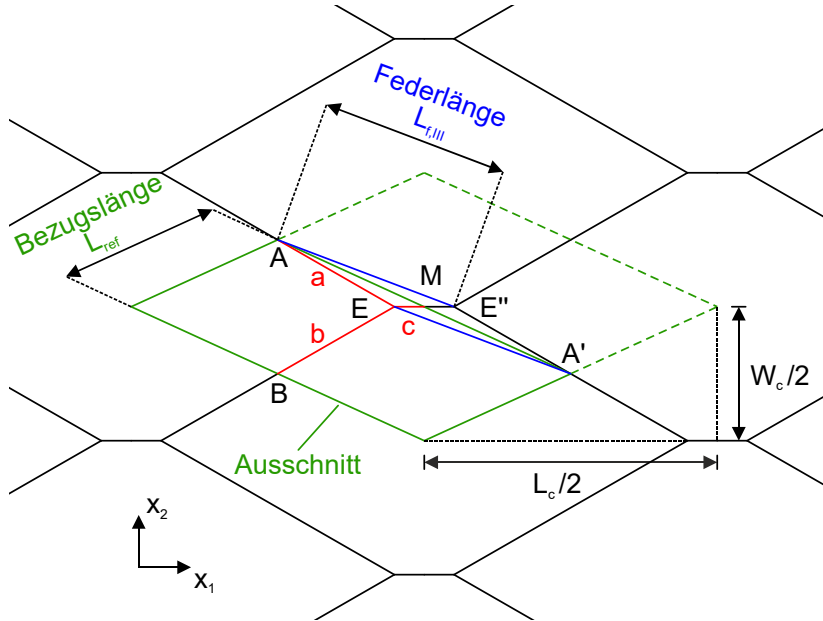
Der Ansatz zur Abbildung des Füllmaterials im Ersatzsystem lässt sich aus der Verteilung der maximalen Hauptspannung nach Abbildung 4.27a ableiten. Aufgrund der geringen Biegesteifigkeit der Zellwände verglichen zur Füllmaterialsteifigkeit treten die Maximalwerte im Bereich der beiden Endpunkte E' und E'' jeweils an der Ober- und Unterseite der Verbindungsstelle c auf. Die Reaktion des Füllmaterials an der Unterseite wird, wie in Abbildung 4.27b dargestellt, vereinfacht durch eine Einzelfeder im Punkt E abgebildet. Zur Berücksichtigung der Füllmaterialreaktion an der Oberseite wird der Angriffspunkt in den Punkt M verschoben und ebenfalls vereinfacht über eine Einzelfeder abgebildet. Dementsprechend fallen die Angriffspunkte der oberen Feder und der äußeren Belastung  $T^{III}_1$  zusammen, womit sich die in Tabelle 4.8 angegebene Entstehung von Normalkräften bei gleichzeitiger Abnahme der Querkräfte und Schnittmomente infolge des Füllmaterials abbilden lässt. Der unteren Feder kommt hingegen hauptsächlich die Aufgabe eines Entgegenwirkens der Verdrehung der Verbindungsstelle c und eine Abminderung der Normalkraft in der geneigten Wand a durch das Füllmaterial zu (vgl. Tab. 4.8). Beide Federn besitzen die gleiche Federkonstante  $c_{f,III}$  und sind gemäß der zu Abbildung 4.24b beschriebenen maximalen Hauptspannungsrichtung unter dem Winkel  $\alpha_c$  gegen die Horizontale geneigt.

Bei dem so definierten Ersatzsystem wird vorausgesetzt, dass die beiden mittleren Winkeländerungen  $\alpha_m$  und  $\beta_m$  einander identisch sind. Für die unbefüllte Zellstruktur stellt dies einen korrekten Ansatz dar, wohingegen der Ansatz von  $\alpha_m = \beta_m$  für das befüllte Zellsystem gemäß Gleichung (4.61) nur in Näherung gilt. Wie bereits in Kapitel 3.4.2.2 angeführt wurde, ist unter dieser Voraussetzung der Ansatz der äußeren Schubkraft  $T^{III}_1$  im Punkt M ausreichend. Die äußere Schubkraft  $T^{III}_2$  tritt in dem System nur indirekt durch die horizontalen Auflagerreaktionen in den beiden zweiwertigen Auflagern auf und dient ausschließlich zur Einhaltung des Momentengleichgewichts am Ersatzsystem. Eine Beurteilung der Genauigkeit des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  unter Voraussetzung einer einheitlichen mittleren Winkeländerungen mit  $\alpha_m = \beta_m$  erfolgt in Kapitel 5.3.3.

#### 4.3.3.2 Bestimmung der Federkonstanten $c_{f,III}$

Im Hinblick auf die Ermittlung der maßgebenden Federkonstanten  $c_{f,III}$  für die beiden in Abbildung 4.27b dargestellten Federn sind zusätzliche Überlegungen notwendig. Eine schematische Darstellung hierzu zeigt Abbildung 4.28 mit den relevanten geometrischen Größen. Unter Berücksichtigung der Periodizität der Zellstruktur sowie den Abmessungen des maßgebenden Ausschnitts gemäß Abbildung 4.22 resultiert die Reaktion des Füllmaterials für das

Ersatzsystem aus dem grün umrandeten Bereich. Dieser besitzt eine Breite  $L_{ref}$ , welche sich vereinfacht aus der Querschnittsfläche  $A_{RVE,III}$  des RVE in Richtung der maximalen Hauptspannungen ableiten lässt (s. Abb. 4.24a). Da die Reaktion des Füllmaterials sowohl an der Ober- und Unterseite der Verbindungsstelle c auftritt (vgl. Abb. 4.27b), umfasst der betrachtete Ausschnitt eine Länge entsprechend der zweifachen Federlänge  $L_{f,III}$ .



**Abb. 4.28:** Feder- und Bezugsgröße im Grundzustand III

In Übereinstimmung mit den Beschreibungen zu Abbildung 4.24b wird die Federlänge  $L_{f,III}$  sowohl für die untere als auch die obere Feder durch die Verbindungsgröße der Punkte A und E'' bzw. E und A' definiert. Mit den in Abbildung 4.28 angegebenen Abmessungen des Ausschnitts lässt sich somit die Federkonstante  $c_{f,III}$  der beiden Federn über die Zellgeometrie und die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  wie folgt ausdrücken.

$$c_{f,III} = \frac{E_f A_{ref,III}}{L_{f,III}} = E_f H_c \left[ \frac{\left(\frac{L_c}{4}\right)^2 + \left(\frac{W_c}{4}\right)^2}{\left(h + \frac{L_c}{4}\right)^2 + \left(\frac{W_c}{4}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = E_f H_c \left[ \frac{(2h + L \cos \theta)^2 + (L \sin \theta)^2}{(4h + L \cos \theta)^2 + (L \sin \theta)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.62)$$

mit: Querschnittsfläche von Ausschnitt in Federrichtung  $A_{ref,III} = H_c L_{ref}$

Bezugsgröße von Ausschnitt  $L_{ref} = \sqrt{(L_c/4)^2 + (W_c/4)^2}$

Federlänge  $L_{f,III} = \sqrt{(L_c/4 + h)^2 + (W_c/4)^2}$

Eine genauere Betrachtung des statischen Ersatzsystems gemäß Abbildung 4.27b zeigt, dass für eine rhombische Zellform mit einer Länge der Verbindungsstelle von  $h = 0$  die Angriffspunkte der Federn im Punkt E zusammenfallen und sich die resultierende Federwirkung durch eine Parallelschaltung der beiden Federn zu einer Einzelfeder abbilden lässt. Durch Einsetzen von  $h = 0$  in Gleichung (4.62) und Aufsummierung der beiden Federkonstanten ergibt sich

$$c_{f,III}^{Rhombus} = \underbrace{c_{f,III}^o + c_{f,III}^u}_{\text{Parallel-schaltung}} = 2c_{f,III} = 2E_f H_c. \quad (4.63)$$

mit:  $c_{f,III}^o = c_{f,III}^u = c_{f,III}$

Folglich beträgt die Federkonstante dieser Einzelfeder bei einer rhombischen Zellform das Zweifache der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  multipliziert mit der Zellhöhe  $H_c$ . Im Hinblick auf die periodischen Eigenschaften und die Abmessungen des maßgebenden Ausschnitts im RVE stellt dies einen sinnvollen Zusammenhang dar. Weiterhin geht für  $h = 0$  die nach Gleichung (4.60) definierte Federneigung  $\alpha_c$  korrekterweise in den Zellwinkel  $\theta$  über.

#### 4.3.4 Äquivalenter Schubmodul im Grundzustand III

Durch die in Kapitel 4.3.3.1 getroffenen Annahme einer einheitlichen mittleren Winkeländerung mit  $\alpha_m = \beta_m$ , auch für ein befülltes Zellsystem, ist zur Ermittlung der mittleren homogenen Gleitung  $\bar{\gamma}_{12}^*$  nur die Berechnung der Verschiebung  $u_y^M$  an dem äquivalenten statischen Ersatzsystem gemäß Abbildung 4.27b notwendig. Bei dem Ersatzsystem handelt es sich um ein dreifach statisch überstimmtes System. Folglich wären zur Lösung dieses mittels dem Pvk drei statisch bestimmte Teilsysteme mit drei statisch Überzähligen notwendig. Durch Ausnutzung von Antimetrie- und Symmetrieeigenschaften lässt sich dieses jedoch als zweifach statisch unbestimmtes System berechnen, wobei dann zusätzlich zwei einfach statisch überstimmte Untersysteme zu lösen sind. In Abbildung 4.29 sind die statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$  mit den Auflagerreaktionen sowie die lokalen Koordinatensysteme  $\xi_i$  dargestellt. Als statisch Überzählige werden die beiden Federkräfte  $C_{1,III}$  und  $C_{2,III}$  gewählt.

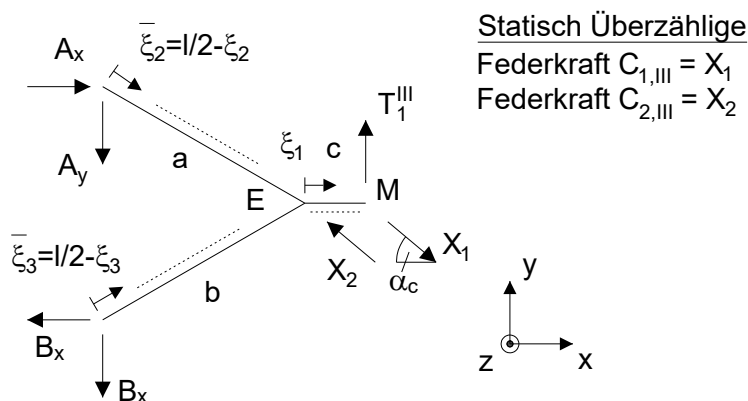


Abb. 4.29: Auflagerreaktionen im Grundzustand III

Die zur Bestimmung der statisch Überzähligen notwendigen Kompatibilitätsbedingungen lauten im Grundzustand III folgendermaßen.

$$u_{X_1}^M = -\frac{X_1}{c_{f,III}} \text{ und } u_{X_2}^E = -\frac{X_2}{c_{f,III}} \quad (4.64)$$

Bereits für dieses verhältnismäßig einfache System ist die Lösung mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden und eine Angabe der zugehörigen Gleichungen wenig zielführend. Aus diesem Grund werden nachfolgend nur die Ergebnisse für die beiden Grenzwertbetrachtungen einer Federkonstante mit  $c_f \rightarrow 0$  und einer Wanddicke mit  $t \rightarrow 0$  angegeben. Zur Berechnung der allgemeinen Näherungslösung wurde ein Matlab-Skript geschrieben, welches Anhang C.2 entnommen werden kann. Ebenfalls lässt sich dem Anhang eine Beschreibung des Lösungsweges bis einschließlich der statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$  entnehmen. Gemäß

Kapitel 4.2.7.1 sind für die Grenzwertbetrachtung bei einer sehr geringen Wanddicke mit  $t \rightarrow 0$  die Wandsteifigkeiten in Abhängigkeit der Wanddicke  $t$  auszudrücken. Unter Annahme eines rechteckigen Querschnitts der Zellwände sind diese für die geneigten Wände  $a$  und  $b$  mit einfacher Wanddicke  $t$  sowie die Verbindungsstelle  $c$  mit doppelter Wanddicke  $2t$  folgendermaßen definiert.

$$\begin{aligned} EA_{cw} &= E_{cw}tH_c, EA_{2cw} = E_{cw}2tH_c = 2EA_{cw} \\ GA_{cw} &= \frac{5E_{cw}tH_c}{12}, GA_{2cw} = G_{cw}2tH_c = 2GA_{cw} \\ EI_{cw} &= \frac{E_{cw}t^3H_c}{12}, EI_{2cw} = \frac{E_{cw}(2t)^3H_c}{12} = 8EI_{cw} \end{aligned} \quad (4.65)$$

Durch die beiden Grenzwertbetrachtung mit  $c_f \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  ergeben sich aus der allgemeinen Lösung folgende Gleichungen für die beiden Federkräfte  $C_{1,III}$  und  $C_{2,III}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{c_f \rightarrow 0} C_{1,III} = X_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} C_{1,III} = X_1 &= \frac{T_1^{III}}{\sin \alpha_c} \\ \lim_{c_f \rightarrow 0} C_{2,III} = X_2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} C_{2,III} = X_2 &= \frac{T_1^{III}}{\sin \alpha_c} \frac{\cos^2 \alpha_c \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c} \end{aligned} \quad (4.66)$$

mit:  $\tan \alpha_c = l \sin \theta / (4h + l \cos \theta)$

Wie bereits in den Grundzuständen I und II reduziert sich somit die Lösung für sehr schlanke Zellwände mit  $t \rightarrow 0$  zu einem rein geometrischen Zusammenhang zwischen der Federkraft und der äußeren Belastung  $T_1^{III}$ . Im Fall einer Federkonstante von  $c_f \rightarrow 0$  zeigt sich, dass die Federkräfte einen Wert von Null annehmen. Folglich gibt das nach Abbildung 4.27b definierte Ersatzsystem den Übergang zu einem unbefüllten Zellsystem korrekt wieder.

Die Verschiebung  $u_y^M$  entspricht direkt der maßgebenden Verschiebung  $u_2^{III}$  im Grundzustand III. Zur Bestimmung dieser wird der Satz nach Castigliano mit der partiellen Ableitung der Formänderungsenergie  $U$  nach der äußeren Last  $T_1^{III}$  angewendet. Die maßgebende Verschiebung für den Fall ohne Füllmaterial mit  $c_f \rightarrow 0$  lässt sich damit wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned} \lim_{c_f \rightarrow 0} u_2^{III} &= T_1^{III} \left[ \overbrace{h \left( \frac{1}{GA_{2cw}} + \frac{h^2}{3EI_{2cw}} \right)}^{h\text{-Wand}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{l}{4EA_{cw}} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right)^2 + \frac{l}{4GA_{cw}} \left( \frac{\sin \theta}{\tan \alpha_g} - \cos \theta \right)^2 + \frac{h^2 l}{12EI_{cw}}}_{l\text{-Wände}} \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

mit:  $\tan \alpha_g = l \sin \theta / (2h + l \cos \theta)$

Die Verschiebung  $u_2^{III}$  bei einer sehr geringen Wanddicke mit  $t \rightarrow 0$  wird vereinfacht nur über die Formänderungsenergie der Normalkräfte sowie die der beiden Federkraft  $C_{1,III}$  und  $C_{2,III}$  ermittelt (s. Anhang C.2). Für eine korrekte Bestimmung der Verschiebung  $u_2^{III}$  im Fall  $t \rightarrow 0$

wäre hingegen eine Grenzwertbetrachtung an der allgemeinen Lösung der Gleichung notwendig. Da sich hieraus im Hinblick auf die Gleichungslänge kein wesentlicher Vorteil gegenüber der allgemeinen Näherungslösung zeigt, wird deshalb die vereinfachte Betrachtung nur über die Normalkräfte in den Zellwänden und die beiden Federkräfte herangezogen. Die Gleichung für die Verschiebung  $u_{22}^{III}$  lautet damit

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{22}^{III} = T_1^{III} \left\{ \frac{\overbrace{h}^{h\text{-Wand}}}{\tan^2 \alpha_c EA_{2cw}} + \frac{\overbrace{l \{ [\sin(2\alpha_c - \theta) - \sin\theta]^2 + [\sin(2\alpha_c + \theta) + \sin\theta]^2 \}}^{l\text{-Wände}}}{32EA_{cw}(\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c)^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin^2\alpha_c c_f} \left[ 1 + \frac{\sin^4\theta\cos^4\alpha_c}{(\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c)^2} \right] \right\}. \quad (4.68)$$

*Anteil der Federn*

Das Vorgehen zur Bestimmung des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  stimmt mit dem zur Ermittlung der äquivalenten Druck- und Zugmodule in den Grundzuständen I und II überein. Gemäß Kapitel 3.4.1 wird im Rahmen der Homogenisierung von einer Äquivalenz der mittleren Dehnungen und Spannungen des diskreten und homogenen Verbundmaterials ausgegangen. Mit der Annahme einer einheitlichen mittleren Winkeländerungen  $\alpha_m = \beta_m$  lässt sich über die Definition nach Gleichung (4.57), wie zuvor beschrieben, die mittlere Gleitung nur aus der Verschiebung  $u_{22}^{III}$  ermitteln. Unter Berücksichtigung der Abmessungen des in Abbildung 4.22 definierten RVE ergeben sich die mittlere Gleitung und Schubspannung aus

$$\bar{\gamma}_{12}^* = \bar{\gamma}_{12} = 2\beta_m = 2 \frac{u_{22}^{III}}{\frac{L_c}{2}} = \frac{u_{22}^{III}}{\frac{L_c}{4}} = \frac{u_{22}^{III}}{h + \frac{l}{2}\cos\theta} \quad \text{und} \quad \bar{\tau}_{12}^* = \bar{\tau}_{12} = \frac{T_1^{III}}{2l\sin\theta H_c}. \quad (4.69)$$

Unter Voraussetzung eines linearen Spannungs-Dehnungs-Verhaltens des homogenen Verbundmaterials lässt sich hieraus der äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$  folgendermaßen ermitteln.

$$G_{12}^* = \frac{\bar{\tau}_{12}^*}{\bar{\gamma}_{12}^*} = \frac{T_1^{III}}{u_{22}^{III}} \frac{2h + l\cos\theta}{4l\sin\theta H_c} \quad (4.70)$$

Die äquivalenten Schubmodule für die beiden Grenzfälle  $c_f \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$  folgen durch Einsetzen der mittleren Schubspannung und Gleitungen nach Gleichung (4.69) unter Berücksichtigung der Verschiebung  $u_{22}^{III}$  nach Gleichung (4.67) und (4.68) in die Definition von Gleichung (4.70). Somit lässt sich der äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$  im Grundzustand III bei reiner Schubbeanspruchung entsprechend Gleichung (4.71) und (4.72) berechnen.

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} G_{12}^* = \frac{(2h + l\cos\theta)}{4l\sin\theta H_c} \frac{1}{Y_h^{III} + Y_l^{III}} \quad (4.71)$$

mit: Anteil  $Y_h^{III} = h \left( \frac{1}{GA_{2cw}} + \frac{h^2}{3EI_{2cw}} \right)$

Anteil  $Y_l^{III} = \frac{l}{4EA_{cw}} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right)^2 + \frac{l}{4GA_{cw}} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)^2 + \frac{h^2 l}{12EI_{cw}}$

$\tan\alpha_g = l\sin\theta / (2h + l\cos\theta)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_{12}^* = \frac{(2h + l \cos \theta)}{4l \sin \theta H_c} \frac{1}{Y_h^{III} + Y_l^{III} + Y_c^{III}} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \text{mit: Anteil } Y_h^{III} &= \frac{h}{\tan^2 \alpha_c E A_{2cw}} \\ \text{Anteil } Y_l^{III} &= \frac{l \{ [\sin(2\alpha_c - \theta) - \sin \theta]^2 + [\sin(2\alpha_c + \theta) + \sin \theta]^2 \}}{32 E A_{cw} (\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c)^2} \\ \text{Anteil } Y_c^{III} &= \frac{1}{\sin^2 \alpha_c c_{f,III}} \left[ 1 + \frac{\sin^4 \theta \cos^4 \alpha_c}{(\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c)^2} \right] \\ \tan \alpha_c &= l \sin \theta / (4h + l \cos \theta) \end{aligned}$$

Die zugehörigen Definition der Wandsteifigkeiten bei einfacher und doppelter Wanddicke können Gleichung (4.65) entnommen werden. Wird für den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  im Fall ohne Füllmaterial mit  $c_f \rightarrow 0$  nur der Biegeanteil der Wandverschiebung herangezogen, so nimmt Gleichung (4.71) korrekterweise den Ausdruck nach Gleichung (3.26) in Kapitel 3.4.2.3 an. Ein weiterer Nachweis zur analytischen Lösung für  $c_f \rightarrow 0$  ergibt sich aus der Betrachtung einer rhombischen Zellform mit einer Länge der Verbindungsstelle von  $h = 0$  und einem Winkel von  $\alpha_g = \theta$  ersichtlich. In diesem Fall werden die Biege- und Schubanteile in Gleichung (4.71) null und der Schubmodul  $G_{12}^*$  hängt nur von den axialen Wandverschiebungen ab. Da eine rhombische Zellstruktur ohne Füllmaterial mit einer ausschließlichen Belastung durch Punktlasten in den Stabknoten ein Fachwerk darstellt, wirken dort nur Normalkräfte als Schnittgrößen und es treten nur Axialverschiebungen auf. Folglich spiegelt Gleichung (4.71) auch diesen Zusammenhang korrekt wider. Abschließend lässt sich feststellen, dass das in Abbildung 4.27b gewählte äquivalente statische System und damit die allgemeine Näherungslösung für den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  den Übergang zu einem unbefüllten Zellsystem mit  $c_f = 0$  korrekt abbildet. Hingegen stellt die allgemeine Lösung für den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  im Fall eines Füllmaterials mit einer Federkonstante  $c_f > 0$  lediglich eine Näherungslösung dar.

## 4.4 Übersicht zu den äquivalenten Materialkennwerten

Mit den in Kapitel 4.2 und 4.3 beschriebenen Herleitungen stehen nunmehr für alle äquivalenten Materialkennwerte in der Aufspannebene Bestimmungsgleichungen zur Verfügung. Infolgedessen lässt sich das orthotrope Materialverhalten des diskreten Verbundmaterials Geozelle-Boden in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene vollständig durch ein homogenes Material mit äquivalenten Materialkennwerten beschreiben. Die verschiedenen Bestimmungsgleichungen hängen hierbei nur von den geometrischen Zelleigenschaften der Wanddicke  $t$ , der Zellhöhe  $H_c$ , der Länge  $h$  der Verbindungsstelle und der geneigten Zellwandlänge  $l$  sowie den mechanischen Eigenschaften des Füllmaterials  $E_f$  und des Zellwandmaterials  $E_{cw}$  ab. Durch die getrennten Betrachtung der verschiedenen Grundzustände weisen die äquivalenten Materialkennwerte zusätzlich eine Abhängigkeit von den jeweiligen Randbedingungen auf, welche bei einem Übertrag der Kennwerte auf mechanische Tragwerksmodelle zu berücksichtigen ist (s. Kap. 7).

Eine Grenzwertbetrachtung für unbefüllte Geozellen mit  $c_f \rightarrow 0$  verdeutlicht, dass die allgemeinen Bestimmungsgleichungen den Übergang zu Zellstrukturen ohne Füllmaterial korrekt

abbilden. Entgegen der in Kapitel 3.4.3 beschriebenen Lösung von Abd El-Sayed (1976) setzt die hier abgeleitete Lösung keine Wirkung des Füllmaterials voraus, womit eine Allgemeingültigkeit für beliebige Elastizitätsmodule  $E_f$  und  $E_{cw}$  gegeben ist. Zur Ableitung vereinfachter Bestimmungsgleichungen für den Großteil gängiger Geozellenprodukte mit sehr schlanken Zellwänden wurde zusätzlich eine Grenzwertbetrachtung über die Wanddicke mit  $t \rightarrow 0$  an den allgemeinen Bestimmungsgleichungen durchgeführt. In diesem Fall hängen die äquivalenten Materialkennwerte neben den geometrischen Größen nur von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Zellwände ab. Wie für unbefüllte Geozellen gibt die allgemeine Lösung somit auch den Zusammenhang sehr schlanker Zellwände mit einer verhältnismäßig hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  korrekt wieder. Eine zusammenfassende Übersicht aller Bestimmungsgleichungen lässt sich Anhang C.3 entnehmen.

Eine Plausibilitätsprüfung der allgemeinen Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten wird in Kapitel 5.3 anhand Vergleichsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt. Im Rahmen einer Parameterstudie werden zusätzlich in Kapitel 6.5 Gültigkeitsgrenzen zur Anwendung der vereinfachten Bestimmungsgleichungen bei sehr schlanken Zellwänden mit einer ausreichend hohen Füllmaterialsteifigkeit festgelegt.

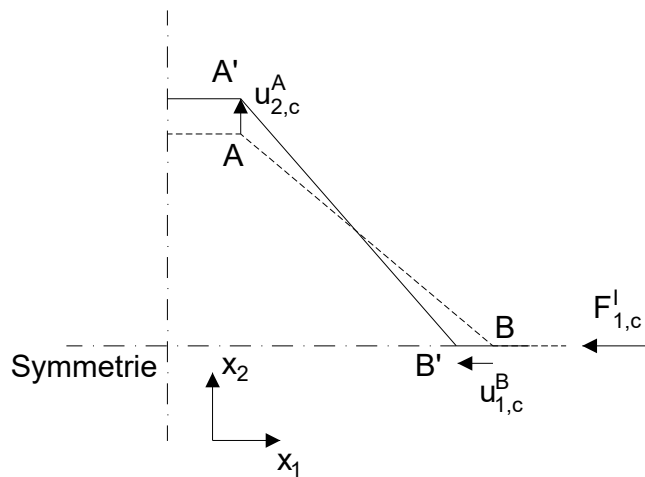
## 4.5 Einfluss der Querdehnung in den Grundzuständen

### 4.5.1 Querdehnung des Füllmaterials

Für die in Kapitel 4.2 und 4.3 hergeleiteten Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte des homogenen Verbundmaterials Geozelle-Boden wurde in ersten Ansatz der Einfluss aus der Querdehnung des Füllmaterials vernachlässigt. Aus diesem Grund werden nachfolgend vereinfachte Anwendungsgrenzen für den Grundzustände I und II definiert, unter welchen die Bestimmungsgleichungen dieser Annahme genügen.

In Kapitel 4.2.7.3 wird für sehr schlanke Zellwände mit einer geringen Zellwanddicke  $t$  durch eine Grenzwertbetrachtung mit  $t \rightarrow 0$  gezeigt, dass als Schnittgrößen ausschließlich Normalkräfte auftreten. Infolgedessen lassen sich die Gleichungen zur Bestimmung der maßgebenden Verschiebungen deutlich vereinfachen (s. Anhang B.9). Neben der Zellgeometrie gehen in die Gleichungen nur der Elastizitätsmodul des Füllmaterials  $E_f$  und Zellwandmaterials  $E_{cw}$  sowie die jeweilige äußere Belastung ein. Ebenfalls tritt für eine hohe Schlankheit keine Krümmung der Wandachse auf, sodass die geneigten Zellwände auch im deformierten Zustand eben bleiben (vgl. Kap 4.2). Zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs zeigt Abbildung 4.30 beispielhaft eine schematische Darstellung der initialen und deformierten Zellstruktur für den Grundzustand Ib im RVE. Infolge der äußeren Belastung  $F_{1,c}^I$  tritt eine Verschiebung  $u_{2,c}^A$  des Punktes A sowie eine Verschiebung von  $u_{1,c}^B$  des Punktes B entlang der Symmetrieachse auf. Wie bereits in Kapitel 4.2.4.1 beschrieben erfährt die Verbindungsstelle eine einheitliche Verschiebung in  $x_2$ -Richtung, welche der Verschiebung im Punkt A entspricht.





**Abb. 4.30:** Zellverformung im Grundzustand Ib für sehr schlanke Zellwände mit  $t \rightarrow 0$

Die Verschiebung  $u_{1,c}^B$  führt zu einer Beanspruchung des Füllmaterials, welches hierdurch in negativer  $x_1$ -Richtung gestaucht wird. Besitzt das Füllmaterial nun eine Querdehnzahl  $\nu_f > 0$ , so würde sich bei einer angenommenen Unverschieblichkeit der Verbindungsstelle am Punkt A durch eine Stauchung in  $x_1$ -Richtung infolge der Querdehnungswirkung ebenfalls eine Stauchung und damit eine Druckspannung in  $x_2$ -Richtung im Füllmaterial ergeben. Diese Druckspannung würde zum einen zu einer zusätzlichen Beanspruchungen der Zellwände führen und zum anderen wäre die in Kapitel 4.2 angenommene eindimensionale Formulierung über die Federkonstante  $c_f$  nicht mehr gerechtfertigt.

Für die Verbindungsstelle liegt jedoch keine Unverschieblichkeit in  $x_2$ -Richtung vor, sondern es ist von der in Abbildung 4.30 dargestellten Verformung auszugehen. Hierbei sind die Verformungen des Füllmaterials innerhalb der Zelle geometrisch bedingt auf die der Zellwände beschränkt. Folglich können nur dann Druckspannungen in  $x_2$ -Richtung auftreten, wenn die Verschiebung des Füllmaterials infolge der Querdehnung theoretisch größer als die der Struktur wäre. Im Umkehrschluss lässt sich somit folgern, dass, wenn die Verschiebung des Füllmaterials infolge Querdehnung geringer als die der Zellwände in  $x_2$ -Richtung ist, die Querdehnung des Füllmaterials keinen Einfluss besitzt. In diesem Fall können aufgrund der vorausgesetzten Verschiebungskompatibilität zwischen Füllmaterial und Zellwand im Füllmaterial theoretisch nur Zugspannungen in  $x_2$ -Richtung auftreten. Mangels einer Zugfestigkeit des Füllmaterials sind diese Zugspannungen jedoch unzulässig, womit der in Kapitel 4.2 angenommene eindimensionale Federansatz weiterhin gültig bleibt.

Die vorstehend beschriebene Bedingung zu den Verschiebungen des Füllmaterials und der Zellwände in  $x_2$ -Richtung ist für jeden Punkt entlang der geneigten Wand einzuhalten. Aufgrund der in Kapitel 4.2 beschriebenen homogenen Dehnungsverteilung des Füllmaterials und der Zellwände ist eine Betrachtung der Verschiebung  $u_{2,c}^A$  im Punkt A jedoch ausreichend. Die hieraus abgeleiteten Anwendungsgrenzen gelten dann auch für jeden weiteren Punkt entlang der geneigten Zellwand. Die Herleitung der Anwendungsgrenzen für die verschiedenen Grundzustände folgt aus der Definition des Hooke'schen Gesetzes für das Füllmaterial im ebenen Spannungszustand (ESZ) oder ebenen Verzerrungszustand (EVZ). Die allgemeine Definition

für den ESZ lautet gemäß Gross et al. 2011b für ein kartesisches Koordinatensystem folgendermaßen.

$$\sigma_x = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_x + \nu_f \varepsilon_y); \sigma_y = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x) \quad (4.73)$$

$$\sigma_z = 0; \tau_{xy} = G_f \gamma_{xy}$$

Aus der Gleichung für die Spannung  $\sigma_y$  wird ersichtlich, dass für den Grundzustand Ib im Füllmaterial ausschließlich Zugspannungen in  $x_2$ -Richtung auftreten, wenn der Ausdruck in der Klammer größer Null ist. Weiterhin wird in Kapitel 4.2.4 eine Übereinstimmung der x- und y-Achsenrichtung mit den Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtungen festgestellt. Für den vorliegenden Grundzustand entspricht somit die x-Richtung der maximalen sowie die y-Richtung der minimalen Hauptspannungs- und Dehnungsrichtung. Folglich lässt sich die Bedingung zum Auftreten von Zugspannungen im Füllmaterial in Form der Hauptspannungen und Hauptdehnungen entsprechend Gleichung (4.74) definieren.

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \underbrace{\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right) \text{ ist } \sigma_3 \geq 0. \quad (4.74)$$

mit:  $\varepsilon_1 < 0$  und  $\varepsilon_3 > 0$

Hierbei bezeichnet die maximale Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  die maximale Stauchung mit einem negative Wert und die minimale Hauptdehnung  $\varepsilon_3$  die maximale Dehnung mit einem positiven Wert. Zur Ableitung eines Bezuges zwischen den Verformungen des Füllmaterials und der Zellwände werden unter Berücksichtigung der Verschiebungskompatibilität nun die beiden Verzerrungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_3$  in Gleichung (4.74) über die Zellwandverschiebungen ausgedrückt. Aufgrund der homogenen Dehnungsverteilungen lassen sich diese aus den maßgebenden Verschiebungen  $u_{2,c}^A$  und  $u_{1,c}^B$  in den Punkten A und B wie folgt bestimmen (vgl. Kap. 4.2.4.2).

$$\varepsilon_3 = \frac{u_{2,c}^A}{l \sin \theta} \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{u_{1,c}^B}{h + l \cos \theta} \quad (4.75)$$

Da bei der vorliegenden Betrachtung nur das Füllmaterial innerhalb einer Zelle relevant ist, ergibt sich die Dehnung  $\varepsilon_1$  durch den Bezug auf die Abmessung des Füllmaterials innerhalb der Zelle in  $x_1$ -Richtung und nicht, wie noch in Kapitel 4.2.4.2, durch den Bezug auf die Abmessung des RVE. Eine Umformung des Ausdrucks in der Klammer von Gleichung (4.74) und ein anschließendes Einsetzen der beiden Dehnungen aus Gleichung (4.75) liefert folgende Ungleichung.

$$\nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{u_2^A}{u_1^B} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta} \quad (4.76)$$

Für sehr schlanke Zellwände mit  $t \rightarrow 0$  vereinfachen sich die Bestimmungsgleichungen der beiden Verschiebungen  $u_{2,c}^A$  und  $u_{1,c}^B$  im Grundzustand Ib (s. Anhang B.9) zu den Ausdrücken entsprechend Gleichung (4.77).

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{1,c}^B = -\frac{F_{1,c}^I}{c_{f,lb}} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow 0} u_{2,c}^A = \frac{F_{1,c}^I}{c_{f,lb} \tan \theta} \quad (4.77)$$

Ein erneutes Einsetzen der Verschiebungen nach Gleichung (4.77) in Gleichung (4.76) liefert

$$v_f \leq \frac{1}{\tan \theta} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta}. \quad (4.78)$$

Wird weiterhin auf der sicheren Seite liegend die Länge  $h$  der Verbindungsstelle vernachlässigt, reduziert sich die Anwendungsgrenze für die äquivalenten Materialkennwerte im Grundzustand  $lb$  zu einem einfachen trigonometrischen Ausdruck entsprechend Gleichung (4.79) nur in Abhängigkeit des Zellwinkels  $\theta$ .

$$\text{Für } v_f \leq \frac{1}{\tan^2 \theta} \text{ ist } \sigma_3 \geq 0 \quad (4.79)$$

Demnach weist im ESZ das Füllmaterial für die minimale Hauptspannungen  $\sigma_3$  keine Druckspannungen auf, wenn die Querdehnzahl  $v_f$  kleiner als oder gleich dem Kehrwert von  $\tan^2 \theta$  ist. In gleicher Weise lassen sich auch für den EVZ Anwendungsgrenzen ableiten. Unter Verwendung der Definition des Hooke'schen Gesetzes für die Spannung  $\sigma_y$  im EVZ und der Zuordnung als minimale Hauptspannung  $\sigma_3$  lautet die Bedingung:

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{(1 + v_f)(1 - 2v_f)} \left[ \underbrace{(1 - v_f)\varepsilon_3 + v_f\varepsilon_1}_{\geq 0} \right] \text{ ist } \sigma_3 \geq 0. \quad (4.80)$$

Eine Vorgehensweise wie für den ESZ mit den Verzerrungen nach Gleichung (4.75) und den Verschiebungen nach Gleichung (4.77) liefert für die Anwendungsgrenze im EVZ

$$v_f \leq \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta. \quad (4.81)$$

Für sehr schlanke Zellwände mit einer Wanddicke von  $t \rightarrow 0$  treten für den EVZ im Füllmaterial keine Druckspannungen auf, wenn die Querdehnzahl  $v_f$  des Füllmaterials kleiner oder gleich  $\cos^2 \theta$  ist.

Mit einem vergleichbaren Vorgehen lassen sich auch für die Grundzustände Ia, IIa und IIb bei sehr schlanken Zellwänden vereinfachte Anwendungsgrenzen aufstellen. Eine Übersicht hierzu zeigt Tabelle 4.9. Für eine einfache Formulierung und auf der sicheren Seite liegend wird hierbei für den Grundzustand Ia und IIa zusätzlich die Axialverschiebung der geneigten Zellwände vernachlässigt. Demzufolge wird für die Zellwände von einer Starrkörperbewegung mit einem Elastizitätsmodul des Wandmaterials von  $E_{cw} \rightarrow \infty$  ausgegangen. Die Herleitung zu den weiteren Grundzuständen sowie eine vollständige Formulierung der Anwendungsgrenzen kann Anhang D entnommen werden. Wie aus den angegebenen Ausdrücken ersichtlich wird, liegen die verschiedenen Anwendungsgrenzen als rein geometrisches Kriterium nur in Abhängigkeit des Zellwinkels  $\theta$  vor. Bedingt durch die gleichen Verschiebungsrichtungen der Zellen ergeben sich jeweils paarweise für den Grundzustand Ia und IIb sowie für den Grundzustand Ib und IIa identische Ausdrücke.

**Tab. 4.9:** Anwendungsgrenzen für die Gültigkeit der äquivalenten Materialkennwerte in den Grundzuständen I und II für den Fall von  $t \rightarrow 0$ ,  $E_{cw} \rightarrow \infty$  und  $h = 0$ 

Grundzustand	Anwendungsgrenzen: $\nu_f \leq$	
	ESZ	EVZ
Ia, Zug	$\tan^2\theta$	$\sin^2\theta$
Ib, Druck	$1/\tan^2\theta$	$\cos^2\theta$
IIa, Zug	$1/\tan^2\theta$	$\cos^2\theta$
IIb, Druck	$\tan^2\theta$	$\sin^2\theta$

Sind die in Tabelle 4.9 angegebenen Anwendungsgrenzen eingehalten, treten im Füllmaterial keine minimalen Hauptdruckspannungen  $\sigma_3$  auf. Hiermit besitzt der in Kapitel 4.2 verwendete eindimensionale Federansatz zur Abbildung des Füllmaterials auch für eine Querdehnzahl des Füllmaterials von  $\nu_f > 0$  Gültigkeit, womit die hergeleiteten Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten weiterhin verwendet werden dürfen.

Aus der näheren Betrachtung der Anwendungsgrenzen lässt sich festgestellt, dass bei gängigen Geozellenprodukten mit einem Zellwinkel von  $\theta = 35^\circ$  bis  $45^\circ$  und üblichen Querdehnzahlen von  $\nu_f = 0,15$  bis  $0,3$  bei rein elastischer Wiederbelastung der Querdehnungseinfluss des Füllmaterials auf die Entstehung von minimalen Hauptdruckspannungen weitestgehend unerheblich ist. Die Beispielberechnung für den EVZ gemäß Gleichung (4.82) mit sehr ungünstigen Werten verdeutlicht dies exemplarisch anhand des Grundzustands Ia bzw. IIb.

$$\nu_f = 0,3 \leq 0,33 = \sin^2 35^\circ \quad (4.82)$$

Folglich entstehen selbst bei einer Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,3$  und einem sehr geringen Zellwinkel von  $\theta = 35^\circ$  keine minimalen Hauptdruckspannungen. Für den Grundzustand III konnten hingegen keine Anwendungsgrenzen abgeleitet werden. Eine Beurteilung zum Einfluss der Querdehnung für diesen Grundzustand sowie eine Prüfung der Anwendungsgrenzen erfolgt in Kapitel 5.4.3 durch Vergleichsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode.

Neben einer möglichen Entstehung von minimalen Hauptdruckspannungen ergibt sich im EVZ aus der Querdehnung in  $x_3$ -Richtung ein zusätzlicher Einfluss auf die Steifigkeit des Füllmaterials. Dieser lässt sich direkt aus der Definition des Hooke'schen Gesetzes ableiten. Bei Einhaltung der zuvor definierten Anwendungsgrenzen gilt für die minimale Hauptspannung  $\sigma_3 = 0$  und die Gleichung für die maximale Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  lautet

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - \nu_f^2}{E_f} \left( \sigma_1 + \frac{\nu_f}{1 - \nu_f} \sigma_3 \right) = \frac{1 - \nu_f^2}{E_f} \sigma_1 \Leftrightarrow \sigma_1 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \varepsilon_1. \quad (4.83)$$

Der Quotient der Materialkennwerten in Gleichung (4.83) entspricht hierbei der folgenden allgemeinen Definition der Steifigkeit  $E_s$  bei behinderter Seitendehnung.

$$E_{f,v} = E_s = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2}, \text{ für } \nu_f \geq 0 \quad (4.84)$$

Zur Berücksichtigung des Anstiegs der Steifigkeit des Füllmaterials bei Querdehnraten von  $\nu_f > 0$  ist lediglich in den zuvor abgeleiteten Ausdrücken der Federkonstante  $c_f$  zu den verschiedenen Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerten der Elastizitätsmodul  $E_f$  durch die Steifigkeit  $E_{f,v}$  zu substituieren. Hingegen tritt im ESZ definitionsgemäß keine Spannung in  $x_3$ -Richtung auf und es besteht eine unbehinderte Verschieblichkeit in diese Richtung, sodass die Querdehnung in  $x_3$ -Richtung keinen Einfluss auf den Ansatz der Steifigkeit des Füllmaterials besitzt und unverändert der Elastizitätsmodul  $E_f$  zu verwenden ist.

#### 4.5.2 Querdehnung der Zellwände

Wie bereits bei der Querdehnraten  $\nu_f$  des Füllmaterials wird bei der Herleitung der Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten für die Querdehnraten der Zellwände ein Wert von  $\nu_{cw} = 0$  angenommen. Während im ESZ auch hier von der Querdehnung in  $x_3$ -Richtung kein Einfluss auf die Wandsteifigkeiten  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $El_{cw}$  ausgeht, führt diese im EVZ, vergleichbar zu der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  entsprechend Gleichung (4.84), zu einer Steifigkeitszunahme. Der Einfluss aus einer Querdehnraten des Zellwandmaterials von  $\nu_{cw} > 0$  lässt sich für das mechanische Modell eines Plattenstreifens mit einem isotropen linear elastischen Materialverhalten gemäß Altenbach et al. (2016) durch den folgenden Ansatz berücksichtigen.

$$EA_{cw,v} = \frac{EA_{cw}}{1 - \nu_{cw}^2}, \quad GA_{cw,v} = \frac{5EA_{cw}}{12(1 + \nu_{cw})(1 - \nu_{cw}^2)} \quad \text{und} \quad El_{cw,v} = \frac{El_{cw}}{1 - \nu_{cw}^2} \quad (4.85)$$

Die Schubsteifigkeit  $GA_{cw,v}$  folgt hierbei aus dem Einsetzen des Ausdrucks von  $EA_{cw,v}$  in Gleichung (4.2). Durch Substitution der Wandsteifigkeiten nach Gleichung (4.85) in die verschiedenen Bestimmungsgleichungen lässt sich direkt der Querdehnungseinfluss der Zellwände in  $x_3$ -Richtung auf die äquivalenten Materialkennwerte im EVZ für den Fall einer Querdehnraten des Zellwandmaterials von  $\nu_{cw} > 0$  abbilden.

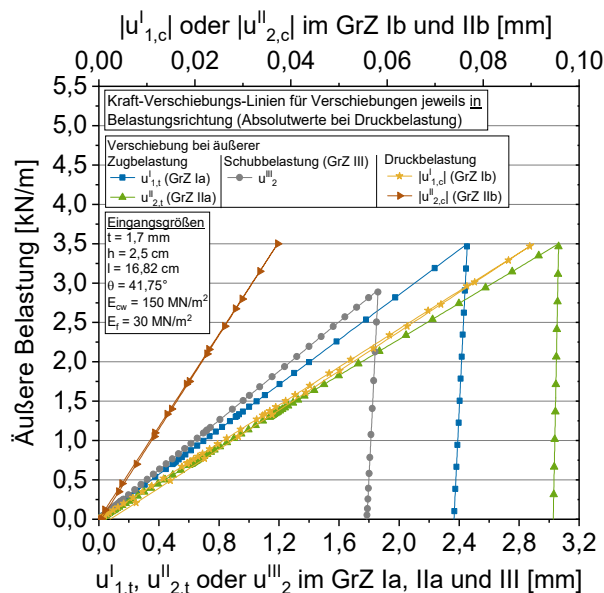
Ergänzend zu den in Kapitel 4.2 und 4.3 hergeleiteten Bestimmungsgleichungen liegen nunmehr für die Grundzustände I und II Anwendungsgrenzen für die äquivalenten Materialkennwerte vor. Diese definieren zulässige Wertebereiche der Querdehnraten  $\nu_f$  des Füllmaterials, für welche sich die Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten auch bei Werten von  $\nu_f > 0$  anwenden lassen. Vereinfacht beschränken sich die Anwendungsgrenzen auf den Fall sehr schlanker Zellwände mit einer Wanddicke von  $t \rightarrow 0$ . Der Querdehnungseinfluss in  $x_3$ -Richtung auf die Steifigkeit des Füllmaterials und der Zellwände im EVZ lässt sich direkt durch Substitution der Steifigkeiten  $E_f$ ,  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $El_{cw}$  mit den zugehörigen Steifigkeiten aus Gleichung (4.84) und (4.85) in den jeweiligen Bestimmungsgleichungen berücksichtigen. Weitergehende Anpassungen sind nicht notwendig.



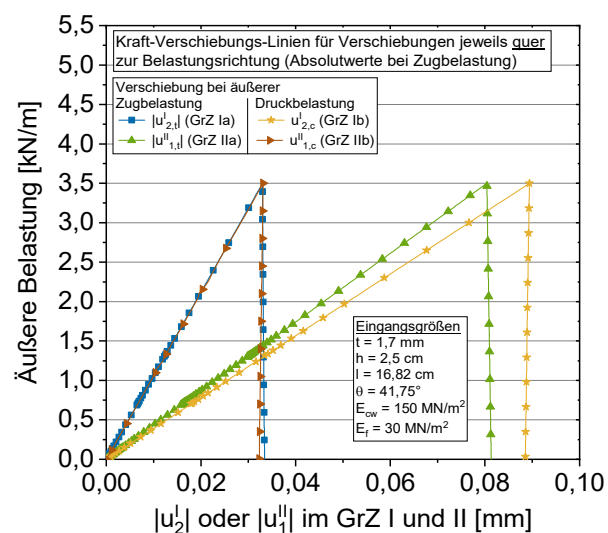
## 5 Plausibilität der analytischen Lösung

### 5.1 Nachweis des linearen Materialverhaltens

Die äquivalenten Materialkennwerte aus den unterschiedlichen Grundzuständen werden in Kapitel 4 unter Voraussetzung eines bereichsweise linearen Materialverhaltens des Verbundmaterials mit konstanten äquivalenten Druck-, Zug- und Schubmodulen sowie konstanten äquivalenten Querdehnzahlen abgeleitet. Zur Überprüfung dieser Annahme zeigen Abbildung 5.1 und 5.2 exemplarisch die aus FE-Berechnungen ermittelten Kraft-Verschiebungs-Beziehungen der Verschiebungen in und quer zur Belastungsrichtung für die unterschiedlichen Grundzustände (kurz: GrZ). Die Berechnungen wurden an Modellen vergleichbar zu den in Kapitel 4 beschriebenen Modellen durchgeführt. Grafische Darstellungen zu den Modellen und den Knotenpositionen für die Verschiebungen lassen sich Anhang E.1 entnehmen.



**Abb. 5.1:** Kraft-Verschiebungs-Linien für die Verschiebung in Belastungsrichtung



**Abb. 5.2:** Kraft-Verschiebungs-Linien für die Verschiebung quer zur Belastungsrichtung

Wie aus den Abbildungen ersichtlich wird, ergeben sich in allen Grundzuständen sowohl für die Verschiebungen in als auch quer zur Belastungsrichtung lineare Verläufe mit konstanten Steigungen bei Belastung, womit das für die analytische Lösung angenommene lineare Materialverhalten des Verbundmaterials bestätigt wird. Die tatsächlichen Zahlenwerte der Verschiebungen sind hierbei unerheblich, sondern dienen ausschließlich zur Veranschaulichung der Zusammenhänge. Zusätzlich wird aus den Verläufen gemäß Abbildung 5.1 das in Kapitel 4.1 definierte abweichende Materialverhalten bei Druck- und Zugbelastung deutlich. Weder für den Grundzustand Ia und Ib noch für den Grundzustand IIa und IIb sind die Verläufe in Belastungsrichtung bei Druck- und Zug deckungsgleich, womit abweichende Druck- und Zugmodule vorliegen. Folglich gibt die in Kapitel 4 angenommene bereichsweise lineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung das Materialverhalten des Verbundmaterials korrekt wieder.

Ergänzend sind in den Abbildungen die Kraft-Verschiebungs-Linien bei Entlastung dargestellt. Aus diesen wird ersichtlich, dass für den Großteil der Kraft-Verschiebungs-Linien bei vollständiger Entlastung die jeweiligen Verschiebungen nicht auf den Wert Null zurückgehen. Dies ist auf die fehlende Zugfestigkeit des Füllmaterials und einen Richtungswechsel der Hauptspannungen bei Entlastung zurückzuführen. Während beispielsweise für den Grundzustand Ia bei Belastung die maximale Hauptspannung in  $x_2$ -Richtung zeigt, stimmt die maximale Hauptspannungsrichtung bei Entlastung mit der  $x_1$ -Richtung überein. Folglich wirkt bei Entlastung das Füllmaterial einer Rückstellung entgegen und die Abnahme der Verschiebung  $u_{1,t}^I$  fällt gering aus. Abbildungen zu dem Richtungswechsel der maximalen Hauptspannung sind in Anhang E.2 dargestellt. Auf eine weitergehende Betrachtung des Materialverhaltens bei Entlastung wird an dieser Stelle verzichtet. Jedoch lässt sich hieraus schließen, dass die in Kapitel 4 abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerte sich ausschließlich auf eine Erstbelastung beziehen. Für das Verbundmaterial ist demnach, trotz des bereichsweise linearen Materialverhaltens, keine lineare Elastizität gegeben und die ermittelten äquivalenten Materialkennwerte dürfen grundsätzlich nicht als linear elastische Kennwerte verstanden werden.

## 5.2 Prüfung der theoretischen Orthotropiebedingungen

In Kapitel 3.2 wurde beschrieben, dass die Ingenieurkonstanten bei einem orthotropen Materialverhalten aufgrund der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix und den Eigenschaften der spezifischen Formänderungsenergie bestimmten notwendigen Bedingungen genügen müssen. Nachfolgend wird geprüft, ob die in Kapitel 4.2 und 4.3 abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerte des Verbundmaterials Geozelle-Boden ebenfalls diesen genügen. Entsprechend der ersten Bedingung von Gleichung (3.4) dürfen sich für die äquivalenten Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  (Gl. 4.10 und 4.25), die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  (Gl. 4.17 und 4.32) sowie den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  (Gl. 4.71 und 4.72) nur positive Werte ergeben. Die notwendige Bedingung lässt sich somit wie folgt ausdrücken.

$$E_{1,t}^* > 0, E_{1,c}^* > 0, E_{2,t}^* > 0, E_{2,c}^* > 0, \lim_{c_f \rightarrow 0} G_{12}^* > 0, \lim_{t \rightarrow 0} G_{12}^* > 0 \quad (5.1)$$

Aus einer genaueren Betrachtung der verschiedenen Gleichungen wird ersichtlich, dass unter Berücksichtigung von  $\sin\theta$ ,  $\cos\theta$  und  $\tan\alpha_g \geq 0$ , für  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  und  $0 \leq \alpha_g \leq \pi/2$ , sowie den teilweise vorhandenen Klammerausdrücken in der zweiten Potenz ausschließlich positive Werte für die äquivalenten Druck- und Zugmodule ergeben. Demzufolge erfüllen die äquivalenten Module die notwendige Bedingung nach Gleichung (5.1). Da sich die Eigenschaften einer Funktion durch eine Grenzwertbetrachtung nicht ändern, kann die notwendige Bedingung auch für die in Tabelle 4.2 und 4.4 dargestellten vereinfachten Bestimmungsgleichungen als erfüllt angesehen werden.

Durch Umformung von Gleichung (4.10) für den äquivalenten Zugmodul  $E_{1,t}^*$  und Gleichung (4.11) für die äquivalente Querdehnzahl  $\nu_{12,t}^*$  im Grundzustand Ia sowie von Gleichung (4.32)



für den äquivalenten Druckmodul  $E_{2,c}^*$  und Gleichung (4.33) für die äquivalente Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  im Grundzustand IIb lässt sich zeigen, dass die Quotienten aus den beiden äquivalenten Materialkennwerten in beiden Grundzuständen einander identisch sind.

$$\frac{v_{12,t}^*}{E_{1,t}^*} = \frac{v_{21,c}^*}{E_{2,c}^*} = - \frac{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,1}l}}{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}} \frac{c_{f,1}}{\sin\theta\cos\theta H_c} \quad (5.2)$$

$$\text{mit: } c_{f,1} = c_{f,IIa} = c_{f,IIb} = E_f \frac{(2h+lc\cos\theta)H_c}{l\sin\theta}$$

Diese erfüllen somit das nach Gleichung (3.3) definierte Reziproktheorem zur Beschreibung der Symmetrie der Nachgiebigkeitsmatrix. Ein entsprechendes Vorgehen für den Grundzustand Ib mit dem äquivalenten Druckmodul  $E_{1,c}^*$  nach Gleichung (4.17) und der äquivalenten Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  nach Gleichung (4.18) sowie für den Grundzustand IIa mit dem äquivalenten Zugmodul  $E_{2,t}^*$  nach Gleichung (4.25) und der äquivalenten Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  nach Gleichung (4.26) liefert folgende Ausdrücke für die beiden Quotienten.

$$\frac{v_{12,c}^*}{E_{1,c}^*} = - \frac{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,2}l}}{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}} \frac{c_{f,2}}{\sin\theta\cos\theta H_c} \quad \text{und} \quad (5.3)$$

$$\frac{v_{21,t}^*}{E_{2,t}^*} = - \frac{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,2}l} + \frac{2h}{EA_{cw}l}}{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}} \frac{c_{f,2}}{\sin\theta\cos\theta H_c}$$

$$\text{mit: } c_{f,2} = c_{f,Ib} = c_{f,IIa} = E_f \frac{l\sin\theta H_c}{h+lc\cos\theta}$$

Ein Vergleich der beiden Ausdrücke zeigt, dass in diesem Fall die äquivalenten Materialkennwerte das Reziproktheorem nicht exakt erfüllen. Entsprechend der in Kapitel 4.2.4.2 beschriebenen Vernachlässigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle im Grundzustand Ib unterscheiden sich die beiden Quotienten durch den Anteil der horizontalen Wandverformung. Wird dagegen von einer rhombischen Zellform mit einer Länge der Verbindungsstelle von  $h = 0$  ausgegangen, erfüllen auch die äquivalenten Materialkennwerte dieser beiden Grundzustände das Reziproktheorem. Die im Rahmen der Vergleichsberechnungen von Kapitel 5.3.2 ermittelten Zahlenwerte der äquivalenten Materialkennwerte zeigen, dass sich selbst bei sehr großen Länge der Verbindungsstellen von  $h = 2,5$  cm nur vernachlässigbare Unterschiede in den Quotienten von Gleichung (5.3) ergeben (s. Anhang F.1). Die Begründung hierfür geht direkt aus Gleichung (5.3) hervor. Für größere Füllmaterialsteifigkeiten  $E_f$  stellt die Federkonstante  $c_{f,2}$  die maßgebende Größe dar und der Einfluss der Zellwände fällt gering aus. Dementsprechend nähern sich beide Quotienten identisch dem Wert der Federkonstante an, womit in guter Näherung auch für eine Zellwandlänge  $h > 0$  von einer Erfüllung des Reziproktheorems gemäß Gleichung (3.3) ausgegangen werden kann.

Anhand der aus den Vergleichsberechnungen in Kapitel 5.3.2 ermittelten Zahlenwerte lässt sich weiterhin zeigen, dass die analytische Lösung paarweise für den Grundzustand Ia und IIb sowie für den Grundzustand Ib und IIa ebenfalls den weiteren notwendigen Bedingungen nach Gleichung (3.4) genügen. Auf die Darstellung eines expliziten Nachweises wird an dieser Stelle verzichtet und auf die Zahlenwerte in Anhang F.1 verwiesen. Somit erfüllt die in Kapitel 4.2 beschriebene analytische Lösung alle notwendigen Orthotropiebedingungen und eine Belastungskombination des Grundzustandes Ia und IIb sowie Grundzustand Ib und IIa ist ohne Einschränkung zulässig.

Ein Vergleich der Quotienten von Gleichung (5.2) und (5.3) zeigt demgegenüber, dass aufgrund der unterschiedlichen Definition der Federkonstanten  $c_{f,1}$  und  $c_{f,2}$  die äquivalenten Materialkennwerte für den Grundzustand Ia und IIa oder den Grundzustand Ib und IIb im allgemeinen Fall nicht dem Reziproktheorem von Gleichung (3.3) genügen. Dies ist auf das abweichende Materialverhalten des Verbundmaterials bei äußerer Zug- und Druckbelastung sowie die Abhängigkeit der äquivalenten Materialkennwerte von den Randbedingungen zurückzuführen (s. Kap. 4.4). Jedoch treten für gewisse geometrische und mechanische Größen Sonderfälle auf, für welche auch bei diesen Belastungskombinationen die Orthotropiebedingungen exakt oder näherungsweise eingehalten werden. Diese Sonderfälle lauten wie folgt.

- 1) Für  $c_f \rightarrow 0$  (unbefüllte Zellstruktur): Unter ausschließlichem Ansatz des Biegeanteils der Zellwandverformungen werden die Bedingungen exakt und unter Ansatz aller Verschiebungsanteile näherungsweise erfüllt (s. Kap. 3.4.2.3 und Kap. 6.3).
- 2) Für  $t \rightarrow 0$  (sehr schlanke Zellwände): Unter Annahme, dass die Zellwände als Membran wirken, können diese keine Druckkräfte aufnehmen. Folglich entsprechen die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  sowie die äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,c}^*$  und  $\nu_{21,c}^*$  der Querdehnzahl des Füllmaterials  $\nu_f$  (Orthotropiebedingung exakt erfüllt, s. Kap. 6.2.2)
- 3) Für  $h = 0$  und  $\theta = 45^\circ$  (quadratische Zellform) nehmen die beiden Quotienten gemäß Gleichung (5.2) und (5.3), unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen, den gleichen Wert an (Orthotropiebedingung exakt erfüllt, s. Kap. 6.3).
- 4) Für  $c_f \rightarrow \infty$  (sehr steifes Füllmaterial) streben die äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$  gegen Null und die beiden Quotienten gemäß Gleichung (5.2) und (5.3) werden ebenfalls null (Orthotropiebedingung exakt erfüllt, s. Kap. 6.2.1.1 und 6.2.1.3).

Für diese Sonderfälle ist zusätzlich eine Belastungskombination des Grundzustandes Ia und IIa oder des Grundzustandes Ib und IIb zulässig. Die einzelnen Sonderfälle werden weitergehend in Kapitel 7 für den Übertrag der äquivalenten Materialkennwerte auf das mechanische Tragwerksmodell einer Scheibe und Platte verwendet.

## 5.3 Prüfung der Lösung zu den äquivalenten Materialkennwerten

### 5.3.1 Vorgehensweise zur Prüfung der analytischen Lösung

Zur Plausibilitätsprüfung der äquivalenten Materialkennwerte werden nachstehend die Ergebnisse aus der analytischen Lösung mit denen von FE-Berechnungen verglichen. Die hierzu verwendeten Modelle sind vergleichbar zu den in Kapitel 4.2.2 und 4.3.2 definierten Modellen. Aufgrund der anschaulicheren Erläuterung der Gründe für etwaige Abweichungen werden für die Grundzustände I und II jeweils die für die Bestimmungsgleichungen maßgebenden Verschiebungen aus der analytischen Lösung den Verschiebungen aus der FE-Berechnung gegenübergestellt. Eine Vergleichsbetrachtung der äquivalenten Materialkennwerte wird somit indirekt vorgenommen. Abweichungen in den Verschiebungen führen durch den Bezug auf die gleichen geometrischen Größen zwangsläufig ebenfalls zu vergleichbaren Abweichungen der äquivalenten Materialkennwerte.

Eine Übersicht zu den in den Vergleichsberechnungen verwendeten geometrischen Eingangsgrößen des Zellwinkels  $\theta$ , der Länge  $l$  der geneigten Zellwände und der halben Wandlänge  $h$  der Verbindungsstelle (s. Abb. 2.5) ist in Tabelle 5.1 dargestellt.

**Tab. 5.1:** Übersicht zu den Eingangsgrößen der Zellgeometrien in den Vergleichsberechnungen

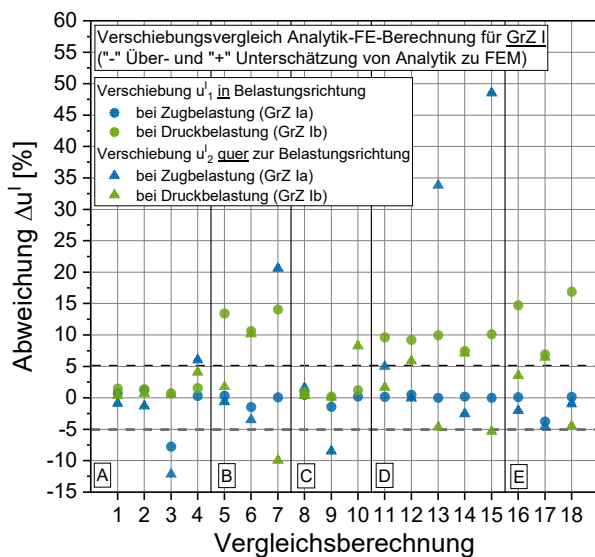
Bezeichnung	Zellgeometrie		
	Zellwinkel $\theta$ [°]	Länge der geneigten Wand $l$ [cm]	Halbe Länge der Verbindungsstelle (horizontale Wand) $h$ [cm]
A	41,75	16,82	0,2
B	41,75	16,82	2,5
C	29,87	22,49	0,2
D	29,87	22,49	2,5
E	45	3,89	0,75

Die Zellgeometrien orientieren sich hierbei an denen gängiger Geozellenprodukten oder stellen Extremwerte dar. Für eine eindeutige Zuordnung in den nachfolgend dargestellten Abbildungen werden diese als Geometrie A bis E bezeichnet. Zur Prüfung des Einflusses der Füllmaterialsteifigkeit sowie der Zellwandsteifigkeiten  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $EI_{cw}$  auf die Plausibilität der Lösung werden zusätzlich die Wanddicke  $t$ , der Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials  $E_{cw}$  und der des Füllmaterials  $E_f$  variiert. Entsprechend der Definition nach Gleichung (4.65) hängen die Wandsteifigkeiten nur von  $E_{cw}$  und  $t$  ab, sodass eine Variation der Wandsteifigkeiten  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $EI_{cw}$  aus der Variation von  $E_{cw}$  und  $t$  folgt. Wie bei den Zellgeometrien werden auch für die Steifigkeiten unter anderem Extremwerte betrachtet. Lässt sich für die extremen Eingangsgrößen eine Gültigkeit nachweisen, so gilt dies auch für die Kennwerte gängiger Geozellenprodukte und typischer Füllmaterialien. Eine Auflistung der verschiedenen Eingangsgrößen jeder der hier angestellten Vergleichsberechnung kann dem Anhang F.1 und F.5 entnommen werden.

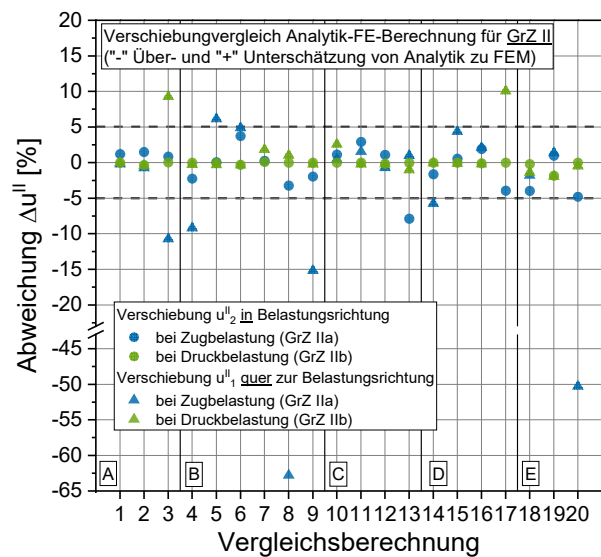
### 5.3.2 Prüfung der äquivalenten Materialkennwerte der Grundzustände I und II

#### 5.3.2.1 Ergebnisübersicht zu den Grundzuständen I und II

In Abbildung 5.3 und 5.4 sind die prozentualen Abweichungen der maßgebenden Verschiebungen für die verschiedenen Vergleichsberechnungen dargestellt. Die Angaben beziehen sich hierbei auf die aus den FE-Berechnungen ermittelten Verschiebungen. Demzufolge zeigt ein negatives Vorzeichen eine Überschätzung und ein positives eine Unterschätzung der Verschiebungen aus der analytischen Lösung an. Aufgrund der Modellierung im EVZ mit einem Bezug auf den laufenden Meter in  $x_3$ -Richtung wurden die analytischen Verschiebungen auf eine fiktive Zellhöhe von  $H_c = 1,0$  m bezogen. Entsprechend den Beispielsberechnungen in Kapitel 4.2 werden für die äußeren Lasten Werte von  $W = P = 3,5$  kN/m bei äußerer Zugbelastung und von  $\sigma^I_1 = \sigma^{II}_2 = -15,625$  kN/m<sup>2</sup> bei äußerer Druckbelastung verwendet (vgl. Kap. 4.2). Die vertikalen Trennlinien in den Abbildungen markieren die in Tabelle 5.1 definierten Zellgeometrien. Ergänzend ist der Bereich der Abweichung von  $-5 \% \leq \Delta u \leq 5 \%$  mit horizontalen Linien markiert. Abweichungen in diesem Bereich werden nachfolgend vereinfacht vernachlässigt und etwaigen Ungenauigkeiten der FE-Berechnungen zugeordnet.



**Abb. 5.3:** Verschiebungsvergleich von Analytik-FE-Berechnung im Grundzustand I



**Abb. 5.4:** Verschiebungsvergleich von Analytik-FE-Berechnung im Grundzustand II

Aus den beiden Abbildungen wird ersichtlich, dass für den Großteil der Vergleichsberechnungen die Abweichungen gering ausfallen und mit  $-5 \% \leq \Delta u \leq 5 \%$  im zuvor definierten Bereich der Ungenauigkeit der FE-Berechnungen liegen. Weiterhin lässt sich erkennen, dass die Extremwerte der Abweichungen in den verschiedenen Grundzuständen beinahe ausschließlich auf die Verschiebungen  $u^I_2$  und  $u^{II}_1$  quer zur Belastungsrichtung beschränkt sind. Im Grundzustand Ia und Ib betragen diese ca. 20 bis 50 % und im Grundzustand IIa und IIb ca. -10 bis -65 %. Im Grundzustand IIa kann zusätzlich in zwei Fällen eine Abweichung der Verschiebung  $u^{II}_1$  von ca. -140 und -310 % festgestellt werden. Diese sind aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht in Abbildung 5.4 dargestellt (s. hierzu Tab. 5.2). Neben den erhöhten Abweichungen der

Verschiebungen quer zur Belastungsrichtung für die verschiedenen Grundzustände lassen sich aus Abbildung 5.3 auch für den Grundzustand Ib erhöhte Abweichungen der Verschiebungen  $u_{1,c}^I$  in Belastungsrichtung von ca. 7 bis 17 % erkennen. Diese treten systematisch bei den Zellgeometrien B, D und E auf.

Im Rahmen der Plausibilitätsprüfung zeigt sich, dass die erhöhten Abweichungen fast ausschließlich bei extremen Verhältnissen der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  bezogen auf die Wandsteifigkeiten und bei größeren Längen  $h$  der Verbindungsstelle auftreten. Für eine nachfolgende Erläuterung der Gründe ist in Tabelle 5.2 auszugweise eine Ergebnisübersicht der erhöhten Abweichungen mit den zugehörigen Eingangsgrößen sowie den analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen dargestellt. Eine weitergehende Übersicht der Eingangsgrößen und Ergebnissen aller angestellten Vergleichsberechnungen ist Anhang F.1 beigelegt. Zusätzlich sind dort die aus den Verschiebungen folgenden äquivalenten Materialkennwerte sowie deren Abweichungen dargestellt.

**Tab. 5.2:** Exemplarische Ergebnisse der Vergleichsberechnung für erhöhte Abweichungen in den Grundzuständen I und II

Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}; E_f$	Maßgebende Verschiebungen [mm]				Abweichung	
				Analytisch		FE-Berechnung		$\Delta u_1$	$\Delta u_2$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	[%]	[%]
Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung mit $W = 2 \cdot F_{1,t}^I = 3,5 \text{ kN/m}$									
10	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288; 120	3,686	-0,0047	3,693	-0,0076	0,20	37,7
13	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 120	2,398	-0,0038	2,398	-0,0058	0,01	33,8
15	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	4,244	-0,0038	4,244	-0,0074	-0,01	48,5
Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung mit $\sigma_{1,c}^I = -15,625 \text{ kN/m}^2$									
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	-0,0783	0,0878	-0,0905	0,0894	13,4	1,79
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	-2,347	2,630	-2,626	2,927	10,6	10,1
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	-0,0196	0,0220	-0,0228	0,0200	14,1	-9,99
16	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	-0,0182	0,0181	-0,0213	0,0188	14,7	3,52
17	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	-0,4860	0,4846	-0,5230	0,5178	6,92	6,41
18	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	-0,0046	0,0046	-0,0055	0,0044	16,9	-4,52
Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung mit $P = 2 \cdot F_{2,t}^I = 3,5 \text{ kN/m}$									
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	-0,0220	5,398	-0,0053	5,413	-313	0,27
8	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 60	-0,0439	5,423	-0,0270	5,253	-62,8	-3,24
17	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	-0,0499	1,295	-0,0209	1,245	-139	-3,95
Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung mit $\sigma_{2,c}^I = -15,625 \text{ kN/m}^2$									
17	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	0,0084	-0,0148	0,0093	-0,0148	10,0	0,01

Ergänzend zu den Berechnungen für den befüllten Fall wurden Vergleichsberechnungen für unbefüllte Geozellen durchgeführt. Aufgrund des nicht vorhandenen Füllmaterials wird die äußere Belastung hier für alle Grundzustände über äußere Kräfte von  $W = P = \pm 0,01 \text{ kN/m}$  aufgebracht. Eine Ergebnisübersicht der Vergleichsberechnungen ist ebenfalls in Anhang F.1

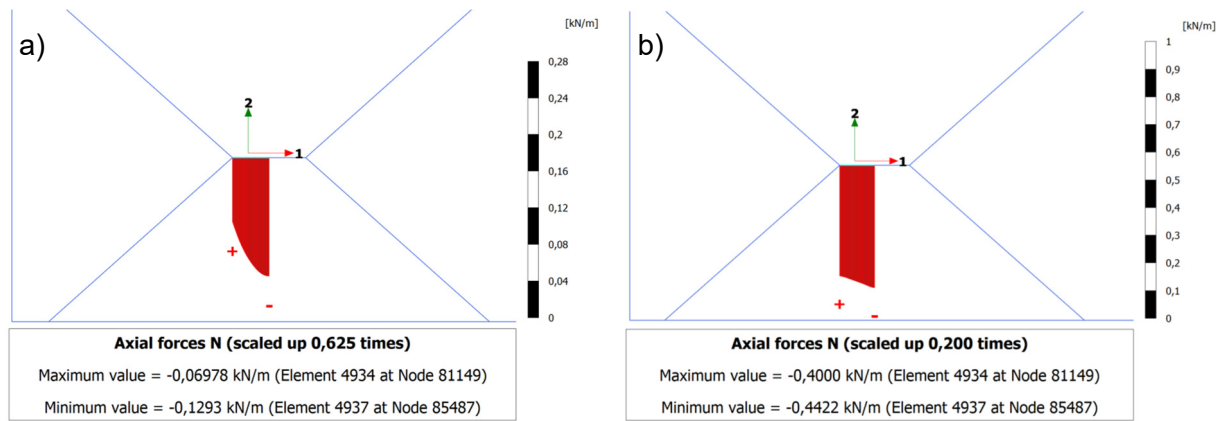
dargestellt. Die Abweichungen zwischen den analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen fallen für die unbefüllte Zellstruktur mit  $\Delta u \approx 0,05$  bis 0,5 % minimal aus. Systematisch treten die vergleichsweise höheren Abweichungen von 0,5 % bei großen Längen  $h$  der Verbindungsstelle auf. Während in der analytischen Lösung die Verbindungsstelle aus Gleichgewichtsgründen keine Beanspruchung auf Biegung erfahren, ergeben sich in den FE-Berechnung ausgehend von der Lasteinleitung gewisse Biegemomente auch im Bereich des maßgebenden Modellausschnitts (s. Anhang F.2). Mit zunehmender Wandlänge  $h$  steigt der Einfluss hieraus und damit die Abweichung in den Verschiebungen an.

### 5.3.2.2 Systematische Abweichung im Grundzustand Ib

Gemäß der in Tabelle 5.2 angegebenen Abweichungen für den Grundzustand Ib wird die Verschiebung  $u_{1,c}^I$  in Belastungsrichtung bei großen Längen  $h$  der Verbindungsstelle durch die analytische Lösung mit 7 bis 17 % systematisch unterschätzt (s. Vergleichsberechnung 5 bis 7 und 16 bis 18). Dies ist auf die in Kapitel 4.2.4.1 beschriebene Vernachlässigung der Axialverschiebungen  $u_{h,c}^I$  der Verbindungsstelle in der analytischen Lösung zurückzuführen. Mit zunehmender Zellwandlänge  $h$  nimmt der Verschiebungsanteil von  $u_{h,c}^I$  an der resultierenden Verschiebung  $u_{1,c}^I$  zu und die analytische Lösung führt zu einer Unterschätzung der Verschiebungen. Aus dem ergänzenden Vergleich der Abweichungen von Vergleichsberechnung 5 bzw. 16 mit denen von 6 bzw. 17 in Tabelle 5.2 zeigt sich, dass mit zunehmendem Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellstreifenmaterials die Abweichungen der Verschiebung  $u_{1,c}^I$  geringer werden. Durch die Zunahme des Elastizitätsmoduls  $E_{cw}$  wird die Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Zellwände größer, womit die Verschiebung  $u_{h,c}^I$  und damit die Abweichungen abnehmen.

Neben der Abhängigkeit der Axialverschiebungen  $u_{h,c}^I$  von der Länge  $h$  der Verbindungsstelle und der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  ist zusätzlich die Größe der Normalkraft zu berücksichtigen. Diese nimmt mit zunehmender Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der geneigten Wände und abnehmender Steifigkeit  $E_f$  des Füllmaterials zu, da hierdurch der Einflussbereich der geneigten Wand auf die Spannungskonzentration größer wird und damit verhältnismäßig höhere Normalkräfte auf die Verbindungsstelle übertragen werden. Abbildung 5.5 verdeutlicht diesen Einfluss exemplarisch für die Beispielberechnungen 5 und 6 anhand der Normalkräfte in der Verbindungsstelle im maßgebenden Modellausschnitt. Zur Veranschaulichung des vergrößerten Einflussbereiches mit zunehmender Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  können Anhang F.3 die zugehörigen maximalen Hauptspannungsverteilungen entnommen werden.

In Verbindung mit den vorherigen Beschreibungen zur Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  liegt somit ein gegenläufiger Einfluss des Elastizitätsmoduls  $E_{cw}$  auf die Axialverschiebung  $u_{h,c}^I$  vor. Einerseits führt ein hoher/geringer Wert für den Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  zu einer hohen/geringen Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  und somit zu vergleichsweise geringeren/höheren Axialverschiebung  $u_{h,c}^I$ . Andererseits bewirkt ein hohes/geringes Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  eine vergleichsweise höhere/geringere Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  und die Normalkräfte in der Verbindungsstelle nehmen zu/ab.



**Abb. 5.5:** Normalkräfte in der Verbindungsstelle des Modellausschnitts für a) Vergleichsberechnung 5 und b) Vergleichsberechnung 6 des Grundzustandes Ib

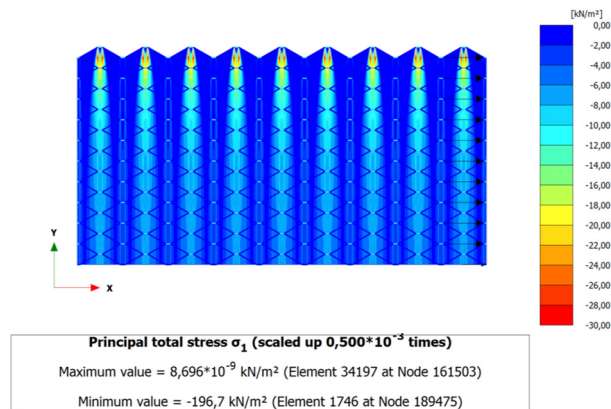
Eine eindeutige Zuordnung des Einflusses der Länge  $h$  der Verbindungsstelle auf die Abweichungen der Verschiebungen durch die analytische Lösung ist demnach nicht möglich. Unter Berücksichtigung der in den Vergleichsberechnungen gewählten extremen Eingangsgrößen und einer hieraus folgenden Abweichung der Verschiebung von max. 17 % stellt jedoch die analytische Lösung auch bei großen Länge  $h$  der Verbindungsstelle eine gute Näherung dar. Eine weitergehende Beurteilung erfolgt im Rahmen der Parameterstudie von Kapitel 6.2.1.2.

### 5.3.2.3 Einfluss der Spannungskonzentration auf Grundzustand Ia und IIa

Ergänzend zu der systematischen Abweichung des Grundzustandes Ib gehen aus Tabelle 5.2 zusätzlich noch für weitere Vergleichsberechnungen erhöhte Abweichungen hervor. Im Wesentlichen lassen sich diese Abweichungen auf den bereits in Kapitel 4 beschriebenen lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  und die hieraus folgende Zunahme der Inhomogenität in den Spannungsverteilungen des Füllmaterials zurückführen. Mit zunehmendem Unterschied zwischen der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und den Zellwandsteifigkeiten nimmt die Inhomogenität zu, womit die Abweichung der analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen größer werden. Zur genaueren Beschreibung der Gründe für die Abweichung werden nachstehend exemplarisch zwei Vergleichsberechnungen betrachtet.

Für die Vergleichsberechnungen im Grundzustand Ia lässt sich bei einer hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  eine Unterschätzung der Verschiebung  $u_{2,t}$  quer zur Belastungsrichtung aus der analytischen Lösung von ca. 20 bis 50 % feststellen (s. Tab. 5.2). Die Ursache für diese Abweichungen wird nachfolgend anhand von Vergleichsberechnung 13 erläutert. Hierzu zeigt Abbildung 5.6 die maximale Hauptspannungsverteilung am Gesamtmodell. Ausgehend vom oberen freien Modellrand bilden sich Spannungskonzentrationen aus, welche überwiegend auf das Füllmaterial der Zellreihen mit jeweils einer Zelle am oberen freien Modellrand beschränkt sind. Durch die geringe Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände tritt die Reaktion des Füllmaterial fast ausschließlich im Bereich um die Verbindungsstellen auf. Da die Spannungskonzentrationen nicht bis zur Symmetrieebene am unteren Modellrand abgeklungen sind, erfährt das Füllmaterial um die Verbindungsstelle im relevanten Modellausschnitt eine erhöhte Beanspruchung.

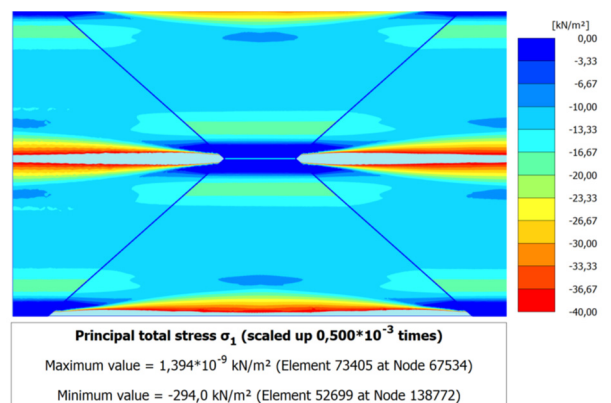
Für die analytische Lösung wird hingegen von einer homogenen Spannungsverteilung ausgegangen, wodurch die analytische Lösung zu einer Unterschätzung der Verschiebung  $u_{2,t}^I$  führt.



**Abb. 5.6:** Maximale Hauptspannungsverteilung am Gesamtmodell für die Vergleichsberechnung 13 des Grundzustandes Ia (Skala angepasst)

Ergänzend sei darauf hingewiesen, dass trotz der Abweichung der Verschiebung  $u_{2,t}^I$  für die Verschiebung  $u_{1,t}^I$  in Belastungsrichtung eine ausgezeichnete Übereinstimmung vorliegt. Aufgrund der relativ hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  wird die Verschiebung  $u_{1,t}^I$  in vorliegender Vergleichsberechnung maßgebend durch die Axialverschiebung der Zellwände und nicht durch die Verformungen des Füllmaterials bestimmt. Wie aus den für sehr schlanke Zellwände mit der Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  abgeleiteten Gleichungen in Kapitel 4.2.7.3 ersichtlich wird (s. Anhang B.9), spiegelt die analytische Lösung diesen Zusammenhang korrekt wider, sodass die Abweichungen der Verschiebungen mit  $\Delta u_{1,t}^I \approx 0,01$  % minimal ausfallen.

Auch für den Grundzustand IIa treten die erhöhten Abweichungen ausschließlich für die Verschiebung  $u_{1,t}^{II}$  quer zur Belastungsrichtung auf. Die Abweichungen fallen mit ungefähr -10 bis -330 % vereinzelt sehr hoch aus. Verglichen zum Grundzustand Ia führt die analytische Lösung hier zu einer Überschätzung der Verschiebung  $u_{1,t}^{II}$ . Eine Begründung für die Abweichungen lässt sich aus der in Abbildung 5.7 dargestellten maximalen Hauptspannungsverteilung am Beispiel von Vergleichsberechnung 8 ableiten.



**Abb. 5.7:** Maximale Hauptspannungsverteilung im Modellausschnitt für die Vergleichsberechnung 8 des Grundzustandes IIa (Skala angepasst)

Infolge der geringen Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  und der hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ergeben sich starke Spannungskonzentrationen neben der Verbindungsstelle, welche wie bereits im Grundzustand Ia von den Zellwandverformungen am freien Modellrand ausgehen. Mit den Spannungskonzentrationen geht eine Entlastung des Füllmaterials ober- und unterhalb der Verbindungsstelle einher. Bedingt durch das horizontale Kräftegleichgewicht ergibt sich hieraus eine



Abnahme der Normalkraft in der Verbindungsstelle, womit die axiale Wandverschiebung  $u_{h,t}^{\parallel}$  geringer wird. Der Einfluss der Spannungskonzentrationen und die damit einhergehende Abnahme der Verschiebung  $u_{h,t}^{\parallel}$  wird in der analytischen Lösung nicht berücksichtigt. Folglich überschätzt diese die maßgebende Verschiebung  $u_{1,t}^{\parallel}$ . Ergänzende Abbildungen zur Verdeutlichung dieses Zusammenhangs sind Anhang F.4 beigefügt.

Die Abweichung für die Verschiebung  $u_{2,t}^{\parallel}$  in Belastungsrichtung fällt dementsprechend mit  $\Delta u_{2,t}^{\parallel} \approx 0,27\%$  minimal aus. Dies liegt wie bereits für Vergleichsberechnung 13 des Grundzustandes Ia darin begründet, dass bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  die analytische Lösung das Abtragsverhalten der Zellwände korrekt wiedergibt (s. Anhang B.9). Auch die in den weiteren Vergleichsberechnungen festgestellten erhöhten Abweichungen lassen sich durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  und die zunehmenden Spannungskonzentrationen bei extremen Verhältniswerten der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zu den Wandsteifigkeiten begründen. Auf eine weitergehende Darstellung dieser wird verzichtet.

#### 5.3.2.4 Ergebniszusammenfassung zu den Grundzuständen I und II

Abschließend lässt sich feststellen, dass die erhöhten Abweichungen in den Verschiebungen zwischen der analytischen Lösung und den FE-Berechnungen sich im Wesentlichen durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$ , Inhomogenität in den Spannungsverteilungen des Füllmaterials und Einflüsse aus den freien Rändern begründen lassen. Diese Effekte treten vornehmlich bei extremen Steifigkeitsverhältnissen und großen Längen  $h$  der Verbindungsstelle auf. Die Annahme einer homogenen Spannungsverteilung für die in Kapitel 4.2 beschriebene analytische Lösung ist in diesen Fällen nicht mehr gänzlich zutreffend und die Eignung des gewählten Federansatzes zur Abbildung des Füllmaterials nimmt ab. Hierbei ist jedoch zu berücksichtigen, dass auch die Ergebnisse der FE-Berechnungen insbesondere für große Spannungskonzentrationen mit einer gewissen Ungenauigkeit behaftet sind.

Die erhöhten Abweichungen beschränken sich vornehmlich auf die Verschiebungen quer zur Belastungsrichtung, wohingegen die Abweichungen der Verschiebungen in Belastungsrichtung gering ausfallen. Infolgedessen ist auch für die äquivalenten Zug- und Druckmodule nur von minimalen Abweichung auszugehen. Hingegen fallen die Abweichungen für die äquivalenten Querdehnzahlen vereinzelt höher aus. Hiervon ausgenommen sind die Abweichungen des Grundzustandes Ib. Infolge der Vernachlässigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle im analytischen Ansatz überschätzt diese den äquivalenten Druckmodul  $E_{1,c}^*$  um maximal 17 %. Ein vergleichbarer systematischer Fehler lässt sich für die weiteren Grundzustände nicht erkennen.

Unter Berücksichtigung der hier teilweise gewählten Extremwerte für die verschiedenen Eingangsgrößen sowie im Hinblick auf die in Tabelle 2.1 und 2.3 dargestellten Wertebereiche gängiger Geozellenprodukte bestätigen die Ergebnisse der FE-Berechnungen somit die Gültigkeit der in Kapitel 4.2 hergeleiteten analytischen Lösung. Wird weiterhin beachtet, dass das

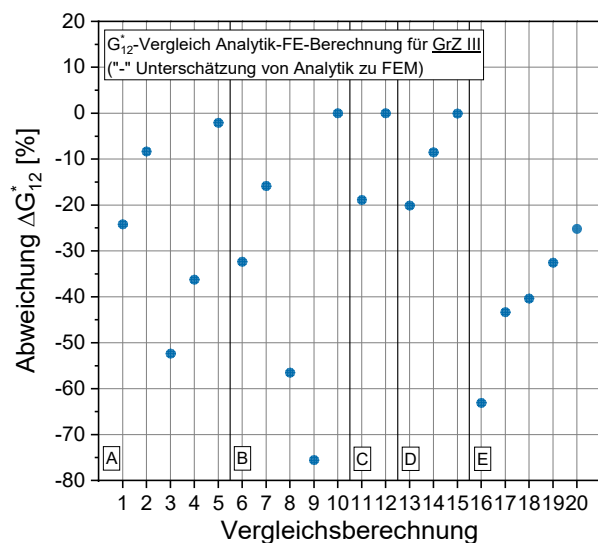
nichtbindige Füll- und Zellwandmaterial nur eine begrenzte Festigkeit aufweist, erscheinen die vereinzelt in den FE-Berechnungen festgestellten hohen Spannungskonzentrationen unrealistisch. Vielmehr ist eher von einer Plastifizierung des Bodens und/oder des Zellwandmaterials in diesem Bereich auszugehen, sodass die Spannungskonzentrationen vergleichsweise geringer ausfallen und sich im Füllmaterial homogenere Spannungsverteilungen ergeben würden.

### 5.3.3 Prüfung des äquivalenten Schubmoduls im Grundzustand III

#### 5.3.3.1 Ergebnisübersicht zu Grundzustand III

Aufgrund der in Kapitel 4.3.4 abgeleiteten Näherungslösung für den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  ist ein Vergleich der Verschiebungen wenig zielführend. Vielmehr werden hier die analytisch ermittelten Schubmodule direkt mit denen aus den FE-Berechnungen verglichen. Die äußeren Schubbelastungen  $T_{11}^{III}$  und  $T_{22}^{III}$  werden so gewählt, dass diese eine mittlere Schubspannung von  $\bar{\tau}_{12}^{III} = \bar{\tau}_{21}^{III} = 13 \text{ kN/m}^2$  ergeben (s. Kap. 4.3.2). Entsprechend der Beschreibung in Kapitel 4.3.3.1 lässt sich der äquivalente Schubmodul aus den FE-Berechnungen über die Verschiebung  $u_{M,2}^{III}$  im Punkt M ableiten (vgl. Abb. 4.25b). Durch den Bezug dieser Verschiebung und der Schubkraft  $T_{11}^{III}$  auf die relevanten Abmessungen des maßgebenden Ausschnitts ergeben sich die mittlere Gleitung sowie die mittlere Schubspannung gemäß Gleichung (4.69) und hieraus der äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$ .

Abbildung 5.8 zeigt den Vergleich des analytisch und numerisch ermittelten äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  anhand der prozentualen Abweichung bezogen auf die Ergebnisse der FE-Berechnungen. Die vertikalen Trennstriche markieren die verschiedenen in den Vergleichsberechnungen betrachteten Zellgeometrien (s. Tab. 5.1). Wie bereits bei den Grundzuständen I und II werden für die Zellgeometrie und die mechanischen Eigenschaften des Füllmaterials sowie des Zellwandmaterials gängige und extreme Eingangsgrößen angesetzt.



**Abb. 5.8:** Vergleich des äquivalenten Schubmoduls von Analytik und FE-Berechnung im Grundzustand III

Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die Abweichungen des analytisch ermittelten Schubmoduls  $G_{12}^*$  in einem Bereich von 0 bis -80 % liegen. Auf der sicheren Seite liegend liefert die analytische Lösung somit, unabhängig von den Füllmaterial- und Geozelleneigenschaften,

einen vergleichbaren oder geringeren äquivalenten Schubmodul verglichen zu den FE-Berechnungen. Zur nachfolgenden Verdeutlichung der Gründe für die Abweichungen zeigt Tabelle 5.3 eine Übersicht zu ausgewählten Ergebnisse der Vergleichsberechnungen mit den zugehörigen Eingangsgrößen. Eine Übersicht zu den Eingangsgrößen und Ergebnissen aller angeordneten Vergleichsberechnungen mit den zugehörigen Verschiebungen  $u_{M,2}^{III}$  kann Anhang F.5 entnommen werden.

**Tab. 5.3:** Exemplarische Ergebnisse der Vergleichsberechnungen für den Grundzustand III

Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}; E_f$	Äquivalenter Schubmodul $G_{12}^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]		$\Delta G_{12}^*$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	Analytisch	FE-Berechnung	[%]
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	989,83	1.306,06	-24,21
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 120	1.267,47	1.382,73	-8,34
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	982,15	2.061,69	-52,36
4	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 0,1	875,74	1.374,04	-36,27
5	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	749,42	765,22	-2,06
9	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	70,66	288,76	-75,53
12	8,0; 0,2; 22,49	30	375; 0,1	56.421,9	56.428,3	-0,01
16	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	951,54	2.576,23	-63,06
20	0,05; 0,75; 3,89	45	150; 120	741,07	990,72	-25,20

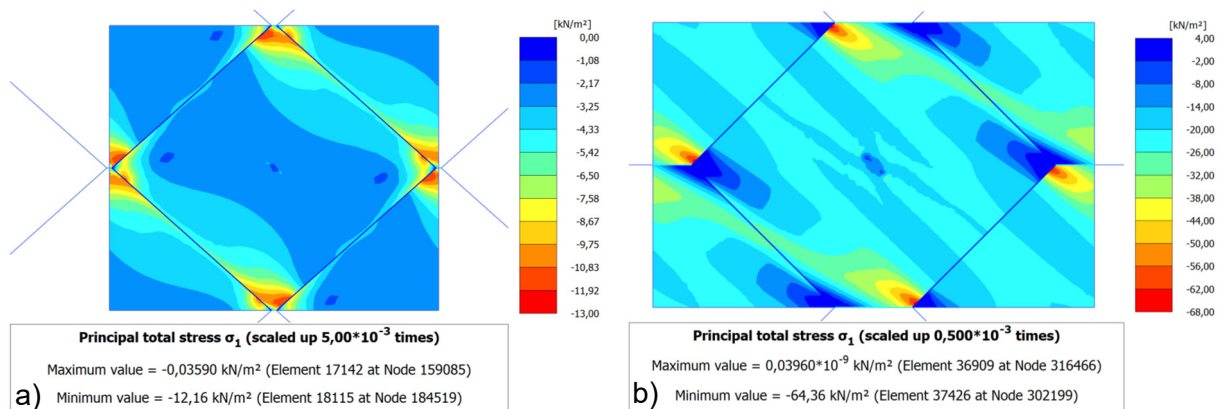
Die zusätzlich für die unbefüllte Zellstruktur durchgeführten Vergleichsberechnungen zeigen eine Abweichung des analytisch und numerisch ermittelten Schubmoduls von  $\Delta G_{12}^* < 0,01$  %. Die hierzu verwendeten Modelle sind vergleichbar zu dem in Abbildung 4.26 dargestellten Modell. Die äußere Schubbelastung entspricht der für die Modellierung der befüllten Geozellen. Eine Übersicht zu den verschiedenen Eingangsgrößen und den Ergebnissen ist Anhang F.5 beigelegt. Die vernachlässigbar geringen Abweichungen verdeutlichen die korrekte Abbildung des Verhalten der unbefüllten Zellstruktur durch die analytische Lösung. Erhöhte Abweichungen bei größeren Längen h der Verbindungsstellen lassen sich, wie noch im Grundzustand I und II, nicht feststellen.

### 5.3.3.2 Gründe für die Abweichungen des äquivalenten Schubmoduls

Aus einer Betrachtung der Zahlenwerte in Tabelle 5.3 wird ersichtlich, dass mit zunehmendem Elastizitätsmodul  $E_f$  des Füllmaterials verglichen zu den Zellwandsteifigkeiten die Abweichungen des Schubmoduls  $G_{12}^*$  abnehmen. Deutlich wird dies aus den Vergleichsberechnungen 1, 2 und 5 oder 16 und 20. Beispielsweise liegt für die Vergleichsberechnung 5 nur noch eine geringe Abweichung von -2,06 % vor. Ebenfalls ergeben sich bei sehr geringen Füllmaterialsteifigkeiten  $E_f$  nur vernachlässigbare Abweichungen zwischen dem analytisch und numerisch ermittelten Schubmodul  $G_{12}^*$  (Vergleichsberechnung 12). Entsprechend Kapitel 4.3.4 nimmt die allgemeine Näherungslösung durch eine Grenzwertbetrachtung mit einer Federkonstante von  $c_f \rightarrow 0$  die korrekte Lösung für die unbefüllte Zellstruktur an, sodass in diesem Fall keine

großen Unterschiede für den Schubmodul  $G_{12}^*$  auftreten. Folglich liefert die allgemeine Näherungslösung sowohl für eine sehr geringe als auch eine hohe Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  eine gute bis sehr gute Übereinstimmung mit der FE-Berechnungen. Die festgestellten erhöhten Abweichungen beschränken sich vornehmlich auf den Bereich geringer Füllmaterialsteifigkeiten  $E_f$  (Vergleichsberechnung 3 und 9).

Aus den in Tabelle 5.3 dargestellten Ergebnissen zeigt sich weiterhin eine Abhängigkeit der Abweichung für den Schubmodul  $G_{12}^*$  von der Länge  $h$  der Verbindungsstelle. Für die Vergleichsberechnung 1 bis 5 klingen die Abweichung zwischen der analytischen Lösung und der FE-Berechnung mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  schnell ab. Hingegen weichen, wie beispielsweise aus Vergleichsberechnung 20 deutlich wird, für große Längen  $h$  der Verbindungsstelle auch bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  der analytisch und numerisch ermittelte Schubmodul  $G_{12}^*$  stärker voneinander ab. Wie im Grundzustand I und II lässt sich dieser Zusammenhang sowie die zuvor beschriebenen erhöhten Abweichungen bei geringer Füllmaterialsteifigkeit (Vergleichsberechnung 3 und 9) durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  begründen. Abbildung 5.9 veranschaulicht diesen Einfluss anhand der maximalen Hauptspannungsverteilung am maßgebenden Modellausschnitt für die beiden Vergleichsberechnungen 3 und 16.



**Abb. 5.9:** Maximale Hauptspannungsverteilung am maßgebenden Modellausschnitt für a) Vergleichsberechnung 3 und b) Vergleichsberechnung 16 des Grundzustandes III

In beiden Vergleichsberechnungen treten die Maximalwert der Hauptspannung an den geneigten Zellwänden auf. Während jedoch für Vergleichsberechnung 3 hierfür das geringe Verhältnis der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zur Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  verantwortlich ist, resultiert dies für die Vergleichsberechnung 16 aus der vergleichsweise großen Länge  $h$  der Verbindungsstelle. Entsprechend den Beschreibungen in Kapitel 4.3.3.1 ergeben sich die Biegemomente in den geneigten Zellwänden aus der Belastung der Verbindungsstelle. Durch die hohe Zellwandlänge  $h$  liegt in Vergleichsberechnung 16 ein großer Hebelarm vor, sodass trotz der hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  die geneigten Zellwände durch Biegemomente beansprucht werden. Hierdurch tritt eine Wandverdrehung der geneigten Zellwände auf, welche zu einer Reaktion des Füllmaterials in diesem Bereich führt. Hingegen wird in der analytischen Lösung vereinfacht

die Reaktion des Füllmaterials im Schnittpunkt E der geneigten Wände und der Verbindungsstelle angenommen (Abb. 4.27b). Die hierzu verschobene Lage der Füllmaterialreaktion in den beiden FE-Berechnungen bewirkt eine Verringerung der Wandverdrehungen, womit sich eine verhältnismäßig geringere Verschiebung  $u_{M,2}^{III}$  und ein höherer Schubmodul  $G_{12}^*$  ergeben.

Bezogen auf die Eigenschaften des Verbundmaterials Geozelle-Boden sind die Abweichung bei geringen Füllmaterialsteifigkeiten eher unwesentlich, da üblicherweise die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  verglichen zur Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände wesentlich höher ist. Bei kleinen Längen  $h$  der Verbindungsstelle stellt die analytische Näherungslösung somit einen akzeptablen bis zufriedenstellenden Ansatz dar. Dementgegen liefert bei großen Zellwandlängen  $h$  die Näherungslösung nur bei sehr hohen Füllmaterialsteifigkeiten eine akzeptable Übereinstimmung. In allen Fällen ergibt sich aus der Näherungslösung ein auf der sicheren Seite liegender äquivalenter Schubmodul  $G_{12}^*$ .

## 5.4 Prüfung des Querdehnungseinflusses des Füllmaterials

### 5.4.1 Vorgehensweise zur Prüfung des Querdehnungseinflusses

Die in Kapitel 4.2 und 4.3 hergeleiteten Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten werden unter Voraussetzung einer Querdehnzahl des Füllmaterials von  $v_f = 0$  abgeleitet, womit von einem vernachlässigbaren Einfluss aus der Querdehnung des Füllmaterials ausgegangen wird. Ergänzend werden in Kapitel 4.5.1 Anwendungsgrenzen hergeleitet, für welche die Bestimmungsgleichungen dieser Annahme genügen.

Wie bereits zur Plausibilitätsprüfung der äquivalenten Materialkennwerte werden zur Einflussuntersuchung der Querdehnung und zur Prüfung der Anwendungsgrenzen FE-Berechnungen herangezogen. Die hierzu verwendeten Modelle stimmen mit den bereits in Kapitel 5.3 beschriebenen Modellen überein. Die zugehörigen Angaben der Zellgeometrien können Tabelle 5.1 entnommen werden. Im Hinblick auf die Prüfung der Querdehnungswirkung wird hier jedoch der Variationsumfang reduziert. Eine Übersicht der verwendeten Eingangsgrößen lässt sich Tabelle 5.4 entnehmen.

**Tab. 5.4:** Ergänzende Eingangsgrößen für die Betrachtung der Querdehnung des Füllmaterials

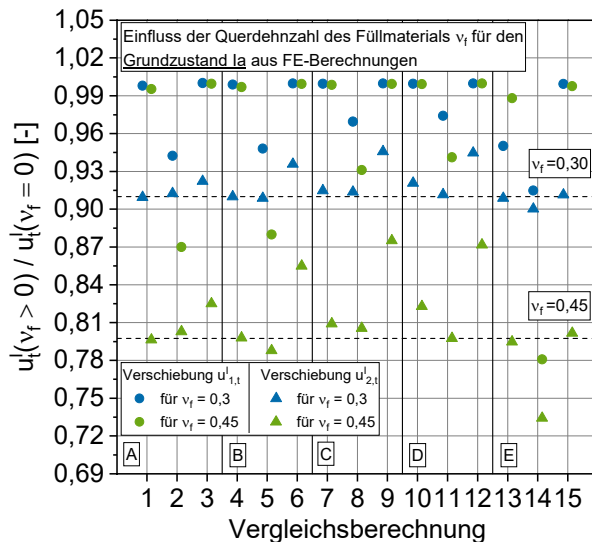
Berechnungsreihe	Berechnung	Wanddicke	Elastizitätsmodul [MN/m <sup>2</sup> ]		Querdehnzahl
		t [mm]	Füllmaterial $E_f$	Zellwand $E_{cw}$	$v_f$ [-]
a	1, 4, 7, 10, 13	1,7	30	150	0,3; 0,45
b	2, 5, 8, 11, 14	1,7	1	588,2	0,3; 0,45
c	3, 6, 9, 12, 15	0,5	120	288	0,3; 0,45

In der Berechnungsreihe b und c werden entsprechend den Betrachtungen zur Plausibilitätsprüfung extreme Eingangsgrößen für das Füllmaterial und die Zellwände gewählt. Ebenfalls werden zur Prüfung der Gültigkeit der Anwendungsgrenzen für die Querdehnzahl des Füllmaterials hohe Werte von  $v_f = 0,3$  und  $0,45$  angesetzt.

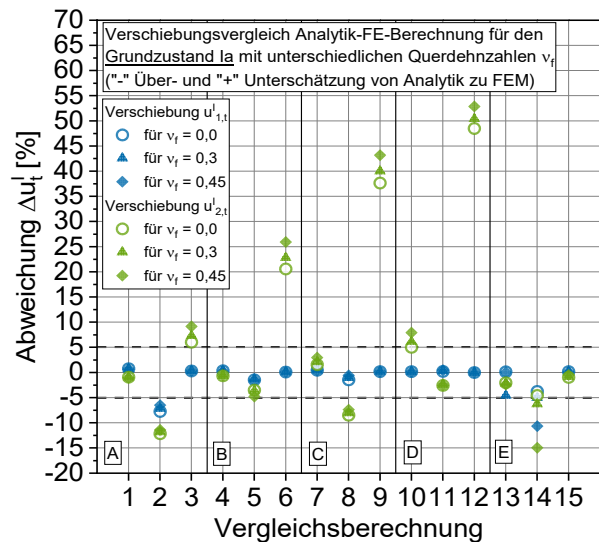
## 5.4.2 Prüfung der Anwendungsgrenzen der Grundzustände I und II

### 5.4.2.1 Anwendungsgrenze des Grundzustandes Ia

Abbildung 5.10 zeigt die Ergebnisse der FE-Berechnung im Grundzustand Ia. Zur Ergebnisdarstellung sind die maßgebenden Verschiebungen  $u_{1,t}^l$  in Belastungsrichtung und  $u_{2,t}^l$  quer zur Belastungsrichtung mit einer Querdehnzahl  $v_f > 0$  als Verhältnisswerte zu den Verschiebungen für den Fall von  $v_f = 0$  auf der y-Achse aufgetragen. Kreisförmige Symbole kennzeichnen die Verhältnisswerte der Verschiebung  $u_{1,t}^l$  und dreieckige die der Verschiebung  $u_{2,t}^l$ .



**Abb. 5.10:** Einfluss der Querdehnung auf die Verschiebungen im Grundzustand Ia aus den FE-Berechnungen



**Abb. 5.11:** Verschiebungsvergleich von Analytik und FE-Berechnung im Grundzustand Ia bei verschiedenen Querdehnzahlen

Aus der Abbildung wird deutlich, dass mit dem Ansatz einer Querdehnzahl von  $v_f > 0$ , weitestgehend unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen, eine Abnahme der Verschiebung  $u_{2,t}^l$  quer zu Belastungsrichtung einhergeht. Das Verschiebungsverhältnis nimmt hierbei Werte von ca. 0,91 für eine Querdehnzahl  $v_f = 0,3$  und von ca. 0,8 für eine Querdehnzahl  $v_f = 0,45$  an. Für die Berechnungsreihe a und c mit hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  weisen die Verhältnisswerte der Verschiebung  $u_{1,t}^l$  in Belastungsrichtung überwiegend einen Werte von 1 auf, sodass sich trotz der größeren Querdehnzahlen die gleiche Verschiebung  $u_{1,t}^l$  in Belastungsrichtung ergibt. Hingegen folgt für die Berechnungsreihe b aus der Zunahme der Querdehnzahl  $v_f$  eine Abnahme der Verschiebung  $u_{1,t}^l$ .

Gemäß Gleichung (4.4) wird die Verschiebung  $u_{2,t}^l$  quer zur Belastungsrichtung im Grundzustand Ia maßgebend durch die Federsteifigkeit  $c_f$  und damit durch die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  bestimmt. Wird aus der Definition der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  im EVZ entsprechend Gleichung (4.84) nur der Nenner herangezogen, so lassen sich für die beiden hier gewählten Zahlenwerte der Querdehnzahl von  $v_f = 0,3$  und  $0,45$  die in Gleichung (5.4) angegebenen Werte ermitteln.

$$1 - v_f^2 = 1 - 0,3^2 = 0,91 \quad \text{und} \quad 1 - v_f^2 = 1 - 0,45^2 = 0,7975 \quad (5.4)$$

Demzufolge entspricht die aus Abbildung 5.10 hervorgehende Abnahme der Verschiebung  $u_{2,t}^l$  quer zur Belastungsrichtung nahezu exakt den Zahlenwerten aus Gleichung (5.4). Infolge des hohen Steifigkeitsverhältnisses der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  zu den Wandsteifigkeiten in Berechnungsreihe a und c wird die Verschiebung  $u_{1,t}^l$  in Belastungsrichtung maßgebend durch die axialen Zellwandverschiebungen bestimmt (vgl. 5.3.2.3). Der zusätzliche Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  durch eine Querdehnzahl von  $\nu_f > 0$  besitzt somit keinen nennenswerten Einfluss und die Verschiebung  $u_{1,t}^l$  bleibt unverändert. Dementgegen resultiert die Abnahme der Verschiebung  $u_{1,t}^l$  in Belastungsrichtung für die Berechnungsreihe b aus dem geringen Steifigkeitsverhältnisses von  $E_{f,v}$  zu den Wandsteifigkeiten. Durch den Steifigkeitsanstieg nimmt der Biegeanteil der Zellwandverformungen ab und der axiale Verformungsanteil zu, womit sich das Abtragsverhalten der Zellwände ändert und die Verschiebung  $u_{1,t}^l$  geringer wird.

Die beschriebenen Zusammenhänge verdeutlichen, dass sich der Einfluss der Querdehnung ausschließlich auf eine Zunahme der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f$  auf  $E_{f,v}$  beschränkt. Ein zusätzlicher Einfluss auf die Entstehung minimaler Hauptspannungen  $\sigma_3$  liegt nicht vor und der in Kapitel 4.2.3 angenommene eindimensionale Federansatz besitzt weiterhin Gültigkeit. Die in Anhang G.1 dargestellte minimale Hauptspannungsverteilung  $\sigma_3$  für Vergleichsberechnung 7 bestätigt dies zusätzlich. Trotz einer sehr großen Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  treten keine relevanten Druckspannungen für die Hauptspannung  $\sigma_3$  auf.

Der ausschließliche Einfluss der Querdehnung auf den Steifigkeitsanstieg des Elastizitätsmoduls  $E_f$  zur Steifigkeit  $E_{f,v}$  wird ebenfalls aus dem in Abbildung 5.11 dargestellten Vergleich der analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen ersichtlich. Im Fall einer Querdehnzahl  $\nu_f > 0$  wird gemäß den Beschreibungen in Kapitel 4.5.1 für die analytische Verschiebungsberechnung der Elastizitätsmodul  $E_f$  durch die Steifigkeit  $E_{f,v}$  nach Gleichung (4.84) in den verschiedenen Gleichungen der Verschiebungen substituiert. Wie aus der Abbildung deutlich wird, ergeben sich unabhängig von den Werten der Querdehnzahl  $\nu_f$  in allen Berechnungen vergleichbare Abweichungen zwischen den analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen. Würde von der Querdehnung des Füllmaterials ein zusätzlicher Einfluss ausgehen, wären systematische Unterschiede in den Abweichungen zu erwarten. Diese liegen jedoch nicht vor. Eine Prüfung zum Querdehnungseinfluss mit den in Tabelle 4.9 dargestellten vereinfachten Anwendungsgrenzen im EVZ liefert für die verschiedenen Zellgeometrien A, B, C, D und E (s. Tab. 5.1) folgendes Ergebnis.

$$\begin{aligned}
 \nu_f = 0,45 &\approx 0,44 = \sin^2\theta_A = \sin^2\theta_B \quad (\text{kein/geringer Einfluss aus } \nu_f \text{ auf } \sigma_3) \\
 \nu_f = 0,3 &> 0,25 = \sin^2\theta_C = \sin^2\theta_D \quad (\text{Einfluss aus } \nu_f \text{ auf } \sigma_3) \\
 \nu_f = 0,45 &< 0,5 = \sin^2\theta_E \quad (\text{kein Einfluss aus } \nu_f \text{ auf } \sigma_3)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

In Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FE-Berechnungen wirkt sich somit der Einfluss der Querdehnung des Füllmaterials für die Zellgeometrien A, B und E nicht auf die minimale

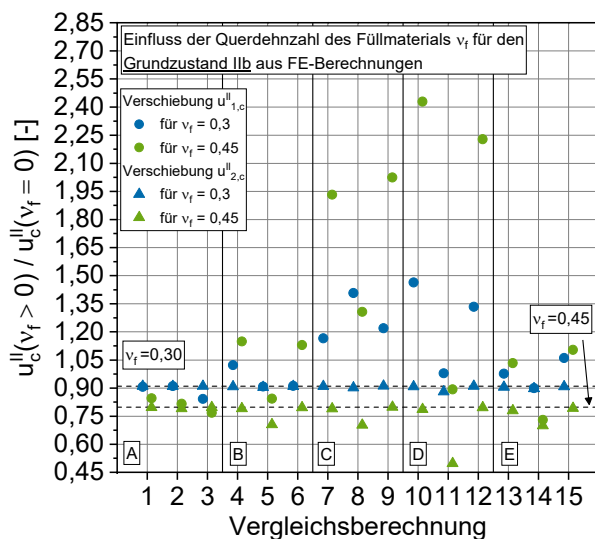
Hauptspannungen  $\sigma_3$  aus. Dementgegen wäre für die Zellgeometrien C und D eigentlich von einem Einfluss auszugehen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu den vorgestellten Ergebnissen der FE-Berechnungen. Für eine möglichst einfache Formulierung der Anwendungsgrenzen wird in Kapitel 4.5.1 die Verschiebungen der Zellwände bei der Herleitung vernachlässigt. Wird hingegen die vollständige Anwendungsgrenze gemäß Anhang D.1 herangezogen, so ergibt sich beispielsweise für Vergleichsberechnung 4 folgende Bedingung.

$$v_f = 0,45 < 0,98 = \frac{1}{1 + \frac{h + l \cos \theta}{\left[ \frac{E_f}{E_{cw} t} \left( \frac{l}{\cos^2 \theta} + h \right) \frac{(2h + l \cos \theta)}{\tan \theta} + l \sin \theta \tan \theta \right]}} \quad (5.6)$$

Unter Berücksichtigung der Zellwandverformungen lässt sich somit auch für diesen Fall zeigen, dass die Querdehnung nur die Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  beeinflusst. In gleicher Weise gilt dies auch für die weiteren Vergleichsberechnungen der Zellgeometrien C und D, womit die Gültigkeit der abgeleiteten Anwendungsgrenze nachgewiesen ist. Die vereinfachte Anwendungsgrenze stellt hierbei einen auf der sicheren Seite liegenden Ansatz dar.

#### 5.4.2.2 Anwendungsgrenze des Grundzustandes IIb

Wie zum Grundzustand Ia ist in Abbildung 5.12 der aus den FE-Berechnungen ermittelte Einfluss der Querdehnung des Füllmaterials anhand der Verhältnisswerte der maßgebenden Verschiebungen bezogen auf den Fall ohne eine Querdehnung des Füllmaterials mit  $v_f = 0$  dargestellt. Die Darstellungsweise entspricht hierbei der von Abbildung 5.10. Aus den Verhältnisswerten für die Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$  in Belastungsrichtung wird ersichtlich, dass der Ansatz einer Querdehnzahl  $v_f > 0$  zu einer weitestgehend einheitlichen Abnahme der Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$  führt und diese Abnahme mit den in Gleichung (5.4) angegebenen Werten übereinstimmt.



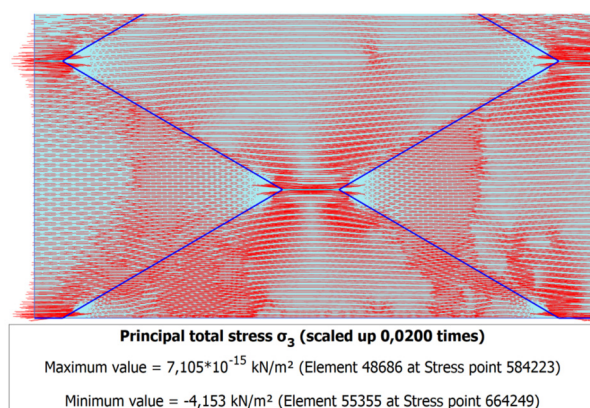
**Abb. 5.12:** Einfluss der Querdehnung auf die Verschiebungen im Grundzustand IIb aus den FE-Berechnungen

Da die in Gleichung (4.28) definierte Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$  wie schon die Verschiebung  $u_{2,t}^{\parallel}$  im Grundzustand Ia maßgeblich von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  abhängt, lässt sich somit auch hier die Verschiebungsabnahme durch den Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  bei einer

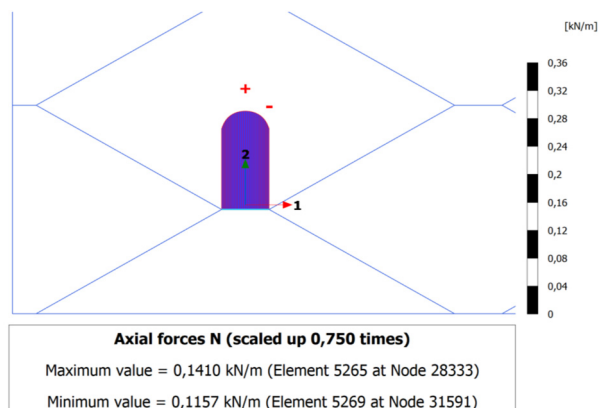


Querdehnzahl  $\nu_f > 0$  begründen. Bei geringer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  (Vergleichsberechnung 5, 8, 11 und 14) mit einer Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  bewirkt der Steifigkeitsanstieg eine starke Abnahme der Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$ . Dementgegen weist die Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  quer zur Belastungsrichtung ein abweichendes Verhalten auf. Während für die Zellgeometrie A kein Anstieg der Verschiebung erkennbar ist, zeigt sich für die Zellgeometrien B und E bei einer Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  eine leichte und für die Zellgeometrien C und D selbst bei Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,30$  eine deutliche Zunahme der Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$ .

Aus einem ergänzenden Vergleich der Verhältnisswerte der Verschiebungen für die Zellgeometrien A und B sowie C und D wird ersichtlich, dass der Anstieg der Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  quer zur Belastungsrichtung weiterhin mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle ansteigt. Zur Erläuterung der Gründe für die Zunahme von  $u_{1,c}^{\parallel}$  bei großer Querdehnung des Füllmaterials zeigt Abbildung 5.13 die minimalen Hauptspannungstrajektorien  $\sigma_3$  im Modellausschnitt am Beispiel von Vergleichsberechnung 10. Demnach treten infolge der Querdehnungswirkung Hauptspannung  $\sigma_3$  quer zur Belastungsrichtung auf. Durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  fallen die Spannungsbeträge um die Verbindungsstelle mit ca.  $-4,1 \text{ kN/m}^2$  höher aus als mit ca.  $-0,4 \text{ kN/m}^2$  im Bereich der Füllmaterialmitte (s. Anhang G.2).



**Abb. 5.13:** Minimale Hauptspannungstrajektorien für Vergleichsberechnung 10 mit  $\nu_f = 0,45$  im Grundzustand IIb

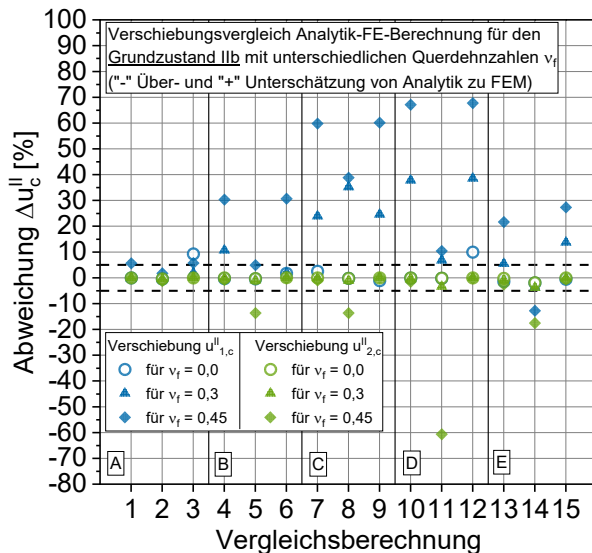


**Abb. 5.14:** Normalkraft in der Verbindungsstelle für Vergleichsberechnung 10 mit  $\nu_f = 0,45$  im Grundzustand IIb

Die Hauptspannung  $\sigma_3$  ruft zur Einhaltung des horizontalen Kräftegleichgewichts in den Verbindungsstellen Normalkräfte hervor (s. Abb. 5.14), welche zu einer zusätzlichen Verschiebung  $u_{h,c}^{\parallel}$  in  $x_1$ -Richtung führen. Durch diesen zusätzlichen Verschiebungsanteil nehmen die Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  in  $x_1$ -Richtung zu, worin der in Abbildung 5.12 dargestellte Anstieg der Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  begründet liegt. Mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle wird der zusätzliche Verschiebungsanteil von  $u_{h,c}^{\parallel}$  größer und der Anstieg der Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  quer zur Belastungsrichtung fällt verhältnismäßig höher aus.

Abbildung 5.15 verdeutlicht den Querdehnungseinfluss des Füllmaterials auf die Hauptspannung  $\sigma_3$  zusätzlich anhand des Vergleichs der analytisch und numerisch ermittelten resultierenden Verschiebungen. Entsprechend der zuvor beschriebenen Vorgehensweise im Grundzustand Ia wird zur Berechnung der Verschiebungen mit der analytischen Lösung hierbei die

Steifigkeit  $E_{f,v}$  anstelle des Elastizitätsmoduls  $E_f$  in den verschiedenen Gleichungen der Verschiebungen verwendet. Da in der analytischen Lösung der Einfluss aus der Hauptspannung  $\sigma_3$  nicht abgebildet wird, treten für die Zellgeometrien C und D insbesondere bei einer Querdehnzahl von  $v_f = 0,45$  große Unterschiede von bis zu 70 % für die Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  quer Belastungsrichtung zwischen der analytischen Lösung und den FE-Berechnungen auf.



**Abb. 5.15:** Verschiebungsvergleich von Analytik und FE-Berechnung im Grundzustand IIb bei verschiedenen Querdehnzahlen

Neben den Unterschieden für die Verschiebung  $u_{1,c}^{\parallel}$  quer zur Belastungsrichtung gehen aus Abbildung 5.16 auch für die Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$  in Belastungsrichtung der Berechnungsreihe b bei einer Querdehnzahl von  $v_f = 0,45$  erhöhte Unterschiede hervor. In diesem Fall weisen die Zellwände eine relativ hohe Biegesteifigkeit  $E_{l,cw}$  verglichen zur Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  auf. Durch die Querdehnung des Füllmaterials nimmt der in Kapitel 5.3.2.3 beschriebene lokale Einfluss der Biegesteifigkeit auf die Spannungskonzentrationen um die Verbindungsstelle nochmals zu (s. Anhang G.2) und die Abweichungen zwischen der analytisch und numerisch ermittelten Verschiebung  $u_{2,c}^{\parallel}$  werden größer. Eine ergänzende Prüfung des Querdehnungseinflusses mit den analytischen Anwendungsgrenzen zeigt Tabelle 5.5. Ergänzend zu den Ergebnissen der vereinfachten Anwendungsgrenzen gemäß Tabelle 4.9 sind die Ergebnisse der vollständigen Anwendungsgrenzen dargestellt (s. Anhang D.4).

**Tab. 5.5:** Prüfung von Querdehnungseinfluss auf Entstehung minimaler Hauptspannungen durch analytische Anwendungsgrenze im Grundzustand IIb für den EVZ

Geometrie	Relevante Größen $\theta; l; h$	Anwendungsgrenze		Prüfung für $v_f = 0,3$ und $0,45$
		Vereinfacht	Vollständig	
		$\sin^2\theta$	$1/\left(1 + \frac{h + l\cos\theta}{l\sin\theta\tan\theta}\right)$	
A	41,75°; 16,82 cm; 0,2 cm	0,44	0,44	$v_f = 0,45 \approx 0,44$
B	41,75°; 16,82 cm; 2,5 cm	0,44	0,40	$v_f = 0,45 > 0,40$
C	29,87°; 22,49 cm; 0,2 cm	0,25	0,25	$v_f = 0,30 > 0,25$
D	29,87°; 22,49 cm; 2,5 cm	0,25	0,23	$v_f = 0,30 > 0,23$
E	45°; 3,89 cm; 0,75 cm	0,5	0,44	$v_f = 0,45 \approx 0,44$

Hieraus wird ersichtlich, dass die vereinfachten Anwendungsgrenzen für den Grundzustand IIb keinen Ansatz auf der sicheren Seite darstellen. Vielmehr ergeben sich bei der vollständigen Formulierung mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle geringere zulässige Werte für die Querdehnzahl  $v_f$ . Dementsprechend ist bei der Zellgeometrie B für eine Querdehnzahl von  $v_f > 0,40$  sowie bei den Zellgeometrien C und D für eine Querdehnzahl von  $v_f > 0,25$  und  $0,23$  von einem Einfluss aus der Hauptspannung  $\sigma_3$  auszugehen. Bei der Zellgeometrie A und E liegt für eine Querdehnzahl von  $v_f = 0,45$  ein geringer Einfluss vor.

Wie aus dem Vergleich mit den Ergebnissen der FE-Berechnung deutlich wird, werden die zuvor beschriebenen Zusammenhänge durch die vollständigen Anwendungsgrenzen korrekt abgebildet. Somit ist auch für den Grundzustand IIb die Gültigkeit der in Kapitel 4.5.1 abgeleiteten Anwendungsgrenzen bestätigt. Für große Zellwandlängen  $h$  liefert die vereinfachte Anwendungsgrenze keinen auf der sicheren Seite liegenden Ansatz. Im Grundzustand IIb ist folglich die vollständige Formulierung der Anwendungsgrenzen unter Berücksichtigung der Länge  $h$  der Verbindungsstelle und der Länge  $l$  der geneigten Zellwand zu verwenden.

#### 5.4.2.3 Anwendungsgrenzen des Grundzustandes Ib und IIa

Ein maßgeblicher Einfluss der Querdehnung des Füllmaterials auf die Entstehung minimaler Hauptspannungen  $\sigma_3$  lässt sich in den FE-Berechnungen für den Grundzustand Ib und IIa nicht feststellen. Dies ist in Übereinstimmung mit den in Tabelle 4.9 dargestellten vereinfachten Anwendungsgrenze des EVZ im Grundzustand Ib und IIa. Für eine Extremwertbetrachtung mit einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  und einer Querdehnzahl  $v_f = 0,45$  liefert diese im Grundzustand Ib und IIa

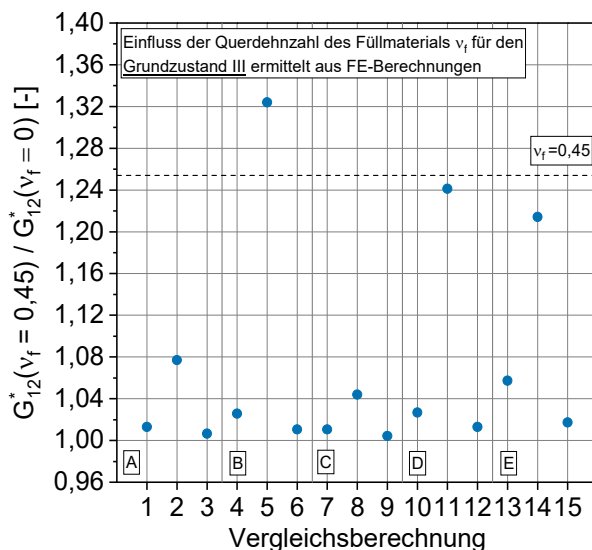
$$v_f = 0,45 < 0,5 = \cos^2 \theta_E \text{ (kein Einfluss aus } v_f \text{ auf } \sigma_3 \text{)} . \quad (5.7)$$

Folglich besitzt die Querdehnzahl  $v_f$  außer auf den Steifigkeitsanstieg des Füllmaterials von  $E_f$  zu  $E_{f,v}$  keinen weiteren Einfluss. Da die Kosinusfunktion eine streng monoton fallende Funktion im Bereich des Zellwinkels von  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  darstellt, bildet die in Gleichung (5.7) dargestellte Bedingung für die gewählten Zellgeometrien den ungünstigsten Fall ab. Wie bereits in Kapitel 4.5.1 beschrieben stellt die vereinfachte Anwendungsgrenze im Grundzustand Ib einen auf der sicheren Seite liegenden Ansatz dar. Unter Berücksichtigung der vernachlässigten Wandverformungen bei der vereinfachten Anwendungsgrenze gilt dies auch für den Grundzustand IIa (vgl. Anhang D.3).

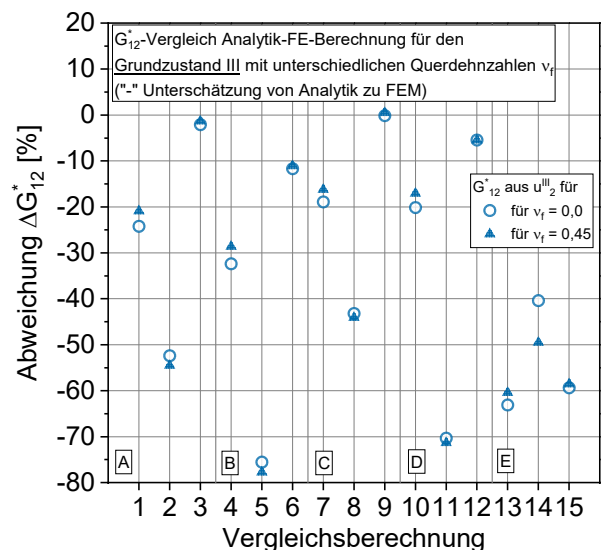
Ein Vergleich des numerisch ermittelten Querdehnungseinflusses sowie eine Gegenüberstellung mit der analytischen Lösung kann Anhang G.3 entnommen werden. Die dort vereinzelt dargestellten erhöhten Abweichungen zwischen den analytisch und numerisch ermittelten Verschiebungen lassen sich wie zuvor beschrieben durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände auf Spannungskonzentrationen im Füllmaterial erklären. Mit ansteigender Querdehnzahl  $v_f$  des Füllmaterials nimmt der Einfluss hieraus zu.

### 5.4.3 Prüfung des Einflusses der Querdehnung für den Grundzustand III

Ergänzend zu den Betrachtungen in den Grundzuständen I und II wird auch für den Grundzustand III der Querdehnungseinfluss des Füllmaterials mit FE-Berechnungen untersucht. Die hierzu verwendeten Modelle entsprechen denen von Kapitel 5.3.3. Die zugehörigen Eingangsgrößen können Tabelle 5.1 und 5.4 entnommen werden. Für den Grundzustand III liegt keine Anwendungsgrenze zum Einfluss der Querdehnung des Füllmaterials auf die analytische Lösung des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  vor. Zur Prüfung der Querdehnungswirkung werden nachstehend die numerisch ermittelten Schubmodule  $G_{12}^*$  bei einem extremen Wert der Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  und einem Wert von  $\nu_f = 0$  miteinander verglichen. In Abbildung 5.16 sind die Ergebnisse der Modellierung als Verhältniswert angegeben. Die zusätzlich in der Abbildung dargestellte gestrichelte Linie bei einem Wert von ca. 1,25 markiert den theoretisch aus dem Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f$  zu  $E_{f,v}$  folgenden Verhältniswert für den Schubmodul  $G_{12}^*$ . Dieser lässt sich aus dem für eine Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  ermittelten Zahlenwert von Gleichung (5.4) durch die Bildung des Kehrwerts bestimmen.



**Abb. 5.16:** Einfluss der Querdehnung auf den äquivalenten Schubmodul im Grundzustand III aus den FE-Berechnung



**Abb. 5.17:**  $G_{12}^*$ -Vergleich von Analytik und FE-Berechnung im Grundzustand III bei verschiedenen Querdehnzahlen

Aus den in der Abbildung dargestellten Verhältniswerten zeigt sich, dass in allen Fällen der Ansatz einer Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  zu einem Anstieg des Schubmoduls  $G_{12}^*$  führt. Bei der Berechnungsreihe b fällt wegen der geringen Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  der Anstieg des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  wie bereits im Grundzustand Ia und IIb vergleichsweise stärker aus. Für große Länge  $h$  der Verbindungsstelle entspricht der Anstieg des Schubmoduls  $G_{12}^*$  mit ca. 1,22 bis 1,32 in den Vergleichsberechnung 5, 11 und 14 der Berechnungsreihe b weitestgehend dem theoretischen Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  um den Faktor 1,25. Bei hoher Füllmaterialsteifigkeiten wirkt sich hingegen die Zunahme der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f$  zu  $E_{f,v}$  gemäß Gleichung (4.84) genauso wie bei geringen Längen  $h$  der Verbindungsstelle weniger stark aus.

Ein Ergebnisvergleich der analytischen Lösung mit der FE-Berechnung ist unter ergänzender Angabe der Abweichungen für eine Querdehnzahl von  $\nu_f = 0$  in Abbildung 5.17 dargestellt. Entsprechend der Vorgehensweise zu den Grundzuständen I und II wird der analytisch abgeleitete Schubmodul  $G_{12}^*$  durch Substitution des Elastizitätsmoduls  $E_f$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  in der allgemeinen Näherungslösung von Kapitel 4.3.4 berechnet. Aus der Abbildung zeigt sich, dass die Unterschiede in den Abweichungen zwischen den beiden Querdehnzahlen nur gering ausfallen. Lediglich für Vergleichsberechnung 14 ergibt sich infolge hoher Spannungskonzentrationen ein etwas größerer Unterschied verglichen zu den Ergebnissen der weiteren Vergleichsberechnungen (vgl. Kap. 5.3.3).

In Verbindung mit dem Extremwert der Querdehnzahl von  $\nu_f = 0,45$  lässt sich somit feststellen, dass die analytische Lösung den mit der Querdehnung einhergehenden Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  korrekt abbildet. Folglich fällt der Querdehnungseinfluss auf die Entstehung minimaler Hauptspannungen  $\sigma_3$  auch für eine Querdehnzahl von  $\nu_f > 0$  vernachlässigbar gering aus und der in Kapitel 4.3.3.1 gewählte Ansatz über eindimensionale Federn besitzt weiterhin Gültigkeit.

## 5.5 Ergebnisübersicht zur Plausibilitätsprüfung

Die vorstehende Plausibilitätsprüfung verdeutlicht die Richtigkeit der in Kapitel 4 abgeleiteten analytischen Lösung. Wie zur Herleitung der äquivalenten Materialkennwerte angenommen wurde, geht auch aus den FE-Berechnungen ein lineares Materialverhalten des Verbundmaterials Geozelle-Boden für die verschiedenen Grundzustände hervor. Infolge der fehlenden Zugfestigkeit des Füllmaterials liegt jedoch keine linear elastische Spannungs-Verzerrungs-Beziehung vor, sondern die äquivalenten Materialkennwerte gelten nur für eine Erstbelastung. Eine theoretische Prüfung der aus der Materialtheorie hervorgehenden Orthotropiebedingungen zeigt, dass unter Berücksichtigung der vernachlässigten Axialverschiebungen der Verbindungsstelle in der analytischen Lösung für den Grundzustand Ib die äquivalenten Materialkennwerte den notwendigen Orthotropiebedingungen genügen. Für die allgemeine Lösung sind hierbei jedoch nur die Belastungskombinationen des Grundzustandes Ia und IIb oder Ib und IIa zulässig. Hingegen ist für bestimmte geometrische und mechanische Eigenschaften des Verbundmaterials eine weitergehende Kombination der Grundzustände Ia und IIa oder Ib und IIb möglich.

Vergleichsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode bestätigen die Gültigkeit der abgeleiteten Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten. Für die Grundzustände I und II liegen die Abweichungen der Materialkennwerte vornehmlich im angenommenen Genauigkeitsbereich der FE-Berechnungen. Im Grundzustand Ia, IIa und IIb treten bei extremen Verhältnissen der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zu den Zellwandsteifigkeiten vereinzelt hierzu erhöhte Abweichungen auf und ergeben sich aus lokalen Spannungskonzentrationen

im Bereich des Füllmaterial um die Verbindungsstellen. Im Grundzustand Ib resultieren die erhöhten Abweichungen der äquivalenten Materialkennwerte hingegen bei zunehmenden Längen  $h$  der Verbindungsstelle aus den vernachlässigten Axialverschiebungen der Verbindungsstelle in der analytischen Lösung. Die Überschätzung des äquivalenten Druckmoduls  $E_{1,c}^*$  fällt jedoch selbst bei Extremwerten der Eingangsgrößen mit max. 17 % akzeptabel aus. Bezogen auf die Wertebereiche üblicher Geozellenprodukte und Füllmaterialsteifigkeiten liefern die in Kapitel 4.2 hergeleiteten analytischen Bestimmungsgleichungen der Grundzustände I und II somit eine akzeptable bis sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der FE-Berechnungen, womit die Plausibilität der analytischen Lösung bestätigt ist. Verglichen zu den FE-Berechnungen unterschätzt die analytische Näherungslösung den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$ . Jedoch treten auch hier für den relevanten Wertebereich des Verbundmaterials Geozelle-Boden akzeptable und auf der sicheren Seite liegende Abweichungen von maximal etwa -30 % auf.

Aus dem ergänzenden Vergleich der analytischen Anwendungsgrenzen mit den Ergebnissen von FE-Berechnungen für Querdehnzahlen des Füllmaterials von  $\nu_f > 0$  zeigt sich, dass diese übereinstimmende Zusammenhänge in Bezug auf eine mögliche Entstehung minimaler Hauptspannungen  $\sigma_3$  durch die Querdehnungswirkung des Füllmaterials liefern. Während für den Grundzustand Ia, Ib und IIa die vereinfachten Anwendungsgrenzen den ungünstigsten Fall abbilden, ist für den Grundzustand IIb die vollständige Lösung heranzuziehen. Wie in Kapitel 4.5.1 beschrieben treten bei Einhaltung der Anwendungsgrenzen keine relevanten Druckspannungen für die Hauptspannung  $\sigma_3$  im Füllmaterial auf und die Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Kennwerte besitzen auch für den Fall einer Querdehnzahl  $\nu_f > 0$  weiterhin Gültigkeit. Bei der Ermittlung ist jedoch im EVZ dann die um den Querdehnungseinfluss erweiterte Füllmaterialsteifigkeit  $E_{f,v}$  anstelle des Elastizitätsmoduls  $E_f$  zu verwenden.

## 6 Parameterstudie

### 6.1 Wertebereiche

Zur Verdeutlichung des Einflusses der verschiedenen geometrischen und mechanischen Kennwerte der Geozellen und des Füllmaterials auf die äquivalenten Materialkennwerte werden nachfolgend die Ergebnisse einer Parametervariation vorgestellt. Die hierfür notwendigen Wertebereiche lassen sich aus den in Kapitel 2.2 beschriebenen Kennwerten handelsüblicher Geozellen ableiten. Für die Durchführung und Ergebnisdarstellung werden die verschiedenen Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Kennwerte nach Kapitel 4 in eine dimensionslose Form überführt. Hierzu wird die Schubsteifigkeit  $GA_{cw}$  wieder durch den Ausdruck nach Gleichung (4.2) in Abhängigkeit der Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  ersetzt. Eine Übersicht zu den Eingangsgrößen und den variierten dimensionslosen Größen enthält Tabelle 6.1.

**Tab. 6.1:** Eingangsgrößen mit zugehöriger dimensionsloser Darstellung

Eingangsgrößen	Dimensionslose Größen
Wanddicke $t$	Verhältnis $t/l$ der Wanddicke $t$ zur Länge der geneigten Wand $l$ (Wandschlankheit)
Länge der geneigten Zellwand $l$	Längenverhältnis $h/l$ der Verbindungsstelle $h$ zur geneigten Zellwand $l$
Halbe Länge der Verbindungsstelle $h$	Zellwinkel $\theta$
Zellwinkel $\theta$	Steifigkeitsverhältnis $E_f/E_{cw}$ des Füllmaterials $E_f$ zum Zellwandmaterial $E_{cw}$
Elastizitätsmodul des Füllmaterials $E_f$	
Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials $E_{cw}$	

Während der Wertebereich für die geometrischen Kenngrößen sich direkt aus den Herstellerangaben gemäß Tabelle 2.1 ergibt, werden die Elastizitätsmodule  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials aus den in Tabelle 2.3 angegebenen Kurzzeitdehnsteifigkeiten  $J$  gängiger Geozellenprodukte in Verbindung mit der Zellwanddicke  $t$  abgeleitet. Die maßgebenden Wertebereiche der Eingangsgrößen sowie die hieraus resultierenden Variationsbereiche für die Parameterstudie sind in Tabelle 6.2 dargestellt.

**Tab. 6.2:** Wertebereiche für die Parameterstudie anhand gängiger Werte für Geozellen

Eingangsgrößen	Wertebereich		Dimensionslose Größe [-]	Variationsbereich	
	Minimum	Maximum		Minimum	Maximum
Wanddicke $t$ [mm]	0,5	1,7	Schlankheit $t/l$	0,0014	0,06
Geneigte Zellwand $l$ [mm]	35	350			
Verbindungsstelle $h$ [mm]	1,5	25	Längenverhältnis $h/l$	0 (Rhombus)	0,5
Zellwinkel $\theta$ [°]	40	60	Zellwinkel $\theta$	30	60
Elastizitätsmodul von Streifenmaterial $E_{cw}$ [kN/m <sup>2</sup> ]	40.000	200.000	Steifigkeitsverhältnis $E_f/E_{cw}$	0 (nur Struktur)	3
Elastizitätsmodul von Füllmaterial $E_f$ [kN/m <sup>2</sup> ]	10.000	120.000			

Mit einer Wandschlankheit von  $t/l = 0,0014$  bis  $0,06$  weisen gängige Geozellenprodukte sehr schlanke Zellwände auf. Geozellen mit einem Längenverhältnis  $h/l = 0$  besitzen wegen den fehlenden Horizontalwänden eine rhombische Zellform. Bei einem  $h/l$ -Verhältnis von  $0,5$  entspricht die Länge der Verbindungsstelle der der geneigten Zellwand. Der Zellwinkel wird zwischen  $\theta = 30^\circ$  bis  $60^\circ$  variiert. Für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und einen Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  liegt die Zellgeometrie als reguläres Hexagon vor. Das Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0$  bildet den Fall der unbefüllten Zellstruktur und das von  $E_f/E_{cw} = 3$  den Fall eines sehr steifen Füllmaterials ab. Bei der Ergebnisdarstellung wird teilweise aus Gründen der Übersichtlichkeit für das Längenverhältnis zwischen dem Wertebereich von  $0 \leq h/l \leq 0,1$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$  unterschieden. Der erste Wertebereich bezieht sich auf „große“ Geozellen mit geringen Längen  $h$  der Verbindungsstelle und der zweite auf „kleine“, eher wabenförmige Zellen.

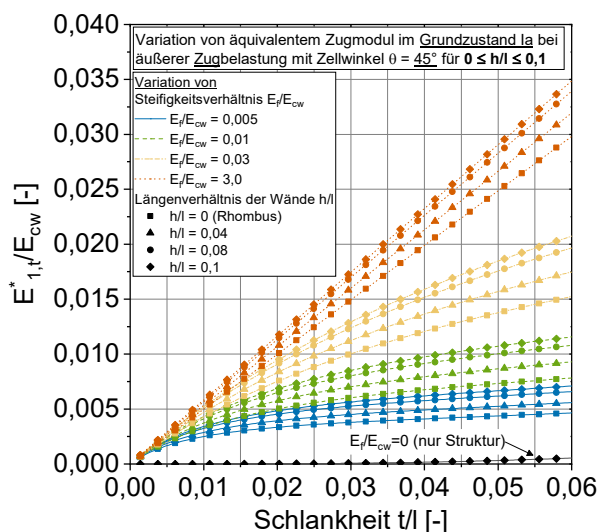
## 6.2 Einflussgrößen auf die Kennwerte der Grundzustände I und II

### 6.2.1 Beschreibung der wesentlichen Zusammenhänge

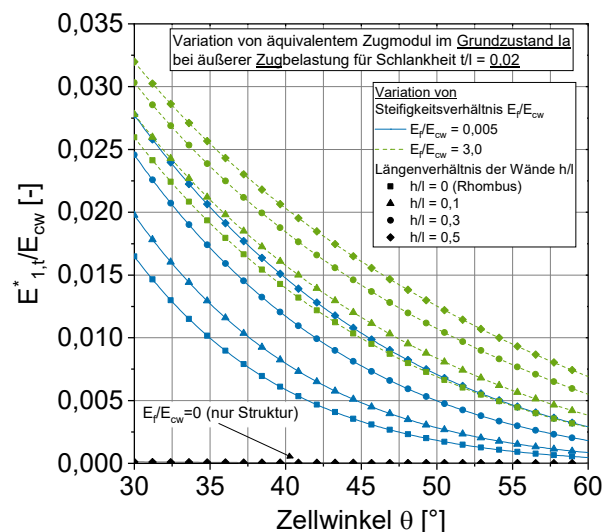
#### 6.2.1.1 Ergebnisse zum Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung

##### Äquivalenter Zugmodul $E_{1,t}^*$

Abbildung 6.1 zeigt die Variation des äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  gemäß Gleichung (4.10) für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  und für Längenverhältnisse von  $0 \leq h/l \leq 0,1$ . Hierbei wird der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  als Verhältnisswert zum Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials auf der y-Achse über die Schlankheit  $t/l$  der Zellwand auf der x-Achse dargestellt. Die verschiedenen Linientypen repräsentieren variierende Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  und die verschiedenen Symboltypen variierende Längenverhältnisse  $h/l$ . Zur Verdeutlichung des Einflusses des Füllmaterials ist in der Abbildung zusätzlich eine Kurve für die unbefüllte Zellstruktur mit einem exemplarischen Längenverhältnis von  $h/l = 0,1$  dargestellt.



**Abb. 6.1:** Variation von  $E_{1,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$



**Abb. 6.2:** Variation von  $E_{1,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,02$



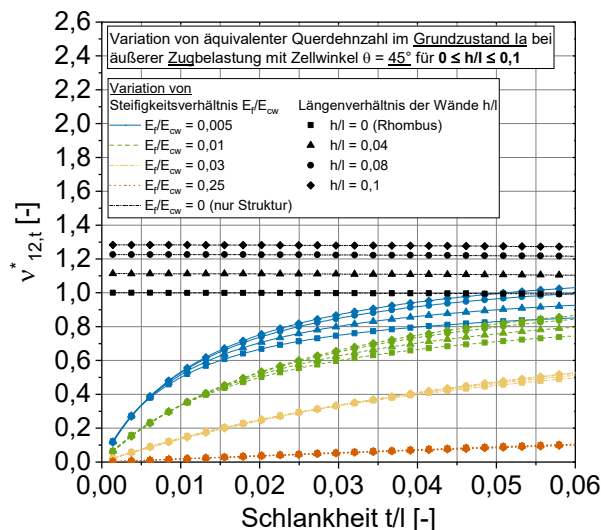
Der äquivalente Zugmodul liegt in einem Bereich von ca.  $E_{1,t}^* = 0,0006$  bis  $0,035 E_{cw}$ . In allen Fällen steigt der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  mit abnehmender Schlankheit  $t/l$  bzw. zunehmender Wanddicke  $t$  durch die damit verbundene Zunahme der Wandsteifigkeiten an. Während für geringe Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  ein nichtlinearer Anstieg vorliegt, geht dieser mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  in einen linearen Anstieg über. In diesen Fällen wird die Verformung maßgeblich durch die Axialverschiebungen der Zellwände bestimmt, welche bedingt durch die lineare Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Zellwände zu einem linearen Verlauf des äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  in Abhängigkeit der Wanddicke  $t$  führt. Dementgegen wird der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  für die unbefüllte Zellstruktur maßgebend durch die Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände bestimmt. Im vorliegenden Fall ist die Biegesteifigkeit wegen der geringen Wanddicke  $t$  nur minimal, sodass der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  mit maximal  $0,00055 E_{cw}$  gering ausfällt.

Unabhängig von dem jeweiligen Längenverhältnis  $h/l$  und der Schlankheit  $t/l$  resultiert eine Zunahme der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  in einem Anstieg des Zugmoduls  $E_{1,t}^*$ . Ein Vergleich mit der Kurve für die unbefüllte Zellstruktur zeigt, dass bereits ein geringer Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f = 0$  zu  $0,005 E_{cw}$  eine wesentliche Zunahme des Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  bewirkt. Weiterhin führt eine Verdopplung des Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f = 0,005$  zu  $0,01 E_{cw}$  bei einer Schlankheit von  $t/l = 0,04$  und einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,04$  zu einer Zunahme des Zugmoduls von  $E_{1,t}^* \approx 0,005$  zu  $0,008 E_{cw}$  also um ca. 60 %. Dagegen ergibt ein Anstieg der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f = 0,03$  zu  $3,0 E_{cw}$  nur noch eine Zunahme des Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  um ca. 55 %. Für große Füllmaterialsteifigkeiten  $E_f$  resultiert die Zellverformung vornehmlich aus den Axialverschiebungen der Zellwände, sodass der Einfluss aus einem Steifigkeitsanstieg des Füllmaterials nur noch minimal ausfällt. Ebenfalls wird aus Abbildung 6.1 ein Anstieg des äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle ersichtlich. Eine ansteigende Zellwandlänge  $h$  führt zu einer Vergrößerung der Gesamtzelllänge  $L_c$ , wodurch die Dehnung in Belastrichtung abnimmt und damit der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  ansteigt.

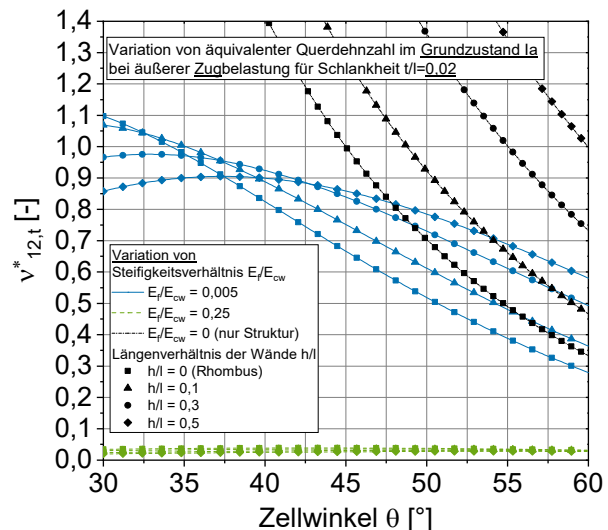
Zur Beurteilung des Einflusses des Zellwinkels  $\theta$  zeigt Abbildung 6.2 die Variation des Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  bezogen auf den Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials über einen Bereich des Zellwinkels von  $\theta = 30^\circ$  bis  $60^\circ$  bei einer Schlankheit von  $t/l = 0,02$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden hier nur die Verläufe für die beiden Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw} = 0,005$  und  $3,0$  dargestellt. Weiterhin werden diese über den vollständigen Wertebereich des betrachteten Längenverhältnisses von  $0 \leq h/l \leq 0,5$  abgebildet. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  bei geringen Zellwinkeln  $\theta$  einen höheren Wert als bei großen Zellwinkeln aufweist. Eine Abnahme des Zellwinkels  $\theta$  geht mit einer zunehmenden Ausrichtung der geneigten Zellwände in Belastungsrichtung einher, womit die Zellwände überwiegend durch Normalkräfte beansprucht werden. Weiterhin nimmt die Gesamtzelllänge  $L_c$  mit geringer werdendem Zellwinkel  $\theta$  zu, sodass die Dehnung in Richtung der Belastung, wie bereits bei einer zunehmenden Länge  $h$  der Verbindungsstelle, abnimmt.

### Äquivalente Querdehnnzahl $v_{12,t}^*$

Neben dem äquivalenten Zugmodul  $E_{1,t}^*$  wird zusätzlich der Einfluss der verschiedenen Eingangsgrößen auf die äquivalente Querdehnnzahl  $v_{12,t}^*$  betrachtet. Hierzu zeigt Abbildung 6.3 die Variation der Querdehnnzahl  $v_{12,t}^*$  nach Gleichung (4.11) über die Schlankheit  $t/l$  bei einem Zellwinkel von  $45^\circ$  in einem Wertebereich des Längenverhältnisses von  $0 \leq h/l \leq 0,1$ . Wie bereits in Abbildung 6.1 beziehen sich die verschiedenen Linientypen auf die betrachteten Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  und die verschiedenen Symbole auf die Längenverhältnisse  $h/l$ . Ergänzend sind in der Abbildung die Querdehnnzahlen  $v_{12,t}^*$  der unbefüllten Zellstrukturen dargestellt.



**Abb. 6.3:** Variation von  $v_{12,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$



**Abb. 6.4:** Variation von  $v_{12,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,02$

Im betrachteten Wertebereich weist die äquivalente Querdehnnzahl für befüllte Geozellen Werte von bis zu  $v_{12,t}^* = 1,05$  auf. Folglich fallen diese durch den Einfluss der Zellstruktur verglichen zu den üblichen Querdehnnzahlen von Böden mit  $v_f = 0,15$  bis  $0,4$  deutlich höher aus. Mit zunehmender Wanddicke  $t$  steigt die Querdehnnzahl  $v_{12,t}^*$  an, da sich aus der hiermit verbundenen Zunahme der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  vergleichsweise größere Stauchungen quer zur Belastungsrichtung ergeben. Ähnlich den in Abbildung 6.1 dargestellten Verläufen zum äquivalenten Zugmodul  $E_{1,t}^*$  liegt bei einer geringen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ein nichtlinearer Anstieg vor, welcher mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  in einen linearen Anstieg übergeht. Dies ist wie bereits zuvor beschrieben auf den überwiegenden Verformungsanteil durch die axialen Zellwandverschiebungen bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zurückzuführen. Dementgegen ergeben sich für die Querdehnnzahl  $v_{12,t}^*$  der unbefüllten Zellen nahezu konstante Werte, welche gegenüber denen der befüllten Zellen höher ausfallen.

Aus der Betrachtung des Einflusses des Längenverhältnisses  $h/l$  wird ersichtlich, dass sich die Länge  $h$  der Verbindungsstelle auf die Querdehnnzahl  $v_{12,t}^*$  verglichen zum Zugmodul  $E_{1,t}^*$  weniger stark auswirkt. Gemäß Kapitel 4.2.3.1 wird die Stauchung quer zur Belastungsrichtung ausschließlich durch die Verformung des Füllmaterials und der geneigten Zellwand bestimmt. Folglich ist diese weitestgehend unabhängig von der Verbindungsstelle. Die Kurven für die

Steifigkeitsverhältnisse von  $E_f/E_{cw} = 0,03$  und  $0,25$  verdeutlichen dies. Trotz der ansteigenden Zellwandlänge  $h$  verlaufen die Kurven beinahe deckungsgleich. Bei geringer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  steigt die Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle dagegen an, da in diesem Fall die Dehnung in Belastungsrichtung durch den großen Einfluss der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  abnimmt.

Die Variation der Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  mit dem Zellwinkel  $\theta$  für eine Wandschlankheit von  $t/l = 0,02$  zeigt Abbildung 6.4. Die Kurven sind hierbei für die Steifigkeitsverhältnisse von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  und  $0,25$  sowie für die unbefüllte Zellstruktur dargestellt. Bei einem hohen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,25$  liegen aufgrund der geringen Stauchung quer zur Belastungsrichtung nur minimale Werte für die Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  vor. Der Zellwinkel  $\theta$  hat hierauf keinen nennenswerten Einfluss. Dementgegen verdeutlichen die Verläufe für eine geringe Steifigkeit von  $E_f = 0,005 E_{cw}$  den Einfluss des Zellwinkels  $\theta$  auf die Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$ . Diese wird mit ansteigendem Zellwinkel  $\theta$  geringer und nähert sich für große Zellwinkel der Querdehnzahl der unbefüllten Zellstruktur an. Weiterhin zeigt sich, dass der Zusammenhang zwischen der Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  von dem Zellwinkel  $\theta$  abhängig ist. Während bei kleinen Zellwinkeln  $\theta$  ein Anstieg der Länge  $h$  der Verbindungsstelle zu einer Abnahme der Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  führt, ergibt sich bei großen Zellwinkeln hierdurch eine Zunahme.

Vergleichbare Zusammenhänge zu dem Zugmodul  $E_{1,t}^*$  und der Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  lassen sich auch für ein Längenverhältnis von  $0,1 < h/l \leq 0,5$  sowie für Zellwinkel von  $\theta = 30^\circ$  und  $60^\circ$  bei Darstellung über die Schlankheit  $t/l$  oder für Wandschlankheiten von  $t/l = 0,005$  und  $t/l = 0,06$  bei Darstellung über den Zellwinkel  $\theta$  feststellen. Ähnlich den in Abbildung 6.4 dargestellten Verläufen sind jedoch die Abhängigkeiten zur Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  infolge der Gegenläufigkeit der Dehnung in und der Stauchung quer zur Belastungsrichtung teilweise uneinheitlich und bereichsabhängig. Eine grafische Aufarbeitung der Ergebnisse ist Anhang H.1 beigelegt.

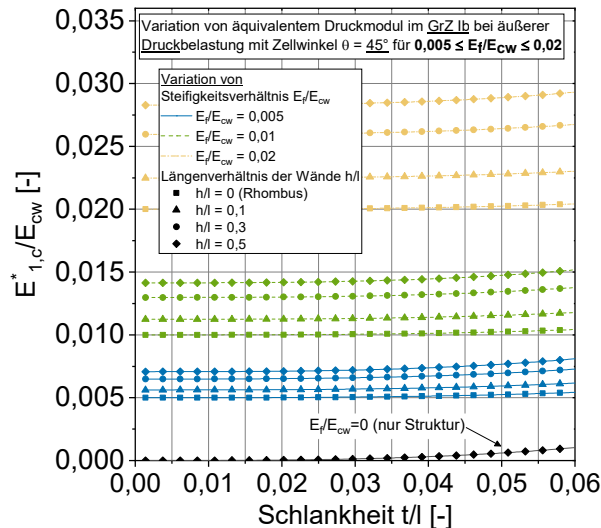
### 6.2.1.2 Ergebnisse zum Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung

#### Äquivalenter Druckmodul $E_{1,c}^*$

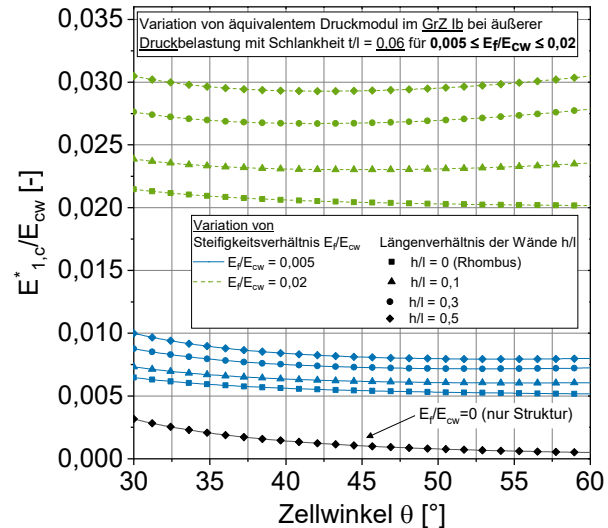
Die Variation des in Gleichung (4.17) hergeleiteten äquivalenten Druckmoduls  $E_{1,c}^*$  über die Wandschlankheit  $t/l$  mit einem Längenverhältnis von  $0 \leq h/l \leq 0,5$  und einem Steifigkeitsverhältnis von  $0,005 \leq E_f/E_{cw} \leq 0,02$  ist in Abbildung 6.5 für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  dargestellt. Die Kennzeichnungen der verschiedenen Steifigkeits- und Längenverhältnisse entsprechen denen von Abbildung 6.1. Die ergänzende Darstellung des Verlaufs zum Druckmodul  $E_{1,c}^*$  für die unbefüllte Zellstruktur bei einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  verdeutlicht auch hier den großen Einfluss durch den Ansatz einer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$ .

Für den betrachteten Bereich der Schlankheit  $t/l$  zeigt sich im Fall befüllter Zellen für alle Kurven unabhängig vom Längenverhältnis  $h/l$  ein nahezu konstanter Verlauf. Das Verhältnis des Druckmoduls  $E_{1,c}^*$  zum Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials weist hierbei einen

vergleichbaren Wert wie das Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  auf. Demzufolge wird der Druckmodul  $E^*_{1,c}$  maßgeblich durch die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  bestimmt. Lediglich bei großen Wanddicken  $t$  im Bereich einer Schlankheit von  $t/l = 0,06$  ergibt sich infolge des zunehmenden Einflusses der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände ein leichter Anstieg.



**Abb. 6.5:** Variation von  $E^*_{1,c}$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $\theta = 45^\circ$  und  $0,005 \leq E_f/E_{cw} \leq 0,02$



**Abb. 6.6:** Variation von  $E^*_{1,c}$  über den Zellwinkel  $\theta$  für  $t/l = 0,06$  und  $0,005 \leq E_f/E_{cw} \leq 0,02$

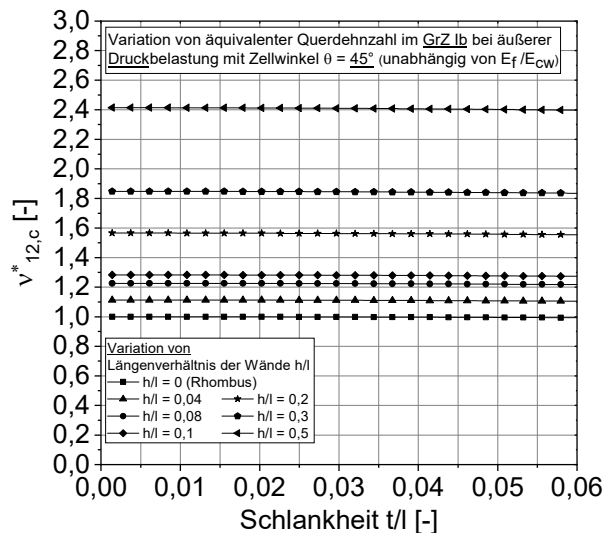
Die zusätzlich aus der Abbildung hervorgehende Zunahme des Druckmoduls  $E^*_{1,c}$  mit ansteigender Länge  $h$  der Verbindungsstelle resultiert aus der in Kapitel 4.2.4.1 beschriebenen Vernachlässigung des Verschiebungsanteils der Verbindungsstelle und dem damit einhergehenden Fehler in der analytischen Bestimmungsgleichung (s. Kap. 5.3.2.2). Eigentlich wäre bei einer geringen Wanddicke  $t$  unabhängig von dem jeweiligen Längenverhältnis  $h/l$  ein Wert des Druckmoduls  $E^*_{1,c}$  entsprechend der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zu erwarten (vgl. Kap. 6.2.1.4). Eine Betrachtung der Zahlenwerte von Abbildung 6.5 zeigt jedoch, dass dies nur für den Fall einer rhombischen Zellform bei  $h/l = 0$  zutrifft. Hingegen bewirkt ein Anstieg des Längenverhältnisses von  $h/l = 0$  zu  $0,5$  eine Überschätzung des Druckmoduls  $E^*_{1,c}$  von ca. 50 %. Die Begründung für die Zunahme des Fehlers mit ansteigender Zellwandlänge  $h$  lässt sich der für sehr schlanke Zellwände mit der Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  abgeleiteten Bestimmungsgleichung (4.47) entnehmen. In diesem Fall hängt der Druckmodul  $E^*_{1,c}$  nur von der Zellgeometrie sowie der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab. Während der geometrische Bruchterm von Gleichung (4.47) für eine Zellwandlänge von  $h = 0$  einen Wert von 1 annimmt, ergibt sich für eine Länge der Verbindungsstelle von  $h > 0$  ein Wert größer 1.

Aus der Darstellung über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,06$  gemäß Abbildung 6.6 wird ebenfalls ein weitestgehend konstanter Druckmodul  $E^*_{1,c}$  mit einem Wert in der Größenordnung der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  deutlich. Bei einem geringen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  wird der Druckmodul  $E^*_{1,c}$  ähnlich zu dem Verlauf der unbefüllten Zellstruktur mit zunehmendem Zellwinkel  $\theta$  kleiner. Mit ansteigender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  nimmt die Abhängigkeit des äquivalenten Druckmoduls  $E^*_{1,c}$  vom Zellwinkel  $\theta$  ab und es ergeben sich

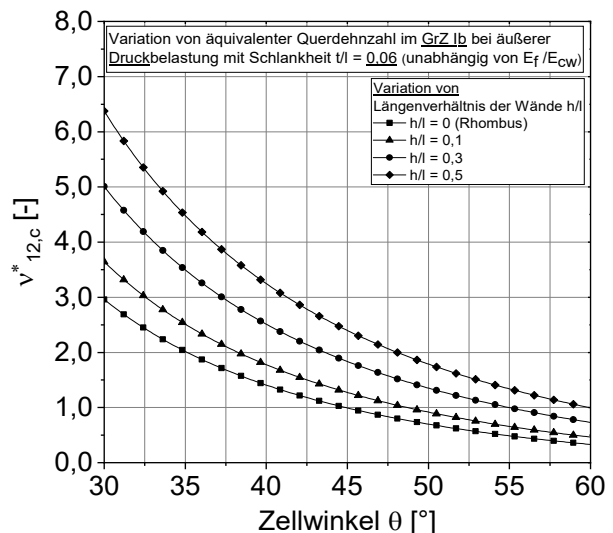
nahezu konstante Werte über den Zellwinkel. Weiterhin zeigt sich aus der Abbildung eine Zunahme des Druckmoduls  $E_{1,c}^*$  mit ansteigender Zellwandlänge  $h$ , welche aus der zuvor beschriebenen Vernachlässigung des Verschiebungsanteils der Verbindungsstelle in der analytischen Lösung nach Gleichung (4.47) resultiert.

#### Äquivalente Querdehnzahl $v_{12,c}^*$

Abbildung 6.7 zeigt ergänzend die Variation der äquivalenten Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  gemäß Gleichung (4.18) über die Wandschlankheit  $t/l$  für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$ . Wie bereits in Kapitel 4.2.4.2 beschrieben besitzt die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  keinen Einfluss auf die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$ , sondern hängt nur von den Eigenschaften der Geozellen ab. Demzufolge sind in der Abbildung nur die Verläufe zur Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  der Zellstruktur ohne Füllmaterial dargestellt.



**Abb. 6.7:** Variation von  $v_{12,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$



**Abb. 6.8:** Variation von  $v_{12,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,06$

Unabhängig von der Wanddicke  $t$  liegen nahezu konstante Werte für die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  vor. In Abhängigkeit der Längenverhältnisse  $h/l$  variieren die Werte hierbei in einem Bereich der Querdehnzahl von  $v_{12,c}^* = 1,0$  bis ca. 2,4. Mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle nimmt die Gesamtzelllänge  $L_c$  zu und damit die Stauchung in Belastungsrichtung ab, sodass die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  geringer wird.

Der in Abbildung 6.8 dargestellte Abfall der Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  resultiert aus einer Abnahme der Dehnung quer zur Belastungsrichtung und einer Zunahme der Stauchung in Belastungsrichtung mit ansteigendem Zellwinkel  $\theta$ . Zum Beispiel lässt sich aus der Kurve für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,1$  bei einem Anstieg des Zellwinkels von  $\theta = 30^\circ$  zu  $60^\circ$  eine Abnahme der Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  von ca. 3,6 zu 0,5 feststellen. Bei kleinen Längen  $h$  der Verbindungsstelle fällt hierbei der Einfluss des Zellwinkels  $\theta$  auf die Abnahme der Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  etwas stärker aus als bei großen Werten für die Zellwandlänge  $h$ .

Durch die Vernachlässigung des Verschiebungsanteils der Verbindungsstelle ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung (4.18) für die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$ , wie bereits bei dem Zugmodul

$E_{1,c}^*$ , eine Überschätzung. Im Hinblick auf die Qualität der analytischen Lösung gelten somit für beide äquivalenten Materialkennwerte folgende Einschränkungen. Die analytische Lösung stellt bei einer geringen Länge  $h$  der Verbindungsstelle eine sehr gute Näherungslösung und bei einer rhombischen Zellform mit  $h = 0$  die exakte Lösung dar. Für große Zellwandlängen  $h$  überschätzt der analytische Ansatz hingegen die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  teilweise deutlich. Wird entsprechend der in Kapitel 4.2.7.3 beschriebenen Erläuterungen von einer ausschließlichen Wirkung der Zellwände als Membran ausgegangen, sind vorstehende Beschreibungen hinfällig. Da die Zellwände in diesem Fall keine Druckkräfte abtragen, nimmt der Druckmodul  $E_{1,c}^*$  den Wert des Elastizitätsmoduls  $E_f$  und die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  den des Füllmaterials  $v_s$  an.

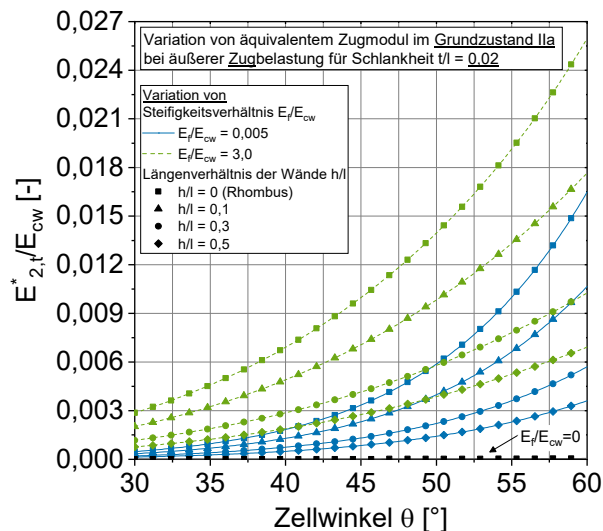
Die aus der Parameterstudie hervorgehenden Abhängigkeiten des Druckmoduls  $E_{1,c}^*$  und der Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  bei höheren Steifigkeitsverhältnisse von  $0,5 \leq E_f/E_{cw} \leq 3$ , bei Zellwinkeln von  $\theta = 30^\circ$  und  $60^\circ$  sowie bei Schlankheiten von  $t/l = 0,005$  und  $0,02$  sind vergleichbar zu den zuvor beschriebenen Zusammenhängen. Abbildungen hierzu sind Anhang H.2 beigelegt.

### 6.2.1.3 Ergebnisse zum Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung

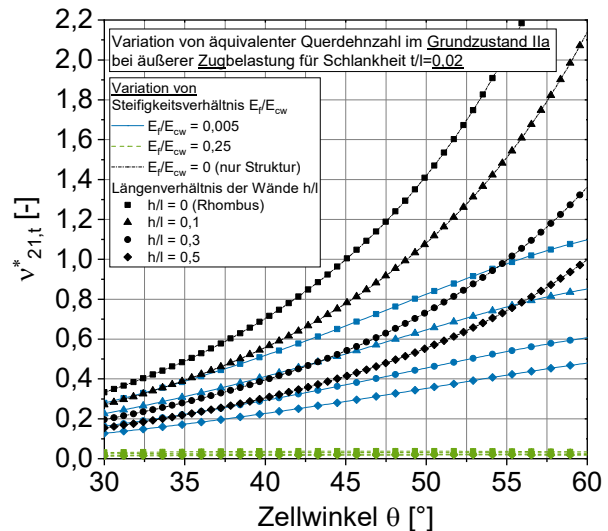
#### Äquivalenter Zugmodul $E_{2,t}^*$

Im Hinblick auf die Abhängigkeit des äquivalenten Zugmoduls  $E_{2,t}^*$  gemäß Gleichung (4.25) von dem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  und der Schlankheit  $t/l$  ergeben sich vergleichbare Zusammenhänge wie bei dem Zugmodul  $E_{1,t}^*$  im Grundzustand Ia. Auch hier steigt der Zugmodul  $E_{2,t}^*$  mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und Wanddicke  $t$  an (vgl. Abb. 6.1). Für hohe Füllmaterialsteifigkeiten  $E_f$  weisen die Kurven ebenfalls einen linearen Verlauf mit konstanter Steigung auf. Grafische Darstellungen zur Variation über die Schlankheit  $t/l$  und zu den weiteren Ergebnissen der Parameterstudie für den Grundzustand IIa können dem Anhang H.3 entnommen werden.

Abweichend zum Zugmodul  $E_{1,t}^*$  besteht jedoch für den äquivalenten Zugmodul  $E_{2,t}^*$  im Grundzustand IIa eine gegensätzliche Abhängigkeit vom Zellwinkel  $\theta$  und Längenverhältnis  $h/l$ . Dies wird aus der Darstellung des Zugmoduls  $E_{2,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit  $t/l = 0,02$  gemäß Abbildung 6.8 deutlich. In allen Fällen bewirkt ein Anstieg des Zellwinkels  $\theta$  eine Zunahme des Zugmoduls  $E_{2,t}^*$ . Beispielsweise ergibt sich durch eine Zunahme des Zellwinkels  $\theta$  von  $30^\circ$  zu  $60^\circ$  bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 3,0$  und einem Längenverhältnis  $h/l = 0,1$  ein Anstieg des Zugmoduls von ca.  $E_{2,t}^* = 0,00203$  zu  $0,0177 E_{cw}$  also um ca. 770 %. Mit ansteigendem Zellwinkel  $\theta$  zeigt die geneigte Zellwand zunehmend in Belastungsrichtung, womit der Widerstand gegen die äußere Belastung größer wird und die Dehnung abnimmt. Weiterhin wird aus Abbildung 6.9 ein Abfall des Zugmoduls  $E_{2,t}^*$  mit zunehmender Längenverhältnis  $h/l$  deutlich. Während die Länge  $h$  der Verbindungsstelle nur einen untergeordneten Einfluss auf die Dehnung in Belastungsrichtung besitzt, führt eine Zunahme der Zellwandlänge  $h$  zu einer Verringerung der Spannung in Belastungsrichtung. Folglich nimmt der Zugmodul  $E_{2,t}^*$  als Quotient der Spannung zur Dehnung mit zunehmender Zellwandlänge  $h$  ab.



**Abb. 6.9:** Variation von  $E_{2,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,02$



**Abb. 6.10:** Variation von  $v_{21,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,02$

#### Äquivalente Querdehnzahl $v_{21,t}^*$

Der Einfluss des Steifigkeitsverhältnisses  $E_f/E_{cw}$  und der Schlankheit  $t/l$  auf die äquivalente Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  gemäß Gleichung (4.26) entspricht weitestgehend dem der Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  im Grundzustand Ia. Eine Zunahme der Wanddicke  $t$  bewirkt somit auch hier unabhängig von dem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  bei befüllten Geozellen einen Anstieg der Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  durch eine Zunahme der Biegesteifigkeit  $E_{cw}$  der Zellwände (vgl. Abb. 6.3). Bei großen Wanddicken  $t$  nähert sich die Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  der unbefüllten Zellstruktur an. Weiterhin nimmt die Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  wie bereits im Grundzustand Ia mit ansteigender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab und strebt für hohe Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  gegen Null (s. Anhang H.3).

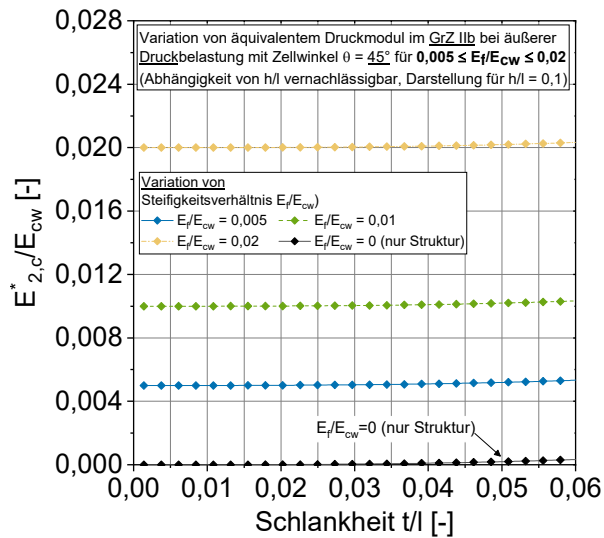
Ergänzend ist in Abbildung 6.10 die Variation der Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei einer Schlankheit  $t/l = 0,02$  dargestellt. Vergleichbar zum äquivalenten Zugmodul  $E_{2,t}^*$  wird hieraus ein Anstieg der Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  mit zunehmendem Zellwinkel deutlich. Die Zunahme des Zellwinkels  $\theta$  führt bei ansonsten unveränderten Eingangsgrößen zu einem Anstieg der Gesamtzellbreite  $W_c$ , wodurch die Dehnung in Belastungsrichtung abnimmt und damit die Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  zunimmt. Weiterhin zeigt sich, dass ein Anstieg der Länge  $h$  der Verbindungsstelle eine Abnahme der Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  bewirkt.

#### 6.2.1.4 Ergebnisse zum Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung

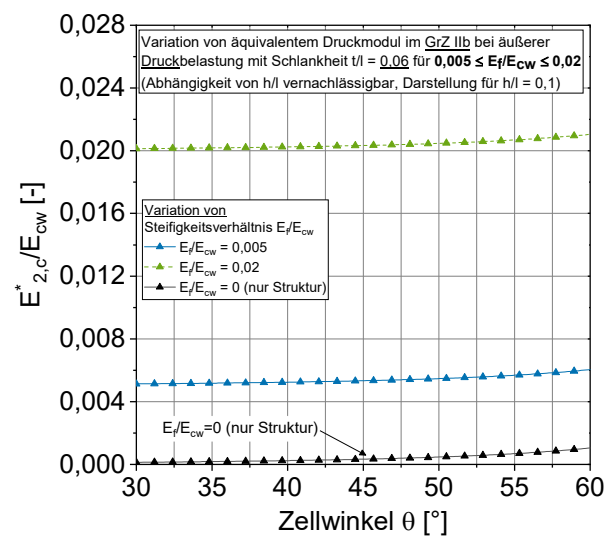
##### Äquivalenter Druckmodul $E_{2,c}^*$

Für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  ist in Abbildung 6.11 die Variation des äquivalenten Druckmoduls  $E_{2,c}^*$  nach Gleichung (4.32) über die Wandschlankheit  $t/l$  dargestellt. Zusätzlich können der Abbildung die Verläufe zu verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen  $E_f/E_{cw}$  sowie für den Fall einer unbefüllten Zellstruktur bei einem Längenverhältnis  $h/l = 0,1$  entnommen werden. Durch die geringe Wanddicke  $t$  ergibt sich bei den verschiedenen Steifigkeitsverhältnissen  $E_f/E_{cw}$  ein

nahezu konstanter Wert für das Verhältnis des äquivalenten Druckmoduls  $E_{2,c}^*$  zum Elastizitätsmodul des Zellwandmaterials  $E_{cw}$ . Wie bei den vorherigen Grundzuständen steigt der Druckmodul  $E_{2,c}^*$  mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  an. Die abgebildete Übereinstimmung des Druckmoduls  $E_{2,c}^*$  mit dem Wert der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  wurde bereits bei dem Druckmodul  $E_{1,c}^*$  im Grundzustand Ib für eine rhombische Zellform mit  $h = 0$  festgestellt. Entgegen den in Abbildung 6.5 dargestellten Verläufen zeigt sich hier jedoch nur eine vernachlässigbare Abhängigkeit von der Länge  $h$  der Verbindungsstelle, weshalb in Abbildung 6.11 lediglich die Kurven für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,1$  angegeben sind.



**Abb. 6.11:** Variation von  $E_{2,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $\theta = 45^\circ$  und  $0,005 \leq E_f/E_{cw} \leq 0,02$



**Abb. 6.12:** Variation von  $E_{2,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für  $t/l = 0,02$  und  $0,005 \leq E_f/E_{cw} \leq 0,02$

Bei kleinen Wanddicken  $t$  und großer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  geht im Grundzustand IIb von den Zellwänden kein nennenswerter Einfluss aus, sodass die Belastung nur vom Füllmaterial aufgenommen wird. Die für sehr schlanke Zellwände aus der Grenzwertbetrachtung mit  $t \rightarrow 0$  abgeleitete Bestimmungsgleichung (4.49) verdeutlicht den Zusammenhang. Der Druckmodul  $E_{2,c}^*$  stimmt in diesem Fall mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  überein. Die in Abbildung 6.12 dargestellten nahezu konstanten Verläufe über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,06$  verdeutlichen weiterhin eine weitestgehende Unabhängigkeit des Druckmoduls  $E_{2,c}^*$  von  $\theta$ .

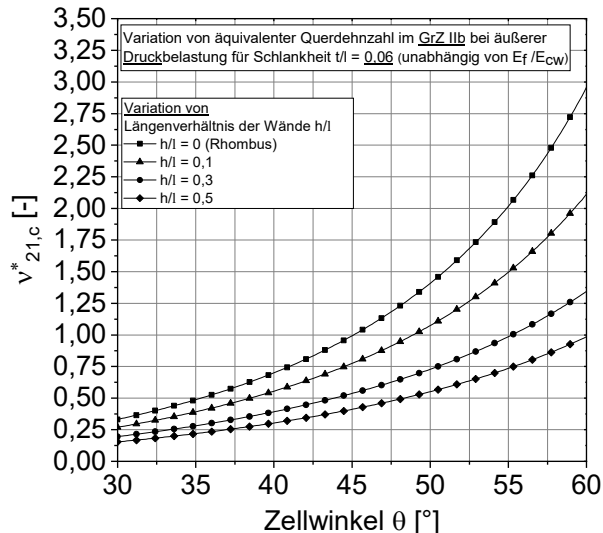
#### Äquivalente Querdehnzahl $v_{21,c}^*$

Wie die äquivalente Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  im Grundzustand Ib ist auch die äquivalente Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  gemäß Gleichung (4.33) unabhängig von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$ , sodass für un- und befüllte Geozellen die gleiche Bestimmungsgleichung vorliegt. Ebenfalls liegen für die Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  nahezu konstante Werte im relevanten Wertebereich der Schlankheit von  $t/l \leq 0,06$  vor (s. Anhang H.4). Folglich ist die Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  wie die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  sowohl von dem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  als auch von der Schlankheit  $t/l$  unabhängig.

Zur Veranschaulichung des Einflusses des Zellwinkels  $\theta$  und des Längenverhältnisses  $h/l$  ist in Abbildung 6.13 die Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,06$  dargestellt. Ein Anstieg des Zellwinkels  $\theta$  führt unabhängig von dem Längenverhältnis  $h/l$



zu einer Zunahme der Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$ . Mit zunehmendem Zellwinkel  $\theta$  wird die Stauchung in Belastungsrichtung geringer und die Dehnung quer zur Belastungsrichtung größer, weshalb die Querdehnung zunimmt. Die dargestellte Verringerung der Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle liegt in der damit einhergehenden Abnahme der Dehnung quer zur Belastungsrichtung begründet.



**Abb. 6.13:** Variation von  $v_{21,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,06$

Ergänzende Abbildung für Steifigkeitsverhältnisse von  $0,5 \leq E_f/E_{cw} \leq 3$ , Zellwinkel von  $30^\circ$  und  $60^\circ$  sowie für Längenverhältnisse von  $t/l = 0,005$  und  $0,06$  bestätigen die zuvor beschriebenen Zusammenhänge und sind dem Anhang H.4 beigelegt. Wird wie bereits in Kapitel 6.2.1.2 für den Grundzustand Ib für die Zellwände das mechanische Modell einer Membran angenommen, sind vorstehende Ausführungen unerheblich und die Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  stimmt mit der des Füllmaterials  $v_f$  überein.

### 6.2.2 Übersicht zu den Abhängigkeiten

Eine Zusammenfassung der in Kapitel 6.2.1 festgestellten Abhängigkeiten der äquivalenten Materialkennwerte von den verschiedenen Eingangsgrößen im relevanten Wertebereich des Verbundmaterials Geozelle-Boden zeigt Tabelle 6.3. Eine Erläuterung der unterschiedlichen Zeichen ist in der Legende angegeben.

Abschließend lässt sich feststellen, dass eine zunehmende Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  sowie eine zunehmende Wanddicke  $t$ , d. h. Abnahme der Schlankheit  $t/l$ , zu einem Anstieg der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  führen. Die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  nehmen mit ansteigender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab und mit ansteigender Wanddicke  $t$  zu. Wird der Fehler in der analytischen Lösung im Grundzustand Ib aus der Nichtberücksichtigung der Wandverschiebung der Verbindungsstelle vernachlässigt, liegen die beiden Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  bei einem ausreichend hohen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  mit einem nahezu konstanten Wert entsprechend der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  vor. Für die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  ergeben sich ebenfalls nahezu konstante Werte im relevanten Wertebereich der Schlankheit  $t/l$ . Diese sind nur von dem Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  abhängig.

**Tab. 6.3:** Übersicht zu den verschiedenen Einflussgrößen auf die äquivalenten Materialkennwerte in den Grundzuständen I und II für den relevanten Wertebereich von Geozellen

Ansteigende Einflussgröße	Grundzustand Ia (Zug)		Grundzustand Ib (Druck)		Grundzustand IIa (Zug)		Grundzustand IIb (Druck)	
	$E_{1,t}^*$	$v_{12,t}^*$	$E_{1,c}^*$	$v_{12,c}^*$	$E_{2,t}^*$	$v_{21,t}^*$	$E_{2,c}^*$	$v_{21,c}^*$
Steifigkeitsverhältnis $E_f/E_{cw}$ des Füllmaterials $E_f$ zum Zellwandmaterial $E_{cw}$	>	<	$\approx E_f^{(b)}$	-	>	<	$= E_f^{(b)}$	-
Schlankheit $t/l$ als Verhältnis der Wanddicke $t$ zur Länge geneigten Zellwand I	>	>	$\approx >$	$\approx$	>	>	$\approx >$	$\approx$
Zellwinkel $\theta$	<	$><^{(a)}$	$\approx <$	<	>	>	$\approx >$	>
Längenverhältnis $h/l$ der Verbindungsstelle $h$ zur geneigten Zellwand I	>	$><^{(a)}$	$>^{(c)}$	>	<	<	$\approx$	<

Zeichenerklärung: > Zunahme, < Abnahme,  $\approx$  nahezu konstant, - unabhängig von Eingangsgröße

<sup>(a)</sup> Bereichsweise Zu- und Abnahme in Abhängigkeit von dem  $t/l$ - und  $h/l$ -Verhältnis sowie Zellwinkel  $\theta$

<sup>(b)</sup> Bei ausreichend hohem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$

<sup>(c)</sup> Zunahme wegen Vernachlässigung der Axialverschiebung der Verbindungsstelle in Analytik

Weiterhin verdeutlichen die Angaben in Tabelle 6.3 die gegenläufige Abhängigkeit der äquivalenten Materialkennwerte von dem Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  in den Grundzuständen Ia, Ib, IIa und IIb. Eine weitergehende Beschreibung dieser Zusammenhänge erfolgt in Kapitel 6.3.

## 6.3 Gegenseitige Abbildung der äquivalenten Materialkennwerte

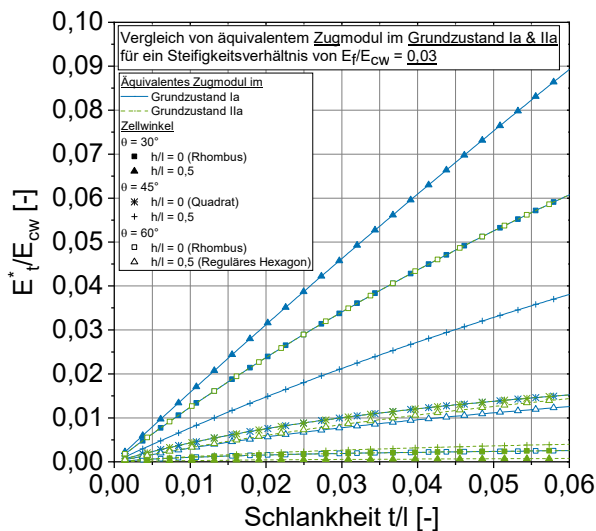
### 6.3.1 Grundzustand Ia und IIa bei äußerer Zugbelastung

#### 6.3.1.1 Äquivalente Zugmodule $E_{1,t}^*$ und $E_{2,t}^*$

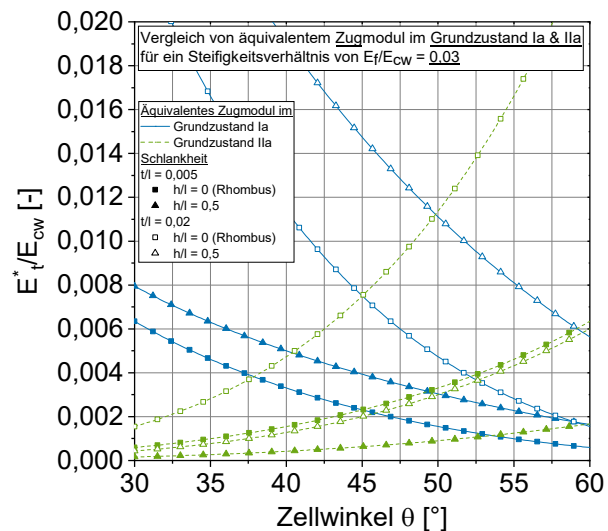
Zur Verdeutlichung der gegenläufigen Abhängigkeiten der äquivalenten Materialkennwerte sowie zur weitergehenden Beschreibung des Materialverhaltens werden diese nachfolgend grafisch gegenübergestellt. Hierzu kann Abbildung 6.14 die Variation der äquivalenten Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  in einem Bereich der Schlankheit von  $0,0014 \leq t/l \leq 0,06$  bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,03$  entnommen werden. Die Verläufe der beiden Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  sind durch die unterschiedlichen Linientypen dargestellt. Eine zusätzliche Variation des Zellwinkels von  $\theta = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $60^\circ$  sowie des Längenverhältnisses von  $h/l = 0$  und  $0,5$  sind durch die unterschiedlichen Symboltypen gekennzeichnet. Die Zellwinkel  $\theta$  und Längenverhältnisse  $h/l$  werden hierbei so gewählt, dass die Zusammenhänge für besondere geometrische Zellmerkmale abgebildet werden.

Aus Abbildung 6.14 wird ersichtlich, dass für rhombische Zellen mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  jeweils bei Zellwinkeln von  $\theta = 30^\circ$  und  $60^\circ$  bzw.  $60^\circ$  und  $30^\circ$  deckungsgleiche Verläufe für die beiden äquivalenten Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  vorliegen. In diesen Fällen tritt jeweils der gleiche Winkel zwischen der geneigten Zellwand und der Richtung der Belastung

auf, sodass sich wegen der nicht vorhandenen Länge der Verbindungsstelle von  $h = 0$  zwangsläufig die gleichen Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  ergeben. Ein weiterer deckungsgleicher Verlauf lässt sich aus der Abbildung für rhombische Zellen mit einem Zellwinkel von  $45^\circ$  erkennen. In diesem Fall weisen die Zellen eine quadratische Form auf, wodurch die Anzahl der Ebenen der Materialsymmetrie weiter zunimmt. Bezogen auf das nach Abbildung 2.5 definierte Koordinatensystem ist dieser Fall gleichbedeutend mit einer Richtungsunabhängigkeit des Materialverhaltens in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung.



**Abb. 6.14:** Variation von  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $E_f/E_{cw} = 0,03$



**Abb. 6.15:** Variation von  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für  $E_f/E_{cw} = 0,03$

Aus einer Betrachtung der Zellen mit einer hexagonalen Form für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und beispielsweise einem Zellwinkel von  $45^\circ$  wird dagegen die erhebliche Richtungsabhängigkeit der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  ersichtlich. Für eine Schlankheit von  $t/l = 0,03$  ergibt sich in diesem Fall der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  zu ca.  $0,021 E_{cw}$ , wohingegen der Zugmodul  $E_{2,t}^*$  nur ca.  $0,002 E_{cw}$  beträgt. Folglich liegt in  $x_1$ -Richtung ein zehnfach höherer Zugmodul als in  $x_2$ -Richtung vor.

Aus dem ergänzenden Vergleich der Kurven bei einer regulär hexagonalen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und einem Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  zeigt sich ein ähnlicher Verlauf für die beiden Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$ . Gemäß den in Kapitel 3.4.2.3 beschriebenen Zusammenhängen weist die unbefüllte homogenisierte Wabenstruktur bei dieser Zellgeometrie und unter ausschließlicher Berücksichtigung des Biegeanteils der Wandverformungen ein isotropes Materialverhalten auf (s. Gl. 3.25). Demzufolge werden bei einer regulär hexagonalen Zellform auch für das homogene Verbundmaterial Geozelle-Boden die Unterschiede zwischen den Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  minimal. Infolge der doppelten Wanddicke der Verbindungsstelle sowie der zusätzlichen Verschiebungsanteile durch die Normal- und Querkräfte in der analytischen Lösung verlaufen die Kurven hierbei jedoch nicht exakt deckungsgleich. Steigt das Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  an, nimmt der Unterschied zwischen den beiden Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  weiter ab. Beispielsweise liegen für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 3$  nahezu

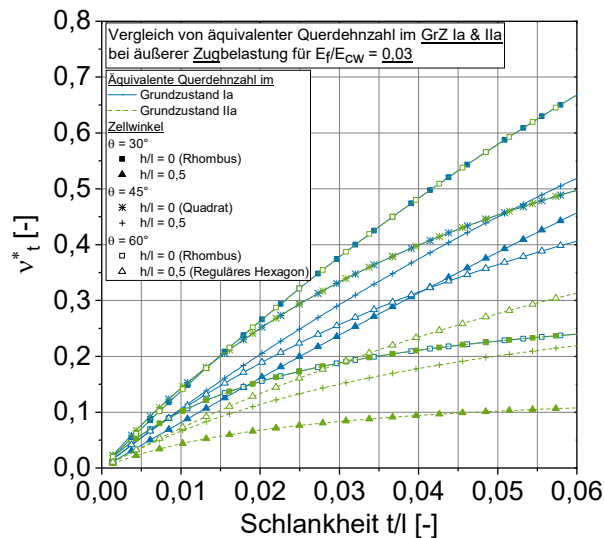
identische Verläufe für die Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  vor. Folglich kann auch in diesem Fall näherungsweise von einer Richtungsunabhängigkeit des Verhaltens des Verbundmaterials ausgegangen werden. Eine Abbildung zur Variation der Zugmodule über die Schlankheit  $t/l$  bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 3$  ist dem Anhang H.5 beigelegt.

Eine Gegenüberstellung der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  in Abhängigkeit des Zellwinkels  $\theta$  ist in Abbildung 6.15 für ein Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw} = 0,03$  dargestellt. Die beiden Grundzustände sind wieder durch unterschiedliche Linientypen sowie die jeweiligen Schlankheiten und Längenverhältnisse  $h/l$  durch unterschiedliche Symboltypen gekennzeichnet. Die Abbildung verdeutlicht die in Tabelle 6.3 angegebene gegenläufige Abhängigkeit der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  vom Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$ . Während der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  mit abnehmendem Zellwinkel  $\theta$  und zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle größer wird, wird der Zugmodul  $E_{2,t}^*$  mit abnehmendem Zellwinkel  $\theta$  und zunehmender Zellwandlänge  $h$  kleiner. Aus der vergleichsweise größeren Kurvensteigung lässt erkennen, dass der Zugmodul  $E_{1,t}^*$  eine stärkere Abhängigkeit vom Zellwinkel  $\theta$  aufweist als der Zugmodul  $E_{2,t}^*$ . Ebenfalls werden aus der Abbildung die zuvor beschriebenen Übergänge zu einem richtungsunabhängigen Materialverhalten bei  $45^\circ$  für rhombische Zellen und näherungsweise bei  $60^\circ$  für eine regulär hexagonale Zellform ersichtlich. An diesen Stellen schneiden bzw. nähern sich die Verläufe der äquivalenten Zugmodule bei gleicher Schlankheit  $t/l$  und gleichem Längenverhältnis  $h/l$  an.

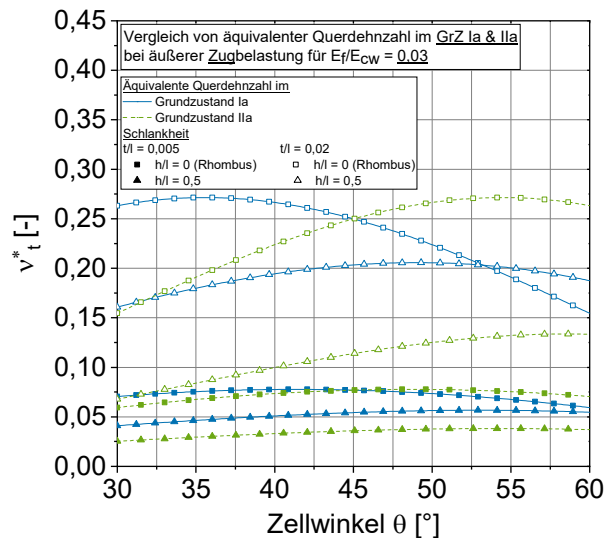
#### 6.3.1.2 Äquivalente Querdehnzahlen $v_{12,t}^*$ und $v_{21,t}^*$

In gleicher Weise wie für die äquivalenten Zugmodule zeigt Abbildung 6.16 eine Gegenüberstellung der äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$ . Die Variationen der Eingangsgrößen sowie deren Kennzeichnung entsprechen denen von Abbildung 6.14. Vergleichbar zu der in Abbildung 6.14 dargestellten Gegenüberstellung der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  treten auch für die Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  bei einer rhombischen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  deckungsgleiche Verläufe für einen Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  bzw.  $30^\circ$  und  $30^\circ$  bzw.  $60^\circ$  auf. Weiterhin wird aus der Abbildung erneut der deckungsgleiche Verlauf für quadratische Zellen mit einer Zellwandlänge  $h = 0$  und einem Zellwinkel  $\theta = 45^\circ$  ersichtlich, womit in diesem Fall auch für die Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  eine Richtungsunabhängigkeit vorliegt.

Verglichen zu den vorherigen Ausführungen zu den äquivalenten Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  treten für das betrachtete Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,3$  größerer Unterschiede der Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  bei einer regulär hexagonalen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  auf. Der Ansatz richtungsunabhängiger Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  ist somit bei geringer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  nicht gerechtfertigt. Wie in Kapitel 6.2.1.1 und 6.2.1.3 beschrieben streben jedoch bei hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  sowohl die Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  als auch die Querdehnzahl  $v_{21,t}^*$  unabhängig von der Zellform identisch gegen einen Wert von Null. Folglich können bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  die beiden Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  vereinfacht als richtungsunabhängig betrachtet werden.



**Abb. 6.16:** Variation von  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $E_f/E_{cw} = 0,03$



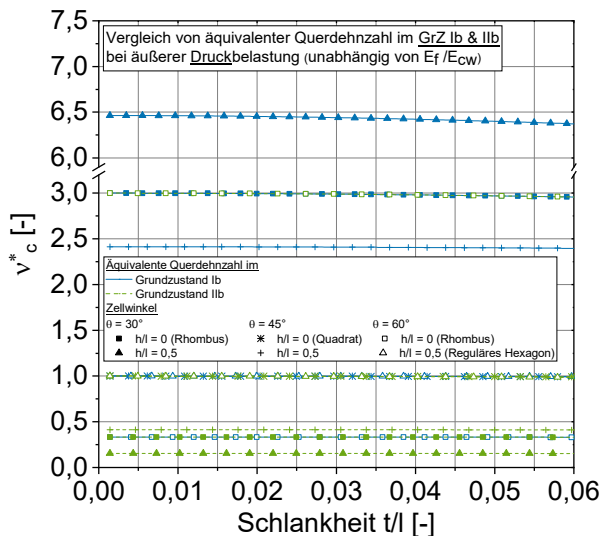
**Abb. 6.17:** Variation von  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für  $E_f/E_{cw} = 0,03$

Eine ergänzende Darstellung der äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  kann Abbildung 6.17 für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,03$  entnommen werden. Hieraus wird die in Tabelle 6.3 angegebene gegenläufige Abhängigkeit der Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  vom Zellwinkel  $\theta$  und der Länge  $h$  der Verbindungsstelle ersichtlich. Für die Querdehnzahl  $v_{12,t}^*$  fallen die Abhängigkeiten jedoch nicht einheitlich aus, sondern sind teilweise bereichsabhängig (vgl. Kap. 6.2.1.1). Der Kurvenschnittpunkt für quadratische Zellen mit  $h = 0$  und  $\theta = 45^\circ$  verdeutlicht nochmals die zuvor beschriebene Richtungsunabhängigkeit der Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  bei dieser Zellform.

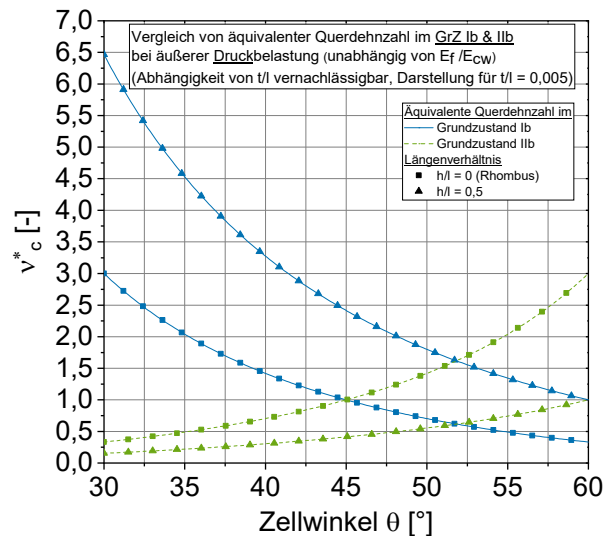
### 6.3.2 Grundzustand Ib und IIb bei äußerer Druckbelastung

Bleibt wie in Kapitel 6.2.2 beschrieben der Fehler aus einer Vernachlässigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle im Grundzustand Ib unberücksichtigt, nehmen die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  den Wert der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  an. Demzufolge liegen für jede Zellgeometrie und jeden Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials im Wertebereich gängiger Geozellenprodukte richtungsunabhängige äquivalente Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  vor und eine weitergehende Betrachtung ist nicht notwendig.

Abbildung 6.18 zeigt eine Gegenüberstellung der äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  für eine rhombische und hexagonale Zellenform bei Zellwinkeln von  $\theta = 30^\circ$ ,  $45^\circ$  und  $60^\circ$ . Vergleichbar zu den in Abbildung 6.16 dargestellten Ergebnissen der Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  treten auch hier für eine rhombische Zelle deckungsgleiche Verläufe bei Zellwinkeln von  $\theta = 30^\circ$  bzw.  $60^\circ$  und bei  $60^\circ$  bzw.  $30^\circ$  auf. Dies lässt sich erneut durch die übereinstimmende Orientierung der geneigten Zellwände zur Belastungsrichtung in diesen Fällen begründen. Weiterhin verdeutlichen die deckungsgleichen Verläufe bei einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  die Richtungsunabhängigkeit der Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  für quadratische Zellen.



**Abb. 6.18:** Variation von  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$



**Abb. 6.19:** Variation von  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$

Ein nahezu deckungsgleicher Verlauf der beiden Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  lässt sich aus der Abbildung auch für eine regulär hexagonale Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und einem Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  entnehmen. Wie zuvor beschrieben hängen die Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  nur von den Eigenschaften der unbefüllten Zellstruktur ab, womit diese näherungsweise die nach Gleichung (3.25) definierte Isotropiebedingung einer regulär hexagonalen Wabenstruktur erfüllen. Demzufolge sind die Querdehnnzahl  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  auch hier weitestgehend richtungsunabhängig. Aufgrund der doppelwandigen Verbindungsstelle und der zusätzlichen Berücksichtigung der Axial- und Schubanteile der Zellwandverformung in der analytischen Lösung gilt dies jedoch nur in Näherung. Ein zusätzlicher Vergleich der Zahlenwerte mit denen von Gleichung (3.25) zeigt, dass die Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  bei einer regulär hexagonalen und auch bei einer quadratischen Zellform einen weitestgehend einheitlichen Wert von 1 annehmen.

Eine ergänzende Gegenüberstellung der Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  für den Zellwinkel  $\theta$  kann Abbildung 6.19 entnommen werden. Die Abbildung verdeutlicht die in Tabelle 6.3 dargestellte gegenläufige Abhängigkeit der äquivalenten Querdehnnzahlen von dem Zellwinkel  $\theta$ . Während die Querdehnnzahl  $v_{12,c}^*$  mit zunehmendem Zellwinkel  $\theta$  und abnehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle kleiner wird, nimmt die Querdehnnzahl  $v_{21,c}^*$  in diesen Fällen zu. Hierbei weist die Querdehnnzahl  $v_{12,c}^*$  für eine regulär hexagonale Zellform eine stärkere Abhängigkeit vom Zellwinkel  $\theta$  als die Querdehnnzahl  $v_{21,c}^*$  auf. Ein vergleichbarer Zusammenhang wurde bereits bei den Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  festgestellt (s. Abb. 6.15). Weiterhin wird aus den Schnittpunkten bei einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0$  und bei einem Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  nochmals die Richtungsunabhängigkeit der Querdehnnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  ersichtlich.

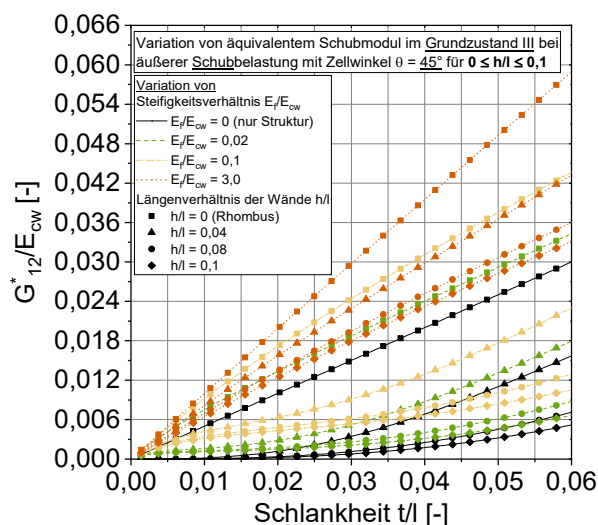
Wird gemäß den Beschreibungen in Kapitel 6.2.1.2 und 6.2.1.4 von einer vernachlässigbaren Beanspruchbarkeit der Zellwände auf Druckkräfte ausgegangen, so nehmen die äquivalenten

Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  die Querdehnzahl  $v_f$  des Füllmaterials an. Unter Berücksichtigung der zuvor festgestellten Übereinstimmung der Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  sind somit alle äquivalenten Materialkennwerte im Grundzustand Ib und IIb über den vollständigen Wertebereich gängiger Geozellenprodukte und Füllmaterialsteifigkeiten richtungsunabhängig.

## 6.4 Einflussgrößen auf den Schubmodul des Grundzustandes III

### 6.4.1 Darstellung des äquivalenten Schubmoduls über die Schlankheit $t/l$

Ergänzend zur Parameterstudie der Grundzustände I und II werden nachfolgend die Einflussgrößen auf den äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  untersucht. Die Betrachtungen beziehen sich hierbei auf die als Matlab-Skript programmierte allgemeine Näherungslösung für  $G_{12}^*$  (s. Anhang C.2). Wie bereits für die Grundzustände I und II werden die verschiedenen Größen dimensionslos angegeben und die in Tabelle 6.2 dargestellten Wertebereiche verwendet. Die Variation des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  als Verhältnisswert zum Elastizitätsmodul  $E_{cw}$  des Zellwandmaterials ist in Abbildung 6.20 über die Schlankheit  $t/l$  für ein Längenverhältnis im Bereich von  $0 \leq h/l \leq 0,1$  bei einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  dargestellt. Die verschiedenen Linientypen kennzeichnen die variierten Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  und die verschiedenen Symboltypen die variierten Längenverhältnisse  $h/l$ .



**Abb. 6.20:** Variation von  $G_{12}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  für  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$

Im betrachteten Wertebereich variiert der Schubmodul  $G_{12}^*$  zwischen ca. 0,0005 bis 0,06  $E_{cw}$ . Wie bei den beiden äquivalenten Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  steigt der Schubmodul  $G_{12}^*$  unabhängig von den weiteren Einflussgrößen mit zunehmender Wanddicke  $t$  bzw. abnehmender Schlankheit  $t/l$  durch die hieraus folgenden größeren Wandsteifigkeiten an. Bei einem sehr hohen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 3$  gehen die Kurven für die verschiedenen Längenverhältnisse  $h/l$  bedingt durch die vorwiegende Abhängigkeit von der linearen Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  der Zellwände in lineare Verläufe mit einer konstanten Steigung über. Bei rhombischen Zellformen mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  liegt unabhängig von der Steifigkeit  $E_f$  des

Füllmaterials ein linearer Verlauf vor, da durch die nicht vorhandene Länge der Verbindungsstelle die Zellwände ausschließlich durch Normalkräfte beansprucht werden.

Aus Abbildung 6.20 zeigt sich weiterhin, dass der Ansatz einer Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  zu einem Anstieg des Schubmoduls  $G^*_{12}$  führt. Beispielsweise ergibt sich für eine Schlankheit von  $t/l = 0,03$  aus einer Zunahme der Füllmaterialsteifigkeit von  $E_f = 0$  zu  $0,1 E_{cw}$  ein Anstieg des Schubmoduls von etwa  $G^*_{12} = 0,003$  zu  $0,009 E_{cw}$  also um den Faktor 3. Verglichen zu den in den Grundzuständen I und II festgestellten Zusammenhängen fällt der Einfluss des Füllmaterials auf den Schubmodul  $G^*_{12}$  deutlich geringer aus. Während im Grundzustand I und II das Verbundverhalten jeweils in oder quer zur Beanspruchungsrichtung maßgebend durch das Füllmaterial beeinflusst wird, fällt im Grundzustand III die Richtung der Reaktion des Füllmaterials in etwa mit den geneigten Wänden  $\alpha$  zusammen (s. Abb. 4.24). Infolgedessen ergibt sich durch die Wandsteifigkeiten ein vergleichsweise höherer Einfluss und die Abhängigkeit des Schubmoduls  $G^*_{12}$  von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ist geringer.

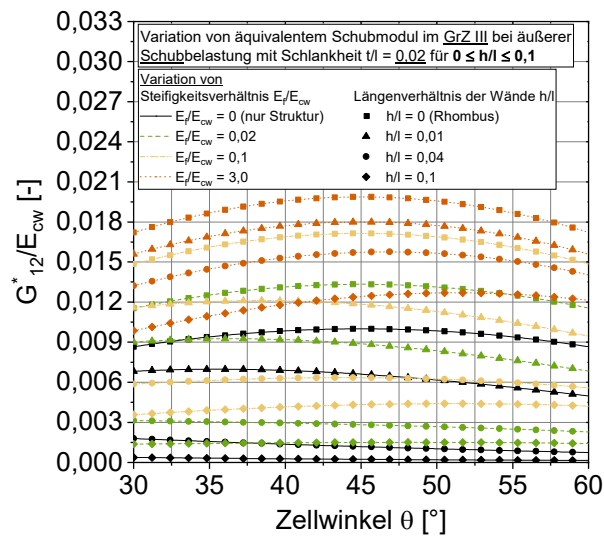
Der äquivalente Schubmodul  $G^*_{12}$  weist demgegenüber eine starke Abhängigkeit von dem Längenverhältnis  $h/l$  auf. Mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle nimmt der Schubmodul  $G^*_{12}$  deutlich ab. Beispielsweise bewirkt eine Zunahme des Längenverhältnisses von  $h/l = 0$  zu  $0,1$  für eine Schlankheit von  $t/l = 0,04$  und ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,02$  eine Abnahme des Schubmoduls  $G^*_{12}$  um einen Faktor von ca. 9,6. Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 4.3.3.1 geht die Beanspruchung der Zellwände durch Biegemomente von der Verbindungsstelle aus. Mit zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle steigen die Biegemomente und damit der Biegeanteil der Zellverformung an, womit der Schubmodul  $G^*_{12}$  abnimmt. Aus der zusätzlichen Betrachtung des Einflusses des Längenverhältnisses  $h/l$  bei einem Steifigkeitsverhältnisse von  $E_f/E_{cw} = 3$  in Abbildung 6.20 wird ersichtlich, dass sich die Zunahme der Zellwandlänge  $h$  bei hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  weniger stark auf den Schubmodul  $G^*_{12}$  auswirkt als bei geringen Füllmaterialsteifigkeiten.

#### 6.4.2 Darstellung des äquivalenten Schubmoduls über den Zellwinkel $\theta$

Die Variation des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  über den Zellwinkel  $\theta$  ist in Abbildung 6.21 für eine Schlankheit von  $t/l = 0,02$  und ein Längenverhältnis  $0 \leq h/l \leq 0,1$  dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden hier die Ergebnisse nicht für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0,08$  sondern  $0,01$  dargestellt. Verglichen zur Darstellung über die Schlankheit  $t/l$  weisen die Kurven einen flacheren Verlauf auf, woraus auf eine vergleichsweise geringere Abhängigkeit des Schubmoduls  $G^*_{12}$  vom Zellwinkel  $\theta$  geschlossen werden kann. Weitestgehend unabhängig von der Länge  $h$  der Verbindungsstelle tritt das Maximum des Schubmoduls  $G^*_{12}$  bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  im Bereich eines Zellwinkels von  $\theta = 45^\circ$  bis  $55^\circ$  auf. Mit abnehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und zunehmender Zellwandlänge  $h$  verschiebt sich das Maximum hingegen zu einem Zellwinkel von  $\theta = 30^\circ$ . Einerseits bewirkt ein abnehmender Zellwinkel  $\theta$  größere Zellverformungen, andererseits nimmt hierdurch jedoch zusätzlich die Bezugslänge für



die Bestimmung der Gleitung  $\gamma_{12}$  zu (s. bspw. Gl. (4.69)). Dementsprechend ergibt sich eine entgegengesetzte Abhängigkeit vom Zellwinkel  $\theta$  und die Änderung des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  fällt verhältnismäßig gering aus.



**Abb. 6.21:** Variation von  $G_{12}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  für  $t/l = 0,02$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$

Ergänzend wird aus der Abbildung die bereits zuvor beschriebene starke Abhängigkeit des Schubmoduls  $G_{12}^*$  von der Länge  $h$  der Verbindungsstelle deutlich. Über den vollständigen Wertebereich resultiert aus einem Anstieg der Zellwandlänge  $h$  eine Abnahme des Schubmoduls  $G_{12}^*$ . Ebenfalls wird aus der Abbildung der Einfluss der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ersichtlich. Mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  steigt der Schubmodul  $G_{12}^*$  an.

Die Ergebnisse der Parameterstudie für große Längenverhältnisse von  $0,1 < h/l \leq 0,5$ , bei Zellwinkeln von  $\theta = 30^\circ$  und  $60^\circ$  sowie bei Schlankheiten von  $t/l = 0,005$  und  $0,06$  bestätigen die zuvor beschriebenen Zusammenhänge. Grafische Darstellungen hierzu sind dem Anhang H.6 beigelegt.

Abschließend lässt sich Tabelle 6.4 eine Zusammenfassung der wesentlichen Abhängigkeiten zwischen den verschiedenen Einflussgrößen und dem äquivalenten Schubmodul  $G_{12}^*$  entnehmen. Eine Erklärung der Zeichen findet sich in der Legende zur Tabelle wieder.

**Tab. 6.4:** Übersicht zu den verschiedenen Einflussgrößen auf das äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$  des Grundzustandes III

	Ansteigende Einflussgröße			
	Steifigkeitsverhältnis $E_f/E_{cw}$ des Füllmaterials $E_f$ zum Zellwandmaterial $E_{cw}$	Schlankheit $t/l$ als Verhältnis der Wanddicke $t$ zur Länge der geneigten Zellwand $l$	Zellwinkel $\theta$	Längenverhältnis $h/l$ der Verbindungsstelle $h$ zur geneigten Zellwand $l$
Grundzustand III (Schub) $G_{12}^*$	>	>	>< <sup>(a)</sup>	<

Zeichenerklärung: > Zunahme, < Abnahme

<sup>(a)</sup> Bereichsweise Zu- und Abnahme in Abhängigkeit von  $E_f/E_{cw}$ - und  $h/l$ -Verhältnis

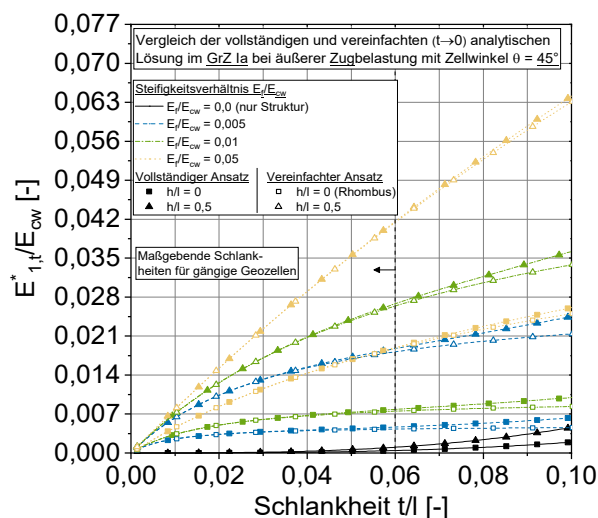
## 6.5 Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bestimmungsgleichungen

### 6.5.1 Gültigkeitsbereich für die Kennwerte der Grundzustände I und II

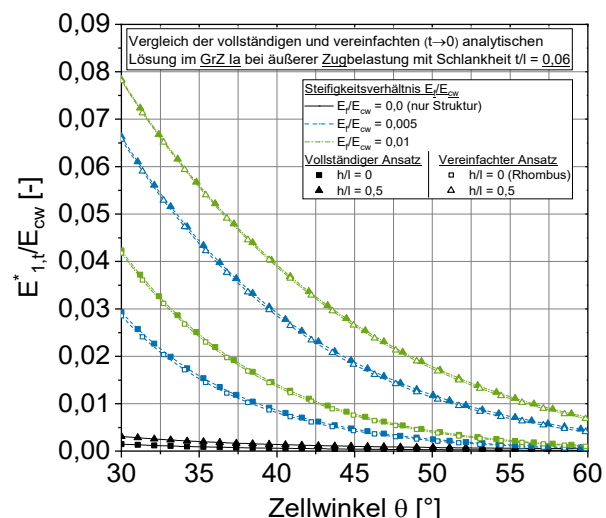
#### 6.5.1.1 Grundzustand Ia und IIa bei äußerer Zugbelastung

Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen zu den äquivalenten Materialkennwerten nach Kapitel 4.2 berücksichtigen eine Beanspruchung der Zellwände durch Normal- und Querkkräfte sowie durch Biegemomente. Da der Großteil handelsüblicher Geozellenprodukten Zellwände hoher Schlankheit  $t/l$  aufweist, können Kapitel 4.2.7.3 zusätzlich vereinfachte Bestimmungsgleichungen aus einer Grenzwertbetrachtung für sehr schlanke Zellwände mit  $t \rightarrow 0$  entnommen werden. In diesem Fall führt eine Zugbelastung im Grundzustand Ia und IIa nur zu einer Beanspruchung der Zellwände durch Zugkräfte und eine Druckbelastung im Grundzustand Ib und IIb zu einer vornehmlichen Beanspruchung des Füllmaterial.

Zur Prüfung der Anwendbarkeit auf Geozellen werden nachstehend die aus den allgemeinen und vereinfachten Bestimmungsgleichungen abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerte verglichen. Das Vorgehen und die Darstellungsweise entsprechen hierbei denen der Parameterstudie (s. Kap. 6.2). Eine Gegenüberstellung des mit der allgemeinen und vereinfachten Bestimmungsgleichung ermittelten äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  lässt sich Abbildung 6.22 für einen Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  entnehmen. Für die Zellgeometrien werden als Extremfälle eine rhombische Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  und eine hexagonale Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  betrachtet. Zur Unterscheidung des aus den beiden Bestimmungsgleichungen abgeleiteten Materialkennwerts werden ausgefüllte Symbole für die Ergebnisse der allgemeinen und offene für die der vereinfachten Lösung verwendet.



**Abb. 6.22:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $E_{1,t}^*$  über die Wand-schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$



**Abb. 6.23:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $E_{1,t}^*$  über den Zell-winkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,06$

Aus den Kurven wird ersichtlich, dass bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,05$  nahezu deckungsgleiche Verläufe für die allgemeine und vereinfachte Lösung über den relevanten Wertebereich der Schlankheit von  $t/l \leq 0,06$  vorliegen. Bei einer hohen Füllmaterialsteifigkeit

$E_f$  ergeben sich dementsprechend nur geringfügige Unterschiede zwischen den beiden Lösungen. Mit abnehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und zunehmender Wanddicke  $t$  treten wegen des ansteigenden Einflusses der Biegemomente größere Unterschiede zwischen den beiden Lösungen auf. Die vereinfachte Lösung liefert dabei ein geringeres Zugmodul  $E_{1,t}^*$  als die allgemeine Lösung, da der Widerstand aus der Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände unberücksichtigt bleibt. Folglich hängt neben der Wanddicke  $t$  der Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bestimmungsgleichungen zusätzlich von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab.

Für das in Kapitel 6.1 abgeleitete Minimum der Schlankheit gängiger Geozellenprodukte von  $t/l = 0,06$  ist der aus der allgemeinen und vereinfachten Lösung ermittelte Zugmodul  $E_{1,t}^*$  in Abbildung 6.23 über den Zellwinkel  $\theta$  dargestellt. Aufgrund der zuvor festgestellten minimalen Unterschiede bei hoher Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  werden die Ergebnisse nur für geringe Steifigkeitsverhältnisse von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  und  $0,01$  angegeben. Aus der Abbildung wird ersichtlich, dass die Kurven zwar sehr ähnliche jedoch keine deckungsgleichen Verläufe aufweisen. Die Unterschiede fallen bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  höher aus als bei  $E_f/E_{cw} = 0,01$ . Vergleichbare Zusammenhänge lassen sich ebenfalls für die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  sowie den äquivalenten Zugmodul  $E_{2,t}^*$  feststellen. Abbildungen hierzu können dem Anhang I.1 entnommen werden.

Zur genauen Betrachtung der Unterschiede zeigt Tabelle 6.5 eine tabellarische Übersicht zu den Abweichungen zwischen den äquivalenten Materialkennwerten im Grundzustand Ia und IIa aus der allgemeinen und vereinfachten Lösung für verschiedene Eingangsgrößen. Die Abweichungen sind hierbei in Prozent angegeben und beziehen sich auf die Zahlenwerte der allgemeinen Lösung. Eine negative Abweichung entspricht einer Unterschätzung durch die vereinfachte Lösung und eine positive einer Überschätzung.

**Tab. 6.5:** Abweichung zwischen der allgemeinen und vereinfachten analytischen Lösung im Grundzustand Ia und IIa für eine minimale Schlankheit von  $t/l = 0,06$  im relevanten Wertebereich

$E_f/E_{cw}$ [-]	$\theta$ [°]	Abweichung bezogen auf die allgemeine Lösung [%]							
		Grundzustand Ia				Grundzustand IIa			
		$E_{1,t}^* / E_{cw}$ [-]		$v_{12,t}^*$ [-]		$E_{2,t}^* / E_{cw}$ [-]		$v_{21,t}^*$ [-]	
		$h/l = 0$	$h/l = 0,5$	$h/l = 0$	$h/l = 0,5$	$h/l = 0$	$h/l = 0,5$	$h/l = 0$	$h/l = 0,5$
0,005	30	-2,65	-0,81	1,04	1,18	-23,43	-32,95	0,47	0,47
	45	-7,87	-3,06	0,66	1,07	-7,87	-13,34	0,66	0,68
	60	-23,16	-9,30	0,47	0,88	-2,64	-5,92	1,04	1,20
0,01	30	-1,25	-0,37	0,86	0,87	-13,63	-20,49	0,46	0,47
	45	-4,16	-1,54	0,63	0,91	-4,16	-7,42	0,63	0,66
	60	-13,46	-5,16	0,46	0,83	-1,25	-3,06	0,86	1,07
0,05	30	-0,29	-0,11	0,52	0,52	-3,81	-6,61	0,43	0,45
	45	-1,06	-0,45	0,49	0,61	-1,06	-2,25	0,49	0,57
	60	-3,76	-1,68	0,43	0,68	-0,29	-0,84	0,52	0,76

Aus den Zahlenwerten wird ersichtlich, dass die äquivalenten Materialkennwerte durch die vereinfachte Lösung um maximal -20 bis -35 % unterschätzt werden. Diese Abweichungen treten für die äquivalenten Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  bei einem geringen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  für Zellwinkel von  $\theta = 30^\circ$  oder  $60^\circ$  auf und nehmen mit ansteigender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab. Für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,05$  betragen die Unterschiede zwischen den Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  aus den beiden Lösungen nur noch ca. -7 %. Folglich kann ab diesem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  von vernachlässigbaren Unterschieden ausgegangen werden und eine Berechnung mit den vereinfachten Bestimmungsgleichungen (4.46) und (4.48) liefert eine ausreichende Genauigkeit für die Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$ . Dementgegen zeigen sich für die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  auch bei einem geringen Steifigkeitsverhältnis mit maximal 1,2 % keine nennenswerten Unterschiede. Zur Berechnung der Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  liefern die vereinfachten Bestimmungsgleichungen (4.50) und (4.52) somit selbst bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,005$  eine ausreichende Genauigkeit.

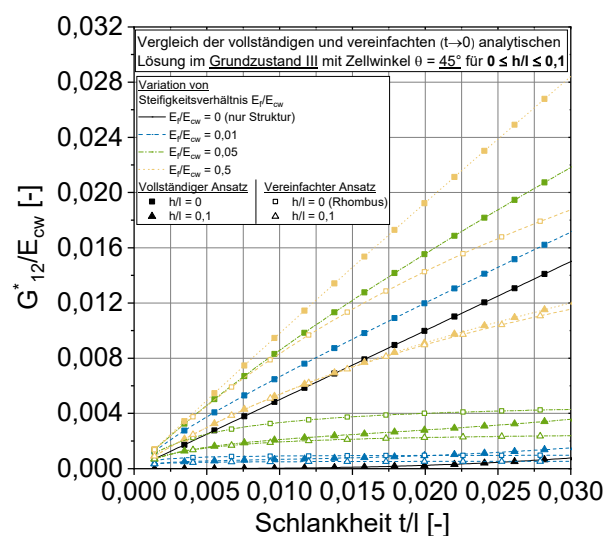
#### 6.5.1.2 Grundzustand Ib und IIb bei äußerer Druckbelastung

Unter Berücksichtigung der in Kapitel 6.2.1.2 und 6.2.1.4 beschriebenen sowie in Tabelle 6.3 zusammengefassten Ergebnisse der Parameterstudie für den Grundzustand Ib und IIb ist eine weitergehende Betrachtung der Anwendbarkeit der vereinfachten Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  nicht erforderlich. Wird wie in Kapitel 6.2.2 beschrieben für das Steifigkeitsverhältnis ein Wert von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  vorausgesetzt und der Fehler aus der Nichtberücksichtigung der Axialverschiebungen der Verbindungsstelle im Grundzustand Ib vernachlässigt, stimmen im Wertebereich gängiger Geozellenprodukte und typischer Füllmaterialsteifigkeiten unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen die Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  überein. Dies ist in Übereinstimmung mit den Ausdrücken der vereinfachten Bestimmungsgleichungen (4.47) und (4.49), welche bei Vernachlässigung des Fehlers im Grundzustand Ib unabhängig von der Schlankheit  $t/l$ , dem Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  sind.

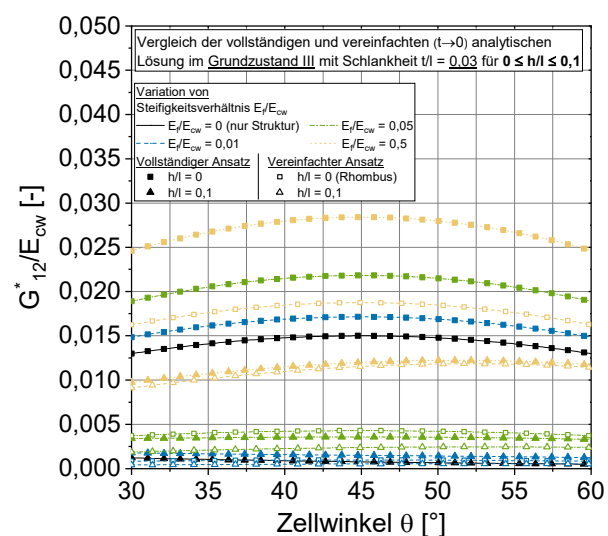
Entsprechend der Ergebnisse der Parameterstudie nach Kapitel 6.2.2 lässt sich weiterhin für die beiden äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  eine weitestgehende Unabhängigkeit von der Schlankheit im betrachteten Variationsbereich von  $t/l \leq 0,06$  feststellen (s. Tab. 6.3). Dieser Zusammenhang geht ebenfalls aus den beiden vereinfachten Bestimmungsgleichungen (4.51) und (4.53) hervor. Da die beiden Gleichungen zusätzlich unabhängig von der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  sind, ist die Angabe einer Gültigkeitsgrenze bezogen auf das Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  nicht notwendig. Vielmehr gelten die vereinfachten Gleichungen für die beiden äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  über den vollständigen Wertebereich gängiger Geozellenprodukten.

### 6.5.2 Gültigkeitsbereich für den Grundzustand III

Neben den äquivalenten Materialkennwerten in den Grundzuständen I und II wird nachfolgend die Anwendbarkeit der vereinfachten Bestimmungsgleichung (4.72) für den Schubmodul  $G_{12}^*$  näher betrachtet. Gemäß Kapitel 4.3.4 ergibt sich die vereinfachte Bestimmungsgleichung nur über den Ansatz der Formänderungsenergie aus den Normalkräften in den Zellwänden und aus den beiden Federkräften. In Abbildung 6.24 sind für ein Längenverhältnis von  $0 \leq h/l \leq 0,1$  die Ergebnisse der allgemeinen und vereinfachten analytischen Näherungslösung über die Schlankheit in einem Wertebereich von  $0,0014 \leq t/l \leq 0,3$  bei einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  abgetragen. Die Darstellungsweise der variierten Größen entspricht der aus dem vorherigen Kapitel 6.5.1.



**Abb. 6.24:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $G_{12}^*$  über  $t/l$  mit  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$



**Abb. 6.25:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $G_{12}^*$  über  $\theta$  mit  $t/l = 0,03$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$

Aus der Abbildung wird deutlich, dass sich teilweise erhebliche Abweichungen zwischen den beiden Lösungen ergeben. In allen Fällen unterschätzt der aus der vereinfachten Lösung ermittelte äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$  den aus der allgemeinen Näherungslösung. Hierbei werden die Unterschiede mit zunehmender Wanddicke  $t$  und abnehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle größer. Weiterhin zeigt sich, dass bei einer rhombischen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  die vereinfachte Lösung für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,01$  und  $0,05$  sogar einen geringeren Schubmodul  $G_{12}^*$  als die Lösung für unbefüllte Zellen liefert. Lediglich bei einem relativ hohen Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,5$  und einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,1$  ergibt sich eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen der vereinfachten und allgemeinen Näherungslösungen.

Ergänzend zeigt Abbildung 6.25 einen Vergleich des Schubmoduls  $G_{12}^*$  bei Darstellung über den Zellwinkel  $\theta$ . Demzufolge treten die Unterschiede zwischen dem Schubmodul  $G_{12}^*$  in vergleichbarer Größenordnung weitestgehend unabhängig von dem Zellwinkel  $\theta$  auf. Weiterhin verdeutlicht die Abbildung erneut die großen Unterschiede bei geringen Längenverhältnissen

$h/l$  und geringen Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$ . Eine ergänzende Untersuchung für große Längenverhältnisse von  $0,1 < h/l \leq 0,5$  bestätigt die zuvor festgestellten Zusammenhänge. Mit ansteigender Länge  $h$  der Verbindungsstelle nehmen die Unterschiede zwischen der vereinfachten und der allgemeinen Näherungslösung ab. Insbesondere für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,5$  zeigt sich hierbei eine gute Übereinstimmung. Grafische Darstellung hierzu können Anhang I.2 entnommen werden. Folglich liefert die vereinfachte Lösung nur für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,5$  und ein Längenverhältnis von  $h/l \geq 0,1$  über einen Wertebereich der Schlankheit von  $0 \leq t/l \leq 0,03$  eine akzeptable Übereinstimmung mit der allgemeinen Näherungslösung.

Der ausschließliche Ansatz der Normalkräfte als Schnittgrößen bei der Ableitung der vereinfachten Bestimmungsgleichung (4.72) stellt somit einen wenig zufriedenstellende Lösung dar und bildet das Verformungsverhalten der Struktur unzureichend ab. Weiterhin wird bereits in Kapitel 4.3.4 angeführt, dass bei einer rhombischen Zellform die Wände nur durch Normalkräfte beansprucht werden. Folglich ist in diesem Fall für den Schubmodul  $G^*_{12}$  wegen der linearen Dehnsteifigkeit  $EA_{cw}$  auch eine lineare Abhängigkeit von der Schlankheit  $t/l$  zu erwarten. Wie aus Abbildung 6.24 für ein Längenverhältnis von  $h/l = 0$  und ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} = 0,5$  ersichtlich wird, bildet jedoch nur die allgemeine Näherungslösung diesen Zusammenhang korrekt ab. Hingegen verdeutlicht der nichtlineare Verlauf der vereinfachten Lösung in diesem Fall nochmals die unzureichende Abbildung des Verbundverhaltens durch die vereinfachte Lösung. Bezogen auf den Wertebereich gängiger Geozellenprodukte und typischer Füllmaterialsteifigkeiten ist folglich die allgemeine Näherungslösung zur Ermittlung des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  heranzuziehen.

## 6.6 Ergebnisübersicht zur Parameterstudie

Im Hinblick auf die Abhängigkeiten der äquivalenten Materialkennwerte in den für Geozellen relevanten Wertebereichen der unterschiedlichen Eingangsgrößen lässt sich zusammenfassend feststellen, dass die äquivalenten Zugmodule  $E^*_{1,t}$  und  $E^*_{2,t}$  mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und Wanddicke  $t$  ansteigen. Für den Zellwinkel  $\theta$  und das Längenverhältnis  $h/l$  besteht eine gegenläufige Abhängigkeit. Demzufolge wird der Zugmodul  $E^*_{1,t}$  mit abnehmendem Zellwinkel  $\theta$  sowie zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle größer und der Zugmodul  $E^*_{2,t}$  kleiner. Die äquivalenten Querdehnnzahlen  $v^*_{12,t}$  und  $v^*_{21,t}$  nehmen mit ansteigender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  ab und streben für eine sehr hohe Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  gegen Null. Dementgegen werden die Querdehnnzahlen  $v^*_{12,t}$  und  $v^*_{21,t}$  mit zunehmender Wanddicke  $t$  größer. Wie die Zugmodule  $E^*_{1,t}$  und  $E^*_{2,t}$  weisen die Querdehnnzahlen  $v^*_{12,t}$  und  $v^*_{21,t}$  eine gegenläufige Abhängigkeit vom Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  auf. Die Tendenzen sind hierbei weitestgehend mit denen der Zugmodule  $E^*_{1,t}$  und  $E^*_{2,t}$  vergleichbar, wobei diese jedoch für die Querdehnnzahl  $v^*_{12,t}$  teilweise uneinheitlich sind und nur bereichsweise gelten.

Bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  stimmen die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  überein. Liegen geringere Steifigkeitsverhältnisse  $E_f/E_{cw}$  vor, weisen die Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  Abhängigkeiten vergleichbar zu denen der unbefüllten Struktur auf. Im relevanten Bereich der Schlankheit von  $t/l \leq 0,06$  ergeben sich ebenfalls für die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  konstante Werte, welche nur von dem Zellwinkel  $\theta$  und dem Längenverhältnis  $h/l$  abhängen. Hinsichtlich des Zellwinkels  $\theta$  und des Längenverhältnisses  $h/l$  liegen hierbei gegenläufige Abhängigkeiten vor. Mit abnehmendem Zellwinkel  $\theta$  und zunehmender Länge  $h$  der Verbindungsstelle wird die Querdehnzahl  $v_{12,c}^*$  größer und die Querdehnzahl  $v_{21,c}^*$  kleiner. Wird eine Abtragung von Druckkräften durch eine Betrachtung der Zellwände als Membran ausgeschlossen, entsprechen die Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen der Querdehnzahl des Füllmaterials  $v_s$ .

Wie die äquivalenten Zug- und Druckmodule nimmt der äquivalente Schubmodul  $G_{12}^*$  im Grundzustand III mit zunehmender Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  und Wanddicke  $t$  zu, wohingegen der Schubmodul  $G_{12}^*$  mit ansteigender Länge  $h$  der Verbindungsstelle kleiner wird. Für den Zellwinkel  $\theta$  liegt kein einheitlicher Zusammenhang vor, sondern es besteht für den Schubmodul  $G_{12}^*$  eine zusätzliche Abhängigkeit von dem Steifigkeitsverhältnis  $E_f/E_{cw}$  und dem Längenverhältnis  $h/l$ .

Eine Richtungsunabhängigkeit der Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  liegt bei einer quadratischen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0$  und einem Zellwinkel von  $\theta = 45^\circ$  sowie näherungsweise bei einer regulär hexagonalen Zellform mit einem Längenverhältnis von  $h/l = 0,5$  und einem Zellwinkel von  $\theta = 60^\circ$  vor. Dies trifft auch auf die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  bei einer quadratischen Zellform zu. Bei einer regulär hexagonalen Zellform sind die Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  hingegen nur bei einer hohen Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  in Näherung richtungsunabhängig, da in diesem Fall beide Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen gegen Null streben.

Aufgrund der Übereinstimmung der beiden äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  mit der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  bei einem Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  ist eine Richtungsunabhängigkeit unabhängig von den weiteren Eingangsgrößen gegeben. Die beiden äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  werden vergleichbar zu den äquivalenten Zugmodulen  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  für eine quadratische Zellform exakt und für eine regulär hexagonale Zellform näherungsweise richtungsunabhängig. Wird für die beiden Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  von einem Wert entsprechend der Querdehnzahl  $v_s$  des Füllmaterials ausgegangen, sind diese wie die Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  über den vollständigen Wertebereich der verschiedenen Eingangsgrößen richtungsunabhängig.

Für eine Schlankheit von  $t/l \leq 0,06$  und ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,05$  liefert eine Ermittlung der äquivalenten Zugmodule  $E_{1,t}^*$  und  $E_{2,t}^*$  mit den in Tabelle 4.4 angegebenen

vereinfachten Bestimmungsgleichungen eine ausreichende Genauigkeit. Für noch geringere Steifigkeitsverhältnisse von  $E_f/E_{cw} \geq 0,005$  lassen sich die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  ohne nennenswerten Genauigkeitsverlust mit den in Tabelle 4.5 angegebenen vereinfachten Bestimmungsgleichungen berechnen. Die äquivalenten Druckmodule  $E_{1,c}^*$  und  $E_{2,c}^*$  können für ein Steifigkeitsverhältnis von  $E_f/E_{cw} \geq 0,02$  über den vollständigen Wertebereich gängiger Geozellenprodukte in Übereinstimmung mit den vereinfachten Bestimmungsgleichungen gemäß Tabelle 4.4 und auf der sicheren Seite liegend entsprechend der Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  angenommen werden, womit  $E_{1,c}^* = E_{2,c}^* = E_f$  gilt. Wie die Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$  können die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  über die in Tabelle 4.5 angegebenen vereinfachten Bestimmungsgleichungen mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden. Sind Druckkräfte in den Zellenwänden unzulässig, stimmen die Querdehnzahlen  $v_{12,c}^*$  und  $v_{21,c}^*$  mit der Querdehnzahl  $v_s$  des Füllmaterials überein und es gilt  $v_{12,c}^* = v_{21,c}^* = v_s$ . Hingegen stellt die vereinfachte Bestimmungsgleichung zur Ermittlung des äquivalenten Schubmoduls  $G_{12}^*$  keine zufriedenstellende Lösung dar, sodass der Schubmodul  $G_{12}^*$  im Wertebereich gängiger Geozellenprodukte und typischer Füllmaterialsteifigkeiten mit der allgemeinen Näherungslösung berechnet werden sollte.



## 7 Anwendung auf mechanische Tragwerksmodelle

### 7.1 Ebener Verzerrungszustand

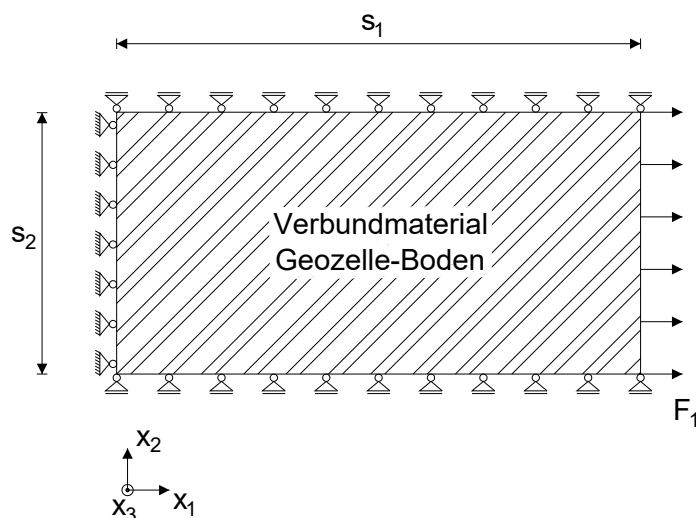
#### 7.1.1 Scheibenmodell

##### 7.1.1.1 Problembeschreibung für das Scheibenmodell

Zur Verdeutlichung der Anwendung der in Kapitel 4 abgeleiteten homogenisierten Materialkennwerte wird nachstehend eine exemplarische Berechnung konkreter Problemstellungen durchgeführt. Beim Einsatz des Verbundmaterials Geozelle-Boden im Bereich von Linienbauwerken beziehen sich die Betrachtung bei unveränderten Randbedingungen in  $x_2$ -Richtung auf den ebenen Verzerrungszustand. Für diese Randbedingungen treten in  $x_2$ -Richtung bzw. in Richtung quer zur Betrachtungsebene keine Verzerrungen auf.

Bei einer vornehmlichen Zugbelastung in  $x_1$ -Richtung, wie beispielsweise bei einer oberflächennahen Anordnung zur Hangsicherung (s. Abb. 2.2b), tritt in dem homogenisierten Verbundmaterial Geozelle-Boden ein ebener Spannungszustand in der Aufspannebene ( $x_1$ - $x_2$ -Ebene) mit homogenen Spannungsverteilungen auf. Die geozellenbewehrte Schicht lässt sich in diesem Fall durch eine anisotrope Scheibe bzw. bei ausschließlicher Zugbeanspruchung durch eine Membran abbilden. Eine Beanspruchung infolge Biegung findet hierbei nicht statt und die Höhenrichtung ( $x_3$ -Richtung) des Verbundmaterials besitzt keinen Einfluss auf das Materialverhalten. Folglich sind die Spannungen  $\sigma_3$ ,  $\tau_{13}$  und  $\tau_{23}$  sowie die Verzerrungen  $\varepsilon_3$ ,  $\gamma_{13}$  und  $\gamma_{23}$  nicht weiter zu berücksichtigen.

Wird weiterhin beachtet, dass bei Orthotropie die Gleitungen und Dehnungen entkoppelt sind (s. Kap. 3.2), treten bei der Betrachtung des Linienbauwerks im ebenen Verzerrungszustand zusätzlich keine Schubspannungen  $\tau_{12}$  und Gleitung  $\gamma_{12}$  in der Aufspannebene des Verbundmaterials auf. Der äquivalente Schubmodul  $G^*_{12}$  wird in diesem Fall unerheblich. Eine schematische Darstellung der beschriebenen Problemstellung zeigt Abbildung 7.1.



**Abb. 7.1:** Scheibenbeanspruchung in der Draufsicht für den EVZ

Entsprechend der Definitionen in Kapitel 4.1 wird vorausgesetzt, dass die  $L_c$ -Richtung mit der  $x_1$ -Richtung und die  $W_c$ -Richtung mit der  $x_2$ -Richtung zusammenfallen. Zur Abbildung der Unverschieblichkeit in  $x_2$ -Richtung für den EVZ sind an den Rändern parallel zur  $x_1$ -Achse einwertige Auflagerbedingungen angeordnet. Am linken Rand wird für das Beispiel vereinfacht von einer Unverschieblichkeit sowohl in  $x_1$ - als auch in  $x_2$ -Richtung ausgegangen und durch zweiwertige gelenkige Auflager abgebildet. Der rechte Modellrand wird durch eine äußere Linienlast  $F_1$  auf Zug belastet. Durch die Betrachtung im EVZ ist die Länge  $s_2$  des Ausschnittes in  $x_2$ -Richtung beliebig wählbar. Die Lösung der Problemstellung lässt sich unter Berücksichtigung der linearen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen für ein homogenes und orthotropes Materialverhalten direkt aus den ersten beiden Zellen der in Gleichung (3.2) angegebenen Nachgiebigkeitsmatrix ableiten. Unter Voraussetzung einer Dehnung von  $\varepsilon_2 = 0$  in  $x_2$ -Richtung für den EVZ und einer Spannung in  $x_3$ -Richtung von  $\sigma_3 = 0$  für den ESZ ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{31} \frac{\overset{=0}{\hat{\sigma}_3}}{E_3} = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21} \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \text{und} \\ \overset{0}{\hat{\varepsilon}_2} &= -\nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1} + \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{31} \frac{\overset{=0}{\hat{\sigma}_3}}{E_3} \Leftrightarrow \frac{\sigma_2}{E_2} = \nu_{12} \frac{\sigma_1}{E_1}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Durch Einsetzen der Bedingung für  $\varepsilon_2 = 0$  in die Gleichung von  $\varepsilon_1$  und eine Erweiterung um die Zellhöhe  $H_c$  folgt die Kraft-Dehnungs-Beziehung entsprechend Gleichung (7.2).

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1} \sigma_1 = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_1 H_c} \sigma_1 H_c = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{EA_1} F_1\tag{7.2}$$

Demnach hängt die Dehnung  $\varepsilon_1$  neben der äußeren Last nur von der Dehnsteifigkeit  $EA_1$  und den beiden Querdehnzahlen  $\nu_{12}$  und  $\nu_{21}$  ab. Die Angabe von  $F_1$  und  $EA_1$  bezieht sich hierbei auf den laufenden Meter in  $x_2$ -Richtung. Die Kraft-Dehnungs-Beziehung unterscheidet sich gegenüber der einaxialen Formulierung lediglich um den Term der beiden Querdehnzahlen.

#### 7.1.1.2 Exemplarische Verformungsberechnung für das Scheibenmodell

Wie in Kapitel 4.4 beschrieben weisen die äquivalenten Materialkennwerte wegen des Füllmaterials eine Abhängigkeit von den Randbedingungen auf. Im Grundzustand Ia spiegelt sich diese in einer Abhängigkeit von der Verschiebung quer zur Belastungsrichtung wider. Da im EVZ jedoch keine Verschiebungen quer zur Belastungsrichtung auftreten können, resultiert der Widerstand des Verbundmaterials gegen die Linienlast  $F_1$  bei vorliegender Problemstellung ausschließlich aus der Zellstruktur. Demzufolge besitzt das Füllmaterial keinen Einfluss und die äquivalenten Materialkennwerte ergeben sich aus den Bestimmungsgleichungen der Zellstruktur ohne Füllmaterial (vgl. Grenzwertbetrachtung  $c_f \rightarrow 0$  in Kapitel 4.2.7.2). Der äquivalente Zugmodul  $E_{1,t}^*$  sowie die äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$  lassen sich aus Gleichung (4.36), (4.40) und (4.42) berechnen. Das Reziproktheorems kann entsprechend den in Kapitel 5.2 definierten Sonderfällen und den in Kapitel 5.3.2.1 beschriebenen Ergebnissen

der Plausibilitätsprüfung in sehr guter Näherung als erfüllt betrachtet werden. Zur weiteren Veranschaulichung wird eine Beispielberechnung mit den in Tabelle 7.1 angegebenen Eingangsgrößen durchgeführt.

**Tab. 7.1:** Kennwerte für das Berechnungsbeispiel des Scheibenmodells im EVZ

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,351 m	0,224 m	0,025 m	0,1682 m	0,0017 m	41,75°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke						
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$EI_{cw}$	$GA_{cw}$			
150 MN/m <sup>2</sup>	51 kN	1,228E-5 kNm <sup>2</sup>	21,25 kN			
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> der Zellstruktur im Zugbereich (Grundzustand Ia und IIa)						
$E_{1,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$	$EA_{1,t}^*$			
0,5470 kN/m <sup>2</sup>	1,755	0,5694	0,1094 kN/m			
Materialkennwerte des Füllmaterials						
$E_f$	$\nu_f$	$c'$	$\varphi'$	$\Psi'$	$\sigma'_t$	
30 MN/m <sup>2</sup>	0	300 kN/m <sup>2</sup>	30°	0°	0 kN/m <sup>2</sup>	

Gemäß Kapitel 5.4.2.1 ist die Anwendungsgrenze zum Querdehnungseinfluss des Füllmaterials für die hier gewählte Zellgeometrie eingehalten. Aufgrund der Betrachtung im ESZ in  $x_3$ -Richtung besitzt diese keinen weiteren Einfluss, weshalb von einer Querdehnzahl des Füllmaterials von  $\nu_f = 0$  ausgegangen wird. Aus den in der Tabelle dargestellten Zahlenwerte wird ersichtlich, dass sich infolge der geringen Biegesteifigkeit  $EI_{cw}$  der Zellwände nur ein geringer äquivalenter Zugmodul  $E_{1,t}^*$  von 0,547 kN/m<sup>2</sup> ergibt. Dementgegen lassen sich für die beiden äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$  hohe Werte von ca. 1,76 und 0,57 ermitteln. Die äquivalente Dehnsteifigkeit fällt durch den weiteren Bezug auf eine Zellhöhe von  $H_c = 0,2$  m mit  $EA_{1,t}^* = 0,1094$  kN/m nochmals geringer aus.

Mit den so berechneten äquivalenten Materialkennwerten lässt sich für eine exemplarische Linienlast von  $F_1 = 4$  kN/m aus Gleichung (7.2) die Dehnung  $\varepsilon_1$  des Verbundmaterial bestimmen zu

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - 1,755 \cdot 0,5694)}{0,1094} 4 = \frac{(1 - 0,9995)}{0,1094} 4 = 1,7626 \% . \quad (7.3)$$

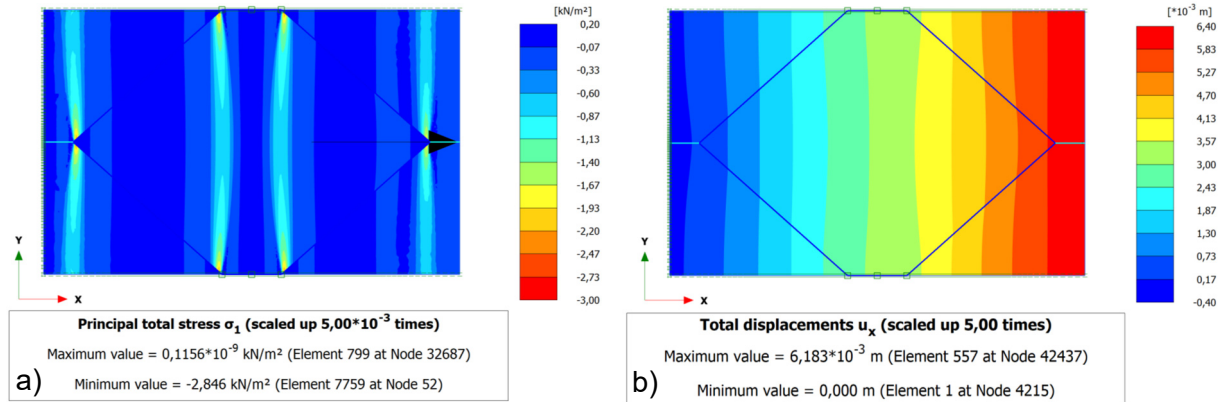
Hervorzuheben ist hierbei, dass sich infolge des großen Querdehnungseinflusses trotz der geringen Dehnsteifigkeit nur eine Dehnung von ca. 1,76 % ergibt. Zu Vergleichszwecken ist in Abbildung 7.2 die aus einer FE-Berechnung berechnete maximale Hauptspannungsverteilung  $\sigma_1$  und Verschiebungsverteilung  $u_1$  bzw.  $u_x$  an einem Modell des diskreten Verbundmaterials dargestellt. Alle Randbedingungen und Eingangsgrößen entsprechen der Darstellung von Abbildung 7.1 und den Angaben in Tabelle 7.1. Gemäß Kapitel 4.2.1 beträgt die Zellhöhe  $H_c$  in der Modellierung, aufgrund der Simulation im EVZ, jedoch 1 m anstelle von 0,2 m. Der EVZ in  $x_3$ - bzw.  $z$ -Richtung für die Modellierung ist dabei nicht mit dem EVZ in  $x_2$ -Richtung bei der

hier betrachteten Problemstellung zu verwechseln, sondern ergibt sich aus den Programmvorgaben. Für eine Vergleichbarkeit der Belastungen  $F_1$  in der analytischen Lösung und der FE-Berechnung ist der Zusammenhang entsprechend Gleichung (7.4) zu berücksichtigen.

$$\frac{F_1^{Analytik}}{H_c} = \bar{\sigma}_1 = \frac{F_1^{FEM}}{W_c} \Leftrightarrow F_1^{FEM} = \frac{F_1^{Analytik} W_c}{H_c} = 4,48 \text{ kN/m} \quad (7.4)$$

In der Gleichung sind die abweichenden Bezüge der beiden Linienlasten für die Angabe pro laufenden Meter zu beachten. Die äquivalente Kraft in den FE-Berechnungen beträgt folglich  $F_1^{FEM} = 4,48 \text{ kN/m}$ , wobei die Kraft wegen der nicht vorhandenen Zugfestigkeit des Füllmaterials in der Simulation nur an der Zellwand angreift.

Aus Abbildung 7.2a wird ersichtlich, dass sich in den Eckbereichen der Zellwände Spannungskonzentrationen ausbilden. Diese resultieren aus dem bereits in Kapitel 4 beschriebenen lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit der Zellwände in den Eckbereichen. Der Maximalwert fällt dabei mit etwa  $-3 \text{ kN/m}^2$  vernachlässigbar gering aus und tritt nur lokal auf, wodurch der nicht vorhandene Einfluss des Füllmaterials quer zur Belastungsrichtung bei vorliegender Problemstellung im EVZ bestätigt wird. Weiterhin zeigt sich aus Abbildung 7.2b eine nahezu lineare Verschiebungsverteilung  $u_x$ , welche in Übereinstimmung mit den in Kapitel 4.2 festgestellten homogenen Dehnungsverteilung ist. Die maximale Verschiebung tritt am freien rechten Rand mit  $6,183 \text{ mm}$  auf.



**Abb. 7.2:** Ergebnisse der FE-Berechnung im EVZ bei Zellenanordnung in  $L_c$ -Richtung anhand a) der maximalen Hauptspannungsverteilung und b) der Verschiebungsverteilung  $u_x$

Ein Bezug der nach Gleichung (7.3) ermittelten Dehnung  $\varepsilon_1$  des homogenen Verbundmaterials auf die in der FE-Berechnung abgebildete Zellenlänge von  $s_1 = L_c = 0,351 \text{ m}$  liefert

$$u_1^{Analytik} = \varepsilon_1^{Analytik} s_1 = 0,017626 \cdot 0,351 = 6,187 \text{ mm} \approx 6,183 \text{ mm} = u_1^{FEM}. \quad (7.5)$$

Demzufolge ergibt sich aus der homogenen Betrachtung über die analytische Lösung nahezu exakt der gleiche Werte für die Verschiebung wie aus der FE-Berechnung.

Die vorliegenden Problemstellung kann wegen der Bedingung einer Dehnung von  $\varepsilon_2 = 0$  für den EVZ alternativ zu der vorstehenden Berechnung mit den äquivalenten Materialkennwerten der unbefüllten Zellstruktur auch über die der befüllten Zellstruktur analytisch gelöst werden.

Die Bedingung von  $\varepsilon_2 = 0$  ist gleichbedeutend mit einer unendlichen Steifigkeit  $E_f$  des Füllmaterials in  $x_2$ -Richtung, womit sich die maßgebenden Bestimmungsgleichungen des äquivalenten Zugmoduls  $E_{1,t}^*$  und der äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$  durch eine Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  aus den vereinfachten Bestimmungsgleichungen der befüllten Zellstruktur gemäß Tabelle 4.4 und 4.5 ableiten lassen. Die Lösung der vorliegenden Problemstellung über diesen Ansatz liefert nahezu exakt die gleiche Verschiebung  $u_1$  wie der nach Gleichung (7.5) ermittelte Wert. Eine Beschreibung des alternativen Lösungswegs über die befüllte Zellstruktur mit  $E_f \rightarrow \infty$  kann Anhang J.1 entnommen werden.

### 7.1.1.3 Exemplarische Ermittlung der Zellwandbeanspruchung für das Scheibenmodell

Infolge der äußeren Linienlast  $F_1$  wirkt in der homogenen Scheibe eine konstante Normalkraft von  $\bar{n}_{11} = 4,0 \text{ kN/m}$  in Belastungsrichtung. Gemäß Gleichung (4.45) tritt für sehr schlanke Zellwände die maximale Zellwandbeanspruchung  $F_{t,k}$  in der geneigten Zellwand als Zugkraft auf. Zur Ermittlung dieser charakteristischen Beanspruchung ist die Normalkraft  $\bar{n}_{11}$  auf den Einzugsbereich der geneigten Zellwand zu beziehen. Hierbei entspricht der Einzugsbereich der auf die  $x_2$ -Achse projizierten Länge der geneigten Wand, also die halbe Zellbreite  $W_c/2$ . Für die betrachtete Beispielberechnung ergibt sich hieraus eine resultierende Normalkraft von  $N_{1,cw} = 0,448 \text{ kN}$ . Die Normalkraft  $N_{1,cw}$  stellt die Kraftkomponente der Zellwandbeanspruchung  $F_{t,k}$  in  $x_1$ -Richtung dar. Unter Berücksichtigung des trigonometrischen Zusammenhangs nach Gleichung (4.45) lässt sich die charakteristische Zugbeanspruchung der geneigten Zellwand für die Beispielberechnung wie folgt berechnen.

$$F_{t,k} = \frac{\bar{n}_{11}}{\cos\theta} \frac{W_c}{2} = \frac{N_{1,cw}}{\cos\theta} = \frac{0,448 \text{ kN}}{\cos 41,75^\circ} = 0,60 \text{ kN} \quad (7.6)$$

Die ergänzend für den Nachweis der Schälfestigkeit der Verbindungsstelle notwendige charakteristische Beanspruchung entspricht der Kraftkomponente von  $F_{t,k}$  in  $x_2$ -Richtung und beträgt

$$F_{s,k} = F_{t,k} \sin\theta = N_{1,cw} \tan\theta = 0,40 \text{ kN} . \quad (7.7)$$

Im Rahmen einer Nachweisführung ist nun nachzuweisen, dass die Bemessungswerte der Beanspruchung geringer sind als die Bemessungswerte der Materialfestigkeiten laut Herstellerangaben. Aufgrund der hier fiktiv gewählten Problemstellung wird auf eine explizite Nachweisführung verzichtet.

Die Vorgehensweise zur Betrachtung des Verbundmaterials über das mechanische Modell einer homogenen Scheibe mit einer Anordnung der Zellbreite in Belastungsrichtung entspricht dem zuvor beschriebenen Vorgehen. Hierzu sind lediglich in Abbildung 7.1 und in Gleichung (7.2) die Indizes zu ersetzen sowie für die Ermittlung der charakteristischen Beanspruchungen die abweichenden trigonometrischen Zusammenhänge im Grundzustand IIa zur berücksichtigen (s. Anhang B.9). Auch hier liefert die Betrachtung für eine unbefüllte Zellstruktur und eine sehr schlanke Zellstruktur mit unendlich steifem Füllmaterial  $E_f$  nahezu identische Ergebnisse. Für

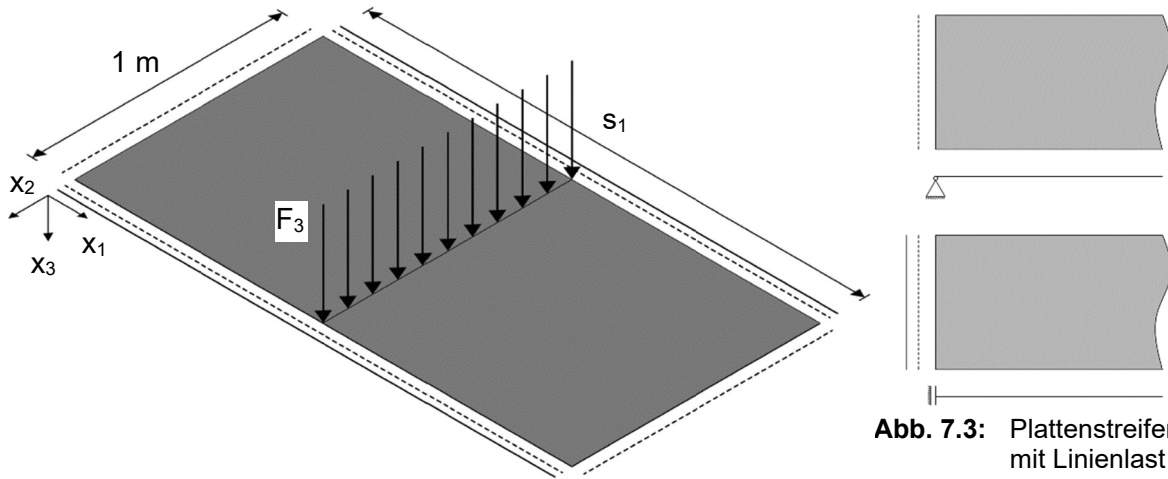
die Beispielberechnung überschätzt die analytisch Lösung die numerisch ermittelte Verschiebung um etwa 3,6 %. Die geringfügig größere Verschiebung resultiert aus den bereits in Kapitel 5.3.2.3 beschriebenen lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit und der damit verbundenen Spannungskonzentration in den FE-Berechnungen. Eine detaillierte Beschreibung des Lösungswegs und die Ergebnisse der FE-Berechnung können Anhang J.2 entnommen werden.

## 7.1.2 Modell des Plattenstreifens

### 7.1.2.1 Problembeschreibung für den Plattenstreifen

Im Gegensatz zu der vorherigen Belastung in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene und der damit einhergehenden Betrachtung als Scheibe wirkt nunmehr die Belastung normal zur Bewehrungsebene in  $x_3$ -Richtung. Durch die in Kapitel 2.5.1 nachgewiesene und aus der Zellhöhe  $H_c$  folgende Plattenwirkung wird von einer Abbildbarkeit des homogenen Verbundmaterials über das mechanische Modell einer Platte ausgegangen. Bei den gängigen Plattentheorien wird üblicherweise die Spannung  $\sigma_3$  nicht berücksichtigt, sodass  $\sigma_3 \approx 0$  gilt. Weiterhin werden in dieser Arbeit keine äquivalenten Materialkennwerte für die beiden Schubmodule  $G^*_{13}$  und  $G^*_{23}$  in  $x_3$ -Richtung abgeleitet. Aus diesem Grund wird für nachfolgende Berechnungen vereinfacht von einer sehr hohen Schubsteifigkeit in  $x_3$ -Richtung mit Schubmodulen von  $G^*_{13}$  und  $G^*_{23} \rightarrow \infty$  ausgegangen und das schubstarre Plattenmodell, auch Kirchhoff'sche Plattenmodell genannt, verwendet. Die Querkkräfte  $Q_{13}$  oder  $Q_{23}$  führen somit zu keiner zusätzlichen Durchbiegung infolge Schub. Eine Beschreibung der Herleitung der schubstarren Plattentheorie sowie zugehörige Richtwerte zu den Anwendungsgrenzen und Einschränkungen können Altenbach et al. (2016) entnommen werden.

Entsprechend den Betrachtungen in Kapitel 7.1.1 wird von einem Linienbauwerk und damit dem EVZ in  $x_2$ -Richtung ausgegangen. Vergleichbare Randbedingungen können beispielsweise bei der ebenen Bemessung von oberflächennahen bewehrten Tragschichten im Verkehrswegebau wiedergefunden werden (s. Abb. 2.2a). Bedingt durch den EVZ gilt wie zuvor für die Dehnung in  $x_2$ -Richtung die Bedingung  $\varepsilon_2 = 0$  und die Durchbiegung hängt nur von der  $x_1$ -Koordinate ab, womit eine einachsige Biegung der geozellenbewehrten Schicht um die  $x_2$ -Achse und damit eine zylindrische Biegefläche vorliegt. Gleitungen  $\gamma_{12}$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene treten demnach nicht auf und der Schubmodul  $G^*_{12}$  ist unerheblich. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich das Plattenmodell zu dem mechanischen Modell des Plattenstreifens. Die Durchbiegung kann dann mit der Balkentheorie berechnet werden, wobei die Biegesteifigkeit  $EI$  auf eine Balkenbreite von 1 m zu beziehen ist und der Einfluss aus der Querdehnung berücksichtigt werden muss (Altenbach et al. 2016). Das eindimensionale Gegenstück zu der schubstarren Plattentheorie stellt die schubstarre Balkentheorie, auch als Euler-Bernoulli-Balken bezeichnet, dar. Eine schematische Darstellung der nachfolgend betrachteten Problemstellung zeigt Abbildung 7.3.



**Abb. 7.3:** Plattenstreifen mit Linienlast

Der Plattenstreifen wird exemplarisch mit einer Linienlast  $F_3$  bei  $x_1 = s_1/2$  belastet. Die  $L_c$ -Richtung des Zellsystems wird in  $x_1$ -Richtung angeordnet. Durch die unendliche Plattenausdehnung in  $x_2$ -Richtung bezieht sich der Streifenausschnitt auf eine Breite von 1 m in  $x_2$ -Richtung. Die gewählten Auflagerbedingungen werden durch die Linien um die Platte abgebildet. Eine Definition dieser lässt sich ebenfalls der Abbildungen entnehmen. Folglich ist der Plattenstreifen an den Rändern parallel zur  $x_2$ -Richtung gelenkig mit zweiwertigen Auflagern gelagert. Zur Abbildung als Plattenstreifen werden an den Rändern parallel zur  $x_1$ -Richtung Parallelführung angeordnet. Da der vorliegende Schwerpunkt in der Veranschaulichung der Anwendung der äquivalenten Materialkennwerte liegt, wird auf die Abbildung des Untergrundes und eine Berücksichtigung des Eigengewichts verzichtet. Das Eigengewicht lässt sich zum Beispiel durch den zusätzlichen Ansatz einer konstanten Flächenlast  $q_0$  berücksichtigen. Hingegen kann der Untergrund beispielsweise über den Ansatz einer Federbettung mit dem Bettungsmodul  $k$  berücksichtigt werden. Das nachstehend beschriebene Vorgehen bleibt hierdurch unverändert, es ändert sich lediglich die Gleichung zur Berechnung der Plattendurchbiegung  $w$ .

Die maximale Durchbiegung eines rechteckigen schubstarren Balkens mit einer mittig angeordneten Linienlast und gelenkiger Lagerung kann elementaren Lösungen zur Balkentheorie entnommen werden. Für die hier gewählten Definitionen lautet diese in allgemeiner Form

$$w_{B,max} \left( x_1 = \frac{s_1}{2} \right) = \frac{F_3 s_1^3}{48 E I_1} \quad (7.8)$$

mit: Biegesteifigkeit bei rechteckigem Balkenquerschnitt  $E I_1 = E_1 H^3 s_2 / 12$   
Balken- oder Plattenhöhe  $H$

Bezogen auf einen Plattenstreifen ist die Biegesteifigkeit  $E I_1$  um den Einfluss der Querdehnung zu erweitern (Altenbach et al. 2016), womit sich die maximale Durchbiegung eines orthotropen Plattenstreifen wie folgt berechnen lässt.

$$w_{PB,max} \left( x_1 = \frac{s_1}{2} \right) = \frac{F_3 s_1^3}{48 D_{11}} = \frac{F_3 s_1^3}{48} \frac{12}{E_{11} H^3} = \frac{F_3 s_1^3 (1 - \nu_{12} \nu_{21})}{4 E_1 H^3} \quad (7.9)$$

mit: Ersatzsteifigkeit  $E_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12} \nu_{21})$   
Plattenbiegesteifigkeit  $D_{11} = E_{11} H^3 / 12$

Wie bereits bei der Betrachtung als Scheibe fließen somit nur die Querdehnzahlen  $v_{12}$  und  $v_{21}$  sowie der Zugmodul  $E_1$  in die Berechnung der Durchbiegung ein. Im Fall eines isotropen Plattenstreifens nimmt die um die Querdehnung erweiterte Ersatzsteifigkeit  $E_{11}$  den Ausdruck nach Gleichung (4.85) an.

### 7.1.2.2 Bestimmung der äquivalenten Plattenbiegesteifigkeit

Eine direkte Anwendbarkeit der äquivalenten Materialkennwerte des Verbundmaterials Geozelle-Boden auf Gleichung (7.9) ist mangels einer Differenzierung des abweichenden Materialverhaltens bei Druck- und Zugbeanspruchung nicht möglich. Aus diesem Grund sind weitergehende Betrachtungen zur Bestimmung einer äquivalenten Plattenbiegesteifigkeit  $D_{11}^*$  (kurz: Plattensteifigkeit) des Verbundmaterials notwendig.

Infolge der zylindrischen Biegefläche bei der betrachteten Problemstellung treten an der Unterseite ausschließlich Zugspannungen und an der Oberseite ausschließlich Druckspannungen auf. Ein möglicher Homogenisierungsansatz von Yao & Ye (2004) für diesen Fall wurde bereits in Kapitel 2.4.2.2 vorgestellt. Der Ansatz bezieht sich jedoch auf einen Balken, weshalb ein weitergehende Übertragung auf den orthotropen Plattenstreifen erforderlich ist. Unter Berücksichtigung einer Spannung von  $\sigma_3 = 0$  in  $x_3$ -Richtung für die Plattentheorie und einer Dehnung von  $\varepsilon_2 = 0$  für den hier betrachteten Plattenstreifen im EVZ kann ausgehend von der schubstarren Plattentheorie Anhang J.3 die Herleitung der Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  entnommen werden. Die hieraus folgende Gleichung für die Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  lautet in allgemeiner Form

$$E_{11}^* = \frac{E_{1,B}^*}{1 - v_{12,B}^* v_{21,B}^*} = \frac{4 \frac{E_{1,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}} \frac{E_{1,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}}{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}} \right)^2} . \quad (7.10)$$

Da sich die Plattensteifigkeit  $D_{11}$  nach Gleichung (7.9) direkt aus der Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  über

$$D_{11} = \frac{E_{11}^* H}{12} \quad (7.11)$$

ermitteln lässt, ist eine explizite Bestimmung der äquivalenten Kennwerte  $E_{1,B}^*$ ,  $v_{12,B}^*$  und  $v_{21,B}^*$  in Gleichung (7.10) nicht notwendig. Werden in Gleichung (7.10) die Querdehnzahlen zu Null gesetzt, nimmt diese die Form von Gleichung (2.6) für den homogenisierten Biegemodul  $E_B^*$  des schubstarren Balkens an.

### 7.1.2.3 Exemplarische Berechnung der Durchbiegung für den Plattenstreifen

Zum Übertrag des Verbundmaterials Geozelle-Boden auf den Plattenstreifen sind nun vorab die äquivalenten Materialkennwerte nach Kapitel 4 bei Druck- und Zugbeanspruchung zu bestimmen. Die verschiedenen Eingangsgrößen zur Geometrie der Geozellen sowie den Materialeigenschaften des Zellwand- und Füllmaterials können Tabelle 7.2 für ein Zahlenbeispiel entnommen werden.



**Tab. 7.2:** Kennwerte für das Berechnungsbeispiel des Plattenstreifens im EVZ

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,20 m	0,135 m	0,0025 m	0,1165 m	0,0017 m	35,39°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke				Materialkennwerte des Füllmaterials		
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$El_{cw}$	$GA_{cw}$	$E_f$	$\nu_f$	
550 MN/m <sup>2</sup>	187 kN	4,50E-5 kNm <sup>2</sup>	77,92 kN	95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> der Zellstruktur im Zugbereich (Grundzustand Ia und IIa)						
$E_{1,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$				
7,532 kN/m <sup>2</sup>	2,0837	0,4795				
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> dem Füllmaterial im Druckbereich (Grundzustand Ib und IIb)						
$E_{1,c}^*$	$\nu_{12,c}^*$	$\nu_{21,c}^*$				
95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	0,2				

Für die betrachtete Problemstellung beträgt das Steifigkeitsverhältnis des Füllmaterials zum Zellwandmaterial  $E_f/E_{cw} = 0,172$ . Gemäß der in Kapitel 6.6 definierten Gültigkeitsgrenze mit  $E_f/E_{cw} = 0,172 > 0,05$  können somit die vereinfachten Bestimmungsgleichungen zur Ermittlung der äquivalenten Materialkennwerte herangezogen werden. Weiterhin werden sowohl für den Zugbereich als auch den Druckbereich des Verbundverhaltens die in Kapitel 4.5.1 und Anhang D.4 abgeleiteten Anwendungsgrenzen der analytischen Lösung im ESZ entsprechend Gleichung (7.12) eingehalten.

$$\nu_f = 0,2 < \underbrace{0,492 = \frac{l \sin \theta \tan \theta}{h + l \cos \theta}}_{\text{GrZ IIb}} < \underbrace{0,505 = \tan^2 \theta}_{\text{GrZ Ia}} < 1,408 = \underbrace{\frac{1}{\tan^2 \theta}}_{\text{GrZ Ib \& IIa}} \quad (7.12)$$

Wird auf der sicheren Seite liegend die Abtragung von Druckkräften durch die sehr schlanken Zellwände vernachlässigt, stimmen wie in Kapitel 6.6 beschrieben die beiden äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,c}^*$  und  $\nu_{21,c}^*$  mit der Querdehnzahl  $\nu_f$  des Füllmaterials überein und es gilt  $\nu_{12,c}^* = \nu_{21,c}^* = \nu_f$ . Dementsprechend weist das Verbundmaterial im Druckbereich eine Richtungsunabhängigkeit auf und das Reziproktheorem nach Gleichung (3.3) ist erfüllt.

Wie bereits bei der Betrachtung des Scheibenmodells besitzt das Füllmaterial aufgrund des EVZ im Zugbereich keinen Einfluss, womit sich die äquivalenten Materialkennwerte aus der unbefüllten Zellstruktur ergeben. Der äquivalente Zugmodul  $E_{1,t}^*$  sowie die äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$  werden wie bereits in Kapitel 7.1.1.2 mit den Gleichungen (4.36), (4.40) und (4.42) berechnet und das Reziproktheorem kann in sehr guter Näherung auch hier als erfüllt betrachtet werden. Die so ermittelten Werte der äquivalenten Materialkennwerte sind in Tabelle 7.2 angegeben.

Durch Einsetzen der verschiedenen äquivalenten Materialkennwerte in Gleichung (7.10) lässt sich die um die Querdehnung erweiterte äquivalente Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  des Verbundmaterials Geozelle-Boden entsprechend Gleichung (7.13) ermitteln.

$$E_{11}^* = \frac{4 \frac{E_{1,c}^*}{(1 - \nu_{12,c}^* \nu_{21,c}^*)} \frac{E_{1,t}^*}{(1 - \nu_{12,t}^* \nu_{21,t}^*)}}{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}^*}{(1 - \nu_{12,c}^* \nu_{21,c}^*)}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}^*}{(1 - \nu_{12,t}^* \nu_{21,t}^*)}} \right)^2} = 18.792,29 \text{ kN/m}^2 \quad (7.13)$$

Unter Berücksichtigung der Definition nach Gleichung (7.11) ergibt sich aus der äquivalenten Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  für die äquivalente Plattensteifigkeit  $D_{11}^*$  folgender Wert.

$$D_{11}^* = E_{11}^* \frac{H_c^3}{12} = 12,53 \text{ kNm} \quad (7.14)$$

Mit der Plattensteifigkeit  $D_{11}^*$  lässt sich beispielsweise für eine Linienlast von  $F_3 = 3 \text{ kN/m}$  und eine Plattenlänge von  $s_1 = 2,0 \text{ m}$  die maximale Durchbiegung  $w_{PB,max}$  in der Mitte des Plattenstreifens an der Stelle  $x_1 = 1,0 \text{ m}$  aus Gleichung (7.9) berechnen zu

$$w_{PB,max} = \frac{F_3 s_1^3}{48 D_{11}^*} = \frac{3 \cdot 2^3}{48 \cdot 12,53} = 3,9910 \text{ cm} . \quad (7.15)$$

Wie bereits bei der Betrachtung der Scheibe in Kapitel 7.1.1.2 können die äquivalenten Materialkennwerte für den Zugbereich alternativ über die zusätzliche Grenzwertbetrachtung eines unendlich steifen Füllmaterials mit  $E_f \rightarrow \infty$  aus den vereinfachten Bestimmungsgleichungen für das befüllte Zellensystem gemäß Tabelle 4.4 und 4.5 abgeleitet werden. Die äquivalenten Materialkennwerte im Druckbereich bleiben unverändert. Der alternative Ansatz liefert erneut nahezu exakt den gleichen Wert für die Durchbiegung wie der vorstehende Ansatz über die unbefüllte Zellstruktur. Eine Beschreibung des Lösungswegs kann Anhang J.4 entnommen werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die hier gewählten Zahlenwerte die von Altenbach et al. (2016) empfohlenen Richtwerte des Schubstarren Plattenmodells mit  $w_{PB,max}/H_c < 0,2$  und  $H_c/s_1 < 0,1$  erfüllen. Der Einfluss aus einer geometrischen Nichtlinearität, bspw. Membranwirkung, sowie von Schubverformungen auf die Durchbiegung ist demnach für das gewählte Berechnungsbeispiel vernachlässigbar.

#### 7.1.2.4 Exemplarische Ermittlung der Zellwandbeanspruchung für den Plattenstreifen

Die maximale Beanspruchung des Verbundmaterials tritt im Bereich des maximalen Biegemomentes  $m_{11,max}$  auf. Für das Berechnungsbeispiel tritt dieses direkt unterhalb der Linienlast bei  $x_1 = s_1/2$  auf und kann entsprechend Gleichung (7.16) angegeben werden.

$$m_{11,max} = \frac{F_3 s_1}{4} = 1,5 \text{ kNm/m} \quad (7.16)$$

Wie in Kapitel 2.4.2.2 erläutert wurde, weist die Normalspannungsverteilung über die Plattenhöhe jeweils einen linearen Verlauf im Druck- und Zugbereich mit einem Nulldurchgang in der neutralen Faser auf (s. Abb. 2.18). Infolge abweichender Ersatzsteifigkeiten  $E_{11,c}^* \neq E_{11,t}^*$  ist die Normalspannungsverteilung jedoch nur bereichsweise linear und in der neutralen Ebene liegt

ein Knick im Verlauf vor. Die Gleichungen zur Normalspannungsverteilung ergeben sich im Rahmen der Herleitung der äquivalenten Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  und lassen sich gemäß Gleichung (7.17) für den Druck- und Zugbereich in allgemeiner Form angeben (vgl. Anhang J.3).

$$\begin{aligned}\sigma_{1,c}(x_3) &= \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \frac{3m_{11}^0}{H_c^3} x_3 \\ \sigma_{1,t}(x_3) &= \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} \frac{3m_{11}^0}{H_c^3} x_3\end{aligned}\quad (7.17)$$

Durch die lineare Normalspannungsverteilung tritt an der Plattenoberseite der Extremwert der Druckbeanspruchung des Füllmaterials und an der Unterseite der Extremwert der Zugbeanspruchung der Zellwände auf. Zur Ermittlung der beiden Extremwerte ist zusätzlich die Bestimmung der Höhen  $h_c$  und  $h_t$  des Druck- und Zugbereiches im Plattenquerschnitt erforderlich. Wie die Normalspannungsverteilungen ergeben sich die beiden Höhen im Rahmen der Herleitung und sind in allgemeiner Form wie folgt definiert.

$$\begin{aligned}h_t &= \frac{H_c \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}}}{\sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}} \\ h_c &= h_t - H_c = - \frac{H_c \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}}{\sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}}\end{aligned}\quad (7.18)$$

Infolge der abweichenden Ersatzsteifigkeiten im Druck- und Zugbereich sind die Höhen  $h_t$  und  $h_c$  einander nicht identisch, sondern weisen unterschiedliche Werte auf. Hierbei ist zu beachten, dass der Ursprung der  $x_3$ -Koordinate mit der Lage der neutralen Ebene übereinstimmt und positiv nach unten zeigt (s. Abb. 7.3), womit die Höhe  $h_c$  einen negativen und die Höhe  $h_t$  einen positiven Wert annimmt.

Unter Berücksichtigung der Zahlenwerte aus Tabelle 7.2 ergeben sich durch Einsetzen von Gleichung (7.16) und (7.18) in Gleichung (7.17) die Extremwerte der mittleren Druck- und Zugbeanspruchung des homogenen Verbundmaterials zu

$$\bar{\sigma}_{1,c,max}(x_3 = h_c) = -516,34 \text{ kN/m}^2 \quad \text{und} \quad \bar{\sigma}_{1,t,max}(x_3 = h_t) = 143,84 \text{ kN/m}^2. \quad (7.19)$$

Gegenüber der in Kapitel 7.1.1 beschriebenen Nachweisführung über Kräfte wird hier wegen der bereichsweise linearen Normalspannungsverteilungen stattdessen ein Spannungsnachweis geführt. Da das Füllmaterial durchgehend in  $x_2$ -Richtung vorliegt, ist eine weitere Umrechnung nicht notwendig und die charakteristische Beanspruchung  $\bar{\sigma}_{1,c,max}^*$  gemäß Gleichung (7.19) kann direkt für den Nachweis einer ausreichenden Materialfestigkeit des Füllmaterials herangezogen werden. Der Nachweis kann beispielsweise über das Festigkeitskriterium von Mohr-Coulomb in Verbindung mit der in  $x_3$ -Richtung wirkenden Einwirkung geführt werden. Je nach Größe der Einwirkung und der Beanspruchung  $\bar{\sigma}_{1,c,max}^*$  ist hierfür eine entsprechende Zuordnung als minimale oder maximale Hauptspannung notwendig. Auf eine weitergehende Beschreibung wird an dieser Stelle verzichtet.

Wie bereits bei der Betrachtung als Scheibe in Kapitel 7.1.1.3 tritt die maßgebende Zellwandbeanspruchung  $\sigma_{t,k}$  für den Zugbereich in der geneigten Zellwand auf. Zur Ermittlung der Zugbeanspruchung  $\sigma_{t,k}$  ist erneut die mittlere Spannung  $\bar{\sigma}_{1,t,max}^*$  zuerst auf den Einflussbereich der geneigten Zellwand durch die Multiplikation mit der auf die  $x_2$ -Achse projizierten Länge  $W_c/2$  zu beziehen. Durch die anschließende Division dieser Größe mit der Zellwanddicke  $t$  folgt die maximale Zugbeanspruchung  $\sigma_{1,cw,max}$  der Zellwand in  $x_1$ -Richtung. Über den trigonometrischen Zusammenhang nach Gleichung (4.45) lässt sich aus  $\sigma_{1,cw,max}$  die maßgebende Zugbeanspruchung  $\sigma_{t,k}$  an der Unterseite der geneigten Zellwand direkt unterhalb der Lasteinleitung wie folgt berechnen.

$$\sigma_{t,k} = \frac{\sigma_{1,cw,max}}{\cos\theta} = \frac{\bar{\sigma}_{1,t,max}^* W_c}{\cos\theta \cdot 2t} = \frac{143,84}{\cos 35,39^\circ} \cdot \frac{0,135}{2 \cdot 0,0017} = 7.006,24 \text{ kN/m}^2 \quad (7.20)$$

Die charakteristische Beanspruchung auf Abschälung folgt aus der Spannungskomponente der maßgebenden Zugbeanspruchung  $\sigma_{t,k}$  in  $x_2$ -Richtung und lässt sich entsprechend (7.21) bestimmen.

$$\sigma_{s,k} = \sigma_{t,k} \sin\theta = \sigma_{1,cw,max} \tan\theta = 4.058,06 \text{ kN/m}^2 \quad (7.21)$$

Die Nachweise zur Materialfestigkeit ergeben sich dann aus dem Vergleich der Bemessungswerte für die Beanspruchungen mit den vom Hersteller angegebenen Bemessungswerten zur Zug- und Schälfestigkeit (s. bspw. Tab. 2.2). Für konkrete Problemstellungen sind dann im Anschluss an die homogene Betrachtung als Platte die in Kapitel 2.4.3 angeführten diskreten Nachweise, wie z. B. Durchstanzen, zu führen.

Das Vorgehen und die Gleichungen zur Berechnung eines einachsig gespannten Plattenstreifens mit einer Anordnung der Geozellen in  $W_c$ -Richtung entspricht der hier vorgestellten Vorgehensweise. Es sind lediglich in Abbildung 7.3 und den jeweiligen Gleichungen die Richtungsindizes zu vertauschen. Weiterhin ist der äquivalente Zugmodul  $E_{1,t}^*$  durch  $E_{2,t}^*$  zu ersetzen. Weitergehende Anpassungen sind nicht erforderlich und der vorstehende Lösungsweg lässt sich direkt anwenden.

## 7.2 Zweidimensionale Betrachtung

### 7.2.1 Plattensteifigkeiten für die zweidimensionale schubstarre Plattentheorie

Unter Voraussetzung eines Linienbauwerks im EVZ können die Scheibe bzw. die Membran und der Plattenstreifen in Kapitel 7.1 ausschließlich als eindimensionale Problemstellungen betrachtet werden. Hierbei sind die maßgebenden äquivalenten Steifigkeiten lediglich um den Einfluss der Querdehnung zu erweitern und eine händische Berechnung ist verhältnismäßig einfach möglich. Dementgegen wird die Lösung bei einer zweidimensionalen Betrachtung als Platte mit veränderlichen Durchbiegungen in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung wesentlich aufwendiger und erfolgt üblicherweise mit numerischen Methoden zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen, wie z. B. Reihenansätzen oder der Finite-Elemente-Methode. Aus diesem Grund wird nachfolgend ausschließlich auf die Ermittlung der Plattensteifigkeiten  $D_{ij}$  für die Geozellenbewehrung eingegangen. Diese lassen sich dann als Eingangsgrößen für ein Berechnungsprogramm verwenden. Zur Verdeutlichung der relevanten Plattensteifigkeiten zeigt Gleichung (7.22) die partielle Differentialgleichung der Biegefläche  $w$  für die orthotrope schubstarre Plattentheorie. In vorliegender Form lässt sich diese Altenbach et al. (2016) entnehmen.

$$D_{11}w_{,1111} + 2D'_{12}w_{,1122} + D_{22}w_{,2222} = q \quad (7.22)$$

mit: Kreuzsteifigkeit  $D'_{12} = D_{12} + 2D_{44}$

Die partiellen Ableitungen der Durchbiegung nach der  $x_1$ - und  $x_2$ -Koordinate sind durch ein Komma gekennzeichnet, womit es sich bei der Plattengleichung um eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung handelt. Die Belastung  $q$  wirkt quer zur Plattenebene und ist beliebig wählbar. Unter Berücksichtigung der Definition der Kreuzsteifigkeit  $D'_{12}$  sind somit vier Plattensteifigkeiten  $D_{11}$ ,  $D_{22}$ ,  $D_{12}$  und  $D_{44}$  zu bestimmen. Gemäß Altenbach et al. (2016) sind diese in Abhängigkeit der Ersatzsteifigkeiten und der Querdehnzahlen in allgemeiner Form wie folgt definiert.

$$\begin{aligned} D_{11} &= E_{11} \frac{H_c^3}{12} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{H_c^3}{12}, \quad D_{22} = E_{22} \frac{H_c^3}{12} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{H_c^3}{12}, \\ D_{12} &= E_{12} \frac{H_c^3}{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{H_c^3}{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \frac{H_c^3}{12} = E_{21} \frac{H_c^3}{12}, \quad D_{44} = E_{44} \frac{H_c^3}{12} = G_{12} \frac{H_c^3}{12} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Wie bereits beim Plattenstreifen sind zur Ermittlung der äquivalenten Plattensteifigkeiten die äquivalenten Materialkennwerte des Verbundmaterials im Druck- und Zugbereich zu Ersatzsteifigkeiten  $E^*_{ij}$  zusammenzufassen. Eine Homogenisierung der äquivalenten Materialkennwerte des Zug- und Druckbereichs wie noch beim Plattenstreifen mittels Gleichung (7.10) ist jedoch nur bedingt möglich, da diese unter Voraussetzung einer Dehnung von  $\varepsilon_2 = 0$  in  $x_2$ -Richtung für den ebenen Verzerrungszustand hergeleitet wurde. Im zweidimensionalen Fall gilt hingegen für die Dehnung in  $x_2$ -Richtung  $\varepsilon_2 \neq 0$ , weshalb nachfolgend ein alternatives Verfahren zur Ableitung äquivalenter Plattensteifigkeiten  $D^*_{ij}$  beschrieben wird.

## 7.2.2 Klassische Laminattheorie

### 7.2.2.1 Beschreibung der klassischen Laminattheorie

Wird ähnlich zur zylindrischen Biegung für den Plattenstreifen für die zweidimensionale Platte eine parabolische Biegefläche vorausgesetzt, kann vereinfacht davon ausgegangen werden, dass über die vollständige Plattenfläche an der Oberseite ausschließlich Druckspannung und an der Unterseite ausschließlich Zugspannungen auftreten. Vergleichbar den Ausführungen in Kapitel 7.1.2.3 lässt sich bei Einhaltung der Gültigkeitsgrenzen der vereinfachten Lösung in diesem Fall die Plattenwirkung auf der sicheren Seite liegend nur auf den Widerstand aus dem Füllmaterial an der Oberseite und aus den Zellwänden an der Unterseite zurückführen. Dementsprechend kann das Verbundmaterial Geozelle-Boden als zweilagiges Laminat abgebildet werden, wobei die obere Schicht mit einer Dicke  $h_f = H_c/2$  dem Füllmaterial und die untere Schicht mit der Dicke  $h_{cw} = H_c/2$  der unbefüllten Zellstruktur entspricht. Durch diese Betrachtungsweise können die äquivalenten Ersatzsteifigkeiten  $E_{ij}$  für das schubstarre Plattenmodell über die klassische Laminattheorie berechnet werden. Gemäß Altenbach et al. (2016) lässt sich die klassische Laminattheorie unter Berücksichtigung der Dehnung  $\varepsilon_3$  jeder Einzelschicht sowie unter Annahme einer Spannung von  $\sigma_3 = 0$  in  $x_3$ -Richtung (Dickenrichtung) über das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz ableiten. Im Rahmen der Herleitung werden entsprechend Gleichung (7.24) die sogenannten reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  eingeführt.

$$Q_{ij} = E_{ij} - \frac{E_{i3}E_{j3}}{E_{33}}, \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 4 \quad (7.24)$$

Demnach wird die Dehnung  $\varepsilon_3$  in Dickenrichtung durch eine Korrektur der Ersatzsteifigkeiten  $E_{ij}$  mit den Ersatzsteifigkeiten  $E_{i3}$ ,  $E_{j3}$  und  $E_{33}$  berücksichtigt. Aufgrund des abweichenden Materialverhaltens der Einzelschichten tritt bei Laminaten mit unsymmetrischen Schichtaufbau im Allgemeinen eine Kopplung zwischen dem Scheiben- und Plattenzustand auf. Folglich ruft eine Plattenbeanspruchung eine Scheibenbeanspruchung und umgekehrt hervor. Eine getrennte Betrachtung beider Zustände ist dann nicht möglich (Altenbach et al. 2016).

Für nachfolgende Betrachtungen wird vereinfacht von einer gegebenen Entkopplung der beiden Zustände ausgegangen, sodass die Koppelsteifigkeiten einheitlich Null sind und sich der Scheiben- und Plattenzustand getrennt voneinander betrachten lassen. Da sich das Verbundmaterial Geozelle-Boden nur aus zwei Schichten zusammensetzt, wird weiterhin angenommen, dass der Einfluss aus der Dehnung  $\varepsilon_3$  vernachlässigbar gering ist. Auf eine Korrektur der aus Gleichung (7.24) folgenden reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  mit den Ersatzsteifigkeiten in  $x_3$ -Richtung wird deshalb vereinfacht verzichtet werden, womit die reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}$  mit den Ersatzsteifigkeiten  $E_{ij}$  übereinstimmen.

Die Zusammenfassung der Scheiben- und Plattensteifigkeiten der Einzelschichten  $k$  zu einer homogenen Schicht ergibt sich in der klassischen Laminattheorie aus einer Parallelschaltung dieser und lässt sich laut Altenbach et al. (2016) entsprechend Gleichung (7.25) ermitteln.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} H^{(k)} \quad \text{und} \quad D_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} \left( \bar{x}_3^{(k)^2} + \frac{H^{(k)^2}}{12} \right) H^{(k)} \quad (7.25)$$

mit: Höhe der Einzelschicht  $H^{(k)} = x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}, k = 1, 2, \dots, n$

Mittelpunkt der Einzelschicht  $\bar{x}_3^{(k)} = 1/2 (x_3^{(k)} + x_3^{(k-1)}), k = 1, 2, \dots, n$

Anzahl der Schichten im Laminat  $n$

Die Scheibensteifigkeiten werden hierbei mit  $A_{ij}$  bezeichnet. Folglich werden die reduzierten Steifigkeiten  $Q_{ij}^{(k)}$  der Einzelschichten  $k$  durch eine Wichtung über die Höhe der jeweiligen Schicht und deren Abstand zur geometrischen Mittelebene der Platte aufsummiert. Entgegen der in Kapitel 7.1.2 vorgestellten Lösung des Plattenstreifens entspricht hier die Ebene bei  $x_3 = 0$  nicht der neutralen Ebene der Normalspannungsverteilung im Plattenquerschnitt sondern der geometrischen Mittelebene. Für ein zweilagiges Laminat mit jeweils gleicher Höhe der beiden Einzelschichten von  $H_c/2$  sowie unter der zuvor beschriebenen Annahme von  $Q_{ij} = E_{ij}$  nimmt die Plattensteifigkeit  $D_{ij}$  somit folgende allgemeine Form an.

$$D_{ij} = E_{ij}^{(1)} \left( \left( \frac{H_c}{4} \right)^2 + \frac{H_c^2}{48} \right) \frac{H_c}{2} + E_{ij}^{(2)} \left( \left( \frac{H_c}{4} \right)^2 + \frac{H_c^2}{48} \right) \frac{H_c}{2} = (E_{ij}^{(1)} + E_{ij}^{(2)}) \frac{H_c^3}{24} \quad (7.26)$$

Die Plattensteifigkeiten  $D_{ij}$  ergeben sich folglich aus einer einfachen Mittelung der Ersatzsteifigkeiten  $E_{ij}$  der beiden Einzelschichten. Für eine weitergehende Beschreibung der klassischen Laminattheorie wird auf an dieser Stelle auf Altenbach et al. (2016) verwiesen.

### 7.2.2.2 Exemplarische Ermittlung der Plattensteifigkeiten für die schubstarre Platte

Zur Veranschaulichung werden nachstehend die äquivalenten Plattensteifigkeiten anhand des in Kapitel 7.1.2.3 beschriebenen Zahlenbeispiels ermittelt. Eine Übersicht zu den verschiedenen Eingangsgrößen sowie den hieraus bestimmten äquivalenten Materialkennwerten zeigt Tabelle 7.3.

**Tab. 7.3:** Kennwerte für das Berechnungsbeispiel der schubstarrten Platte im zweidimensionalen Fall

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,20 m	0,135 m	0,0025 m	0,1165 m	0,0017 m	35,39°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke				Materialkennwerte des Füllmaterials		
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$EI_{cw}$	$GA_{cw}$	$E_f$	$\nu_f$	
550 MN/m <sup>2</sup>	187 kN	4,50E-5 kNm <sup>2</sup>	77,92 kN	95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> der Zellstruktur im Zugbereich (Grundzustand Ia und IIa)						
$E_{1,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$E_{2,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$			
7,532 kN/m <sup>2</sup>	2,0837	1,733 kN/m <sup>2</sup>	0,4795			
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> dem Füllmaterial im Druckbereich (Grundzustand Ib und IIb) & Äquivalenter Schubmodul für das Verbundmaterial im Druck- und Zugbereich (Grundzustand III)						
$E_{1,c}^*$	$\nu_{12,c}^*$	$E_{2,c}^*$	$\nu_{21,c}^*$	$G_{12}^*$		
95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	4,025 MN/m <sup>2</sup>		

Aufgrund der zweidimensionalen Betrachtung ist nunmehr der vollständige Datensatz der äquivalenten Materialkennwerte für die unbefüllte Zellstruktur im Zugbereich und das Füllmaterial im Druckbereich sowohl in  $x_1$ - als auch in  $x_2$ -Richtung zu bestimmen. Die äquivalenten Materialkennwerte werden mit den in Kapitel 4.2.7.2 und 4.2.7.3 angegebenen vereinfachten Bestimmungsgleichungen ermittelt. Die Einhaltung des Gültigkeitsbereichs der vereinfachten Lösung sowie der Anwendungsgrenzen wurde bereits in Kapitel 7.1.2.3 nachgewiesen. Da entgegen der vorherigen Betrachtung im EVZ hier zusätzlich Gleitungen in der  $x_1$ -  $x_2$ -Ebene auftreten, ist die Angabe des äquivalenten Schubmoduls  $G^*_{12}$  erforderlich. Dieses wird mit der allgemeinen Näherungslösung über das Matlab-Skript berechnet (s. Anhang C.2).

Unter Berücksichtigung der in Gleichung (7.26) angegebenen Homogenisierung sowie der in Gleichung (7.23) definierten Ersatzsteifigkeiten  $E_{ij}$  lassen sich aus den äquivalenten Materialkennwerten abschließend die äquivalenten Plattensteifigkeiten  $D^*_{ij}$  berechnen. Das Vorgehen wird am Beispiel der Plattensteifigkeit  $D^*_{11}$  in Gleichung (7.27) verdeutlicht.

$$D^*_{11} = \left( E_{11}^{*(1)} + E_{11}^{*(2)} \right) \frac{H_c^3}{24} = \left( \frac{E_{1,c}^*}{1 - \nu_{12,c}^* \nu_{21,c}^*} + \frac{E_{1,t}^*}{1 - \nu_{12,t}^* \nu_{21,t}^*} \right) \frac{H_c^3}{24} \quad (7.27)$$

$$= \left( \frac{95.000}{1 - 0,2^2} + \frac{7.532}{1 - 2,0837 \cdot 0,4795} \right) \frac{0,2^3}{24} = 35,55 \text{ kNm}$$

In gleicher Weise ergeben sich aus Gleichung (7.26) auch die beiden Plattensteifigkeiten  $D^*_{12}$  und  $D^*_{22}$ . Eine Homogenisierung für die Plattensteifigkeit  $D^*_{44}$  ist nicht erforderlich, da sich diese direkt auf die Schubbelastung des Verbundmaterials bezieht und unabhängig von der Druck- und Zugbeanspruchung ist. Demzufolge kann  $D^*_{44}$  direkt aus Gleichung (7.23) durch Einsetzen des Schubmoduls  $G^*_{12}$  und der Zellhöhe  $H_c$  berechnen werden. Die so ermittelten äquivalenten Plattensteifigkeiten sind in Tabelle 7.4 zusammengefasst.

**Tab. 7.4:** Plattensteifigkeiten für das Berechnungsbeispiel mit klassischer Laminattheorie [kNm]

$D^*_{11}$	$D^*_{12}$ aus		$D^*_{22}$	$D^*_{44}$	$D^*_{12}$
	$E^*_{12}$	$E^*_{21}$			
35,55	7,825	7,825	33,58	2,684	13,19

Die gleichen Zahlenwerte für die Plattensteifigkeit  $D^*_{12}$  bei einer Ermittlung jeweils mit der Ersatzsteifigkeit  $E^*_{12}$  oder  $E^*_{21}$  bestätigen die Erfüllung des Reziproktheorems. Weiterhin wird ersichtlich, dass die Zahlenwerte der beiden Plattensteifigkeiten  $D^*_{11}$  und  $D^*_{22}$  eine vergleichbare Größenordnung aufweisen. Bedingt durch die einfache Mittelung nach Gleichung (7.26) bestimmt die Füllmaterialsteifigkeit  $E_f$  die äquivalenten Plattensteifigkeiten und die Zellstruktur besitzt nur einen untergeordneten Einfluss.

Die in Tabelle 7.4 angegebenen äquivalenten Plattensteifigkeiten können jetzt zur Lösung der partiellen Differentialgleichung für die orthotrope schubstarre Platten gemäß Gleichung (7.22) verwendet oder als Eingangsgrößen für Berechnungsprogramme herangezogen werden.



### 7.2.2.3 Exemplarische Ermittlung der Scheibensteifigkeiten für die schubstarre Platte

Tritt neben dem Plattenzustand zusätzlich noch ein Scheibenzustand auf, ist aufgrund der hier entkoppelten Betrachtung die zusätzliche Angabe der Scheibensteifigkeiten  $A_{ij}$  ausreichend. Bezogen auf eine Geozellenbewehrung kann damit eine mögliche Membranwirkung bei großen Verformungen durch geometrisch nichtlineare Effekte berücksichtigt werden. Da die Membranwirkung ausschließlich zu einer zusätzlichen Zugbeanspruchung in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene führt, wird entsprechend den Beschreibung in Kapitel 7.1.1 vereinfacht auch im zweidimensionalen Fall nur von der Wirkung der Zellstruktur ohne Füllmaterial ausgegangen. Demzufolge ergeben sich die Scheibensteifigkeiten  $A^*_{11}$ ,  $A^*_{12}$  und  $A^*_{22}$  aus den in Tabelle 7.3 angegebenen äquivalenten Materialkennwerten der unbefüllten Zellstruktur. Unter Berücksichtigung der in Gleichung (7.25) definierten Formulierung der homogenisierten Scheibensteifigkeiten ergibt eine exemplarische Berechnung der Scheibensteifigkeit  $A^*_{11}$  somit folgenden Wert.

$$A^*_{11} = \frac{E^*_{1,t}}{1 - \nu^*_{12,t} \nu^*_{21,t}} H_c = \frac{7,532}{1 - 2,0837 \cdot 0,4795} \cdot 0,2 = 1.536,07 \text{ kN/m} \quad (7.28)$$

Die weiteren Scheibensteifigkeiten lassen sich auf die gleiche Weise bestimmen. Eine Übersicht der ermittelten Zahlenwerte kann Tabelle 7.5 entnommen werden.

**Tab. 7.5:** Scheibensteifigkeiten für das Berechnungsbeispiel im zweidimensionalen Fall [kN/m]

$A^*_{11}$	$A^*_{12}$ aus		$A^*_{22}$	$A^*_{44}$
	$E^*_{12}$	$E^*_{21}$		
1.536,07	736,47	736,47	353,45	805,17

Wie bei dem Plattenzustand treten im zweidimensionalen Scheibenzustand Gleitungen  $\gamma_{12}$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene auf, sodass für eine vollständige Beschreibung des Materialverhaltens zusätzlich die Angabe der Scheibensteifigkeit  $A^*_{44}$  notwendig ist. Diese lässt sich direkt aus dem äquivalenten Schubmodul  $G^*_{12}$  und der Höhe  $H_c$  berechnen. Somit sind alle relevanten Steifigkeiten für die Betrachtung als Platte oder Scheibe bestimmt und können für weitere Berechnungen als Eingangsgrößen verwendet werden.

### 7.2.3 Vergleich der Plattensteifigkeiten

Ein Vergleich der nach Gleichung (7.14) ermittelten Plattensteifigkeit  $D^*_{11}$  mit der über die klassische Laminattheorie berechneten Plattensteifigkeit nach Gleichung (7.27) zeigt, dass sich verglichen zum Plattenstreifen im EVZ ein deutlich höherer Wert ergibt. Eigentlich ist, wegen der Dehnung  $\varepsilon_2 \neq 0$  in  $x_2$ -Richtung, im zweidimensionalen Fall eine geringere äquivalente Plattensteifigkeit  $D^*_{11}$  als im EVZ zu erwarten. Während bei der Herleitung von Gleichung (7.10) für die Ersatzsteifigkeit  $E^*_{11}$  des Plattenstreifens eine Lagenänderung der neutralen Ebene mit einbezogen wird, bleibt diese bei der klassischen Laminattheorie aufgrund der rein geometrischen Annahme einer Übereinstimmung der neutralen Ebene mit der Plattenmittelebene unberücksichtigt. Dementsprechend wird bei der klassischen Laminattheorie davon ausgegangen,

dass der Druckbereich mit  $h_c = H_c/2$  die gleiche Höhe im Plattenquerschnitt wie der Zugbereich  $h_t$  einnimmt. Eine Berechnung der beiden Höhen des Plattenstreifen nach Gleichung (7.18) liefert jedoch für das Berechnungsbeispiel folgende Werte.

$$h_c = -4,358 \text{ cm} \quad \text{und} \quad h_t = 15,64 \text{ cm} \quad (7.29)$$

Die Querschnittshöhe der Druckspannung weist somit in etwa nur ein Viertel der Zellhöhe  $H_c$  auf, sodass der Einfluss aus der hohen Füllmaterialsteifigkeit auf  $D_{11}^*$  wesentlich geringer ausfällt. Wird der Plattenstreifen alternative in  $W_c$ -Richtung aufgespannt und die in Kapitel 7.1.2.4 beschriebene Vertauschung der Indizes in den verschiedenen Gleichungen beachtet, so lässt sich für die Plattensteifigkeit  $D_{22}^*$  über die in Gleichung (7.10) definierte Ersatzsteifigkeit  $E_{22}^*$  und mit den Zahlenwerten aus Tabelle 7.3 folgender Wert ermitteln.

$$D_{22}^* = E_{22}^* \frac{H_c^3}{12} = 3,667 \text{ kNm} \quad (7.30)$$

Ein Vergleich des Zahlenwerts für  $D_{22}^*$  von Tabelle 7.4 zeigt, dass in diesem Fall die Unterschiede durch den geringeren Zugmodul  $E_{2,t}$  nochmals wesentlich höher ausfallen. Folglich besitzt die Lage der neutralen Ebene einen großen Einfluss auf die äquivalenten Plattensteifigkeiten. Hierbei scheint die in Kapitel 7.1.2.2 beschriebene Vorgehensweise mit einer Berücksichtigung der Lageänderung der neutralen Ebene den genaueren Ansatz darzustellen.

Wird der Fehler aus der Nichterfüllung der Bedingung von  $\varepsilon_2 = 0$  des EVZ vernachlässigt, lässt sich das Vorgehen des Plattenstreifens zur Berechnung der äquivalenten Plattensteifigkeiten vereinfacht auch auf den zweidimensionalen Fall anwenden. Entsprechend der in Gleichung (7.23) definierten Plattensteifigkeiten ist hierzu jedoch noch die Plattensteifigkeit  $D_{12}^*$  erforderlich. Aus der allgemeinen Definition der Ersatzsteifigkeiten  $E_{12}$  oder  $E_{21}$  und  $E_{11}$  oder  $E_{22}$  nach Gleichung (7.23) wird deutlich, dass die Ausdrücke für  $E_{12}$  oder  $E_{21}$  sich nur durch die zusätzliche Angabe der Querdehnzahlen von  $v_{12}$  oder  $v_{21}$  im Zähler unterscheiden. Zur Ableitung von Bestimmungsgleichung für die äquivalenten Ersatzsteifigkeiten  $E_{12}^*$  und  $E_{21}^*$  mit abweichendem Materialverhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung wird deshalb vereinfacht Gleichung (7.10) um die Querdehnzahlen  $v_{12,c}$  und  $v_{12,t}$  oder  $v_{21,c}$  und  $v_{21,t}$  im jeweiligen Zähler erweitert. Hierdurch ergeben sich die äquivalenten Ersatzsteifigkeiten  $E_{12}^*$  und  $E_{21}^*$  wie folgt.

$$E_{12}^* = \frac{4 \frac{v_{12,c} E_{2,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}} \frac{v_{12,t} E_{2,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}}{\left( \sqrt{\frac{v_{12,c} E_{2,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}}} + \sqrt{\frac{v_{12,t} E_{2,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}} \right)^2} \quad (7.31)$$

$$E_{21}^* = \frac{4 \frac{v_{21,c} E_{1,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}} \frac{v_{21,t} E_{1,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}}{\left( \sqrt{\frac{v_{21,c} E_{1,c}}{1 - v_{12,c} v_{21,c}}} + \sqrt{\frac{v_{21,t} E_{1,t}}{1 - v_{12,t} v_{21,t}}} \right)^2}$$

Durch Einsetzen der äquivalenten Kennwerte aus Tabelle 7.3 in Gleichung (7.31) sind somit alle äquivalenten Plattensteifigkeiten bekannt. Diese sind in Tabelle 7.6 zusammengefasst.

**Tab. 7.6:** Plattensteifigkeiten für das Berechnungsbeispiel mit Vorgehen zu Plattenstreifen [kNm]

$D^*_{11}$	$D^*_{12}$ aus		$D^*_{22}$	$D^*_{44}$	$D^*_{12}$
	$E^*_{12}$	$E^*_{21}$			
12,53	4,793	4,793	3,667	2,684	10,16

Die aus dem Schubmodul  $G^*_{12}$  folgende Plattensteifigkeit  $D^*_{44}$  bleibt unverändert. Die gleichen Zahlenwerte für die Plattensteifigkeit  $D^*_{12}$  verdeutlichen die Erfüllung des Reziproktheorems. Ein erneuter Vergleich mit den Plattensteifigkeiten  $D^*_{11}$  und  $D^*_{22}$  aus Tabelle 7.6 zeigt, dass durch die Beachtung der Lageänderung der neutralen Ebene die Platte eine Anisotropie in die  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung mit stark unterschiedlichen Werten für  $D^*_{11}$  und  $D^*_{22}$  aufweist. Hingegen besitzen die Zahlenwerte für  $D^*_{11}$  und  $D^*_{22}$  bei dem Ansatz über die klassische Laminattheorie gemäß Tabelle 7.4 eine vergleichbare Größenordnung mit einem nahezu richtungsunabhängigen Verhalten in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung.

Unter Berücksichtigung der in Kapitel 6.3.1 beobachteten Zusammenhänge bei der gegenseitigen Darstellung und den hier gewählten Eingangsgrößen der Beispielberechnung mit dem verhältnismäßig geringen Zellwinkel von ca.  $\theta = 35^\circ$  erscheint ein größeres Maß der Anisotropie deutlich realistischer. Demzufolge ist von einer genaueren Abbildbarkeit des Materialverhaltens durch den in diesem Kapitel beschriebenen Ansatz der Lagenänderung der neutralen Ebene auszugehen. Im Hinblick auf die maximale Plattendurchbiegung stellen die Tabelle 7.6 angegebenen Zahlenwerte einen auf der sicheren Seite liegenden Ansatz dar. Eine Anpassung der Scheibensteifigkeit  $A_{ij}$  gemäß Tabelle 7.5 ist nicht notwendig, sondern diese können unverändert übernommen werden. Die aus dem Scheibenzustand zusätzlich folgende Zellwandbeanspruchung lässt sich gemäß des in Kapitel 7.1.1.3 beschriebenen Vorgehens bestimmen. Zur Gewährleistung einer Superponierbarkeit des Platten- und Scheibenzustands ist die Zellwandbeanspruchung jedoch in Spannungen und nicht über Kräfte auszudrücken.

### 7.3 Ergebnisübersicht zur Anwendung auf Tragwerksmodelle

Vorstehende Ausführungen verdeutlichen die Anwendung der in Kapitel 4 abgeleiteten äquivalenten Materialkennwerte des Verbundmaterials Geozelle-Boden auf die mechanischen Tragwerksmodelle einer Scheibe und Platte. Wegen der Abhängigkeit von den Randbedingungen dürfen im EVZ für das homogene Scheibenmodell nur die äquivalenten Materialkennwerte der unbefüllten Zellstruktur herangezogen werden. Dies gilt auch für den Zugbereich bei der Betrachtung als homogener Plattenstreifen.

Aufgrund des abweichenden Verhaltens im Druck- und Zugbereich werden basierend auf den Eigenschaften des EVZ und der schubstarrten Plattentheorie Bestimmungsgleichungen für die äquivalenten Plattensteifigkeit  $D^*_{11}$  und  $D^*_{22}$  des homogenen Plattenstreifens hergeleitet. Der

Einfluss der abweichenden Materialkennwerte bei Druck und Zug auf die Lagenänderung der neutralen Ebene wird hierdurch berücksichtigt. Weiterhin wird das Vorgehen zur Anwendung der äquivalenten Materialkennwerte sowohl für das Scheibenmodell als auch den Plattenstreifen anhand eines Zahlenbeispiels für eine konkrete Problemstellung veranschaulicht. Ergänzend werden für das Scheibenmodell Vergleichsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt, woraus sich nahezu exakt die gleichen Verschiebungen wie bei einer homogenen Betrachtung mit der analytischen Lösung ergeben. Weiterhin wird die Vorgehensweise zur Ermittlung der maximalen Zellwandbeanspruchungen für die Materialnachweise des Zellwandmaterials demonstriert.

Im zweidimensionalen Fall wird wegen der Einhaltung des Gültigkeitsbereichs für die vereinfachten Bestimmungsgleichungen und auf der sicheren Seite liegend die Plattenwirkung des Verbundmaterials nur durch den Widerstand aus dem Füllmaterial im Druckbereich und der unbefüllten Zellstruktur im Zugbereich abgebildet. Dementsprechend lässt sich das Verbundmaterial als zweilagiges Laminat betrachten und die äquivalenten Plattensteifigkeiten können mit der klassischen Laminattheorie abgeleitet werden. Die hieraus ermittelten äquivalenten Plattensteifigkeiten ergaben für ein Zahlenbeispiel jedoch verhältnismäßig hohe Werte. Ebenfalls spiegeln diese infolge des großen Einflusses der Füllmaterialsteifigkeit eher ein richtungsunabhängiges Plattenverhalten wider. Im Hinblick auf ein für das Verbundmaterial Geozelle-Boden zu erwartendes anisotropes Materialverhalten stellt dies einen wenig realistischen Zusammenhang dar. Aus diesem Grund werden vereinfacht die für den homogenen Plattenstreifen hergeleiteten Bestimmungsgleichungen erweitert und auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Die damit berechneten äquivalenten Plattensteifigkeiten fallen hiermit deutlich geringer aus und bilden das anisotrope Materialverhalten des Verbundmaterials wesentlich besser ab.

Zur Berücksichtigung einer möglichen Membranwirkung des Verbundmaterials bei großen Plattendurchbiegungen werden zusätzlich für den zweidimensionalen Fall äquivalente Scheibensteifigkeiten ermittelt. Da eine Membranwirkung ausschließlich Zugbeanspruchung im Verbundmaterial hervorruft, werden hierzu nur die äquivalenten Materialkennwerte der Zellstruktur ohne Füllmaterial verwendet. Mit den hier beschriebenen Vorgehensweisen lässt sich abschließend das diskrete Verbundmaterial Geozelle-Boden durch ein homogenes schubstarres Plattenmodell und/oder Scheibenmodell beschreiben.

## 8 Zusammenfassung und Ausblick

### 8.1 Zusammenfassung

Die im Rahmen der Literaturstudie beschriebenen Untersuchungsergebnisse verdeutlichen die Verbesserung des mechanischen Verhaltens eines Bodenmaterials durch Geozellen. Zudem lässt sich ein anisotropes Materialverhalten sowie ein abweichendes Verhalten bei Zug- und Druckbeanspruchung des Verbundmaterials feststellen. In Abhängigkeit der jeweiligen Randbedingungen stellen neben der Mobilisierung eines zusätzlichen Stützdrucks die Wirkung als Platte und/oder Membran die primären Wirkungsweisen von Geozellen dar. Im Hinblick auf die Randbedingungen erweist sich die Nachgiebigkeit des Untergrundes als maßgebende Einflussgröße. Demnach ist bei einem nachgiebigen Untergrund vorwiegend von einer Plattenwirkung auszugehen. Sowohl die aus der Literatur entnommenen Ergebnisse als auch die an dem Versuch eines frei hängenden, Sand befüllten Zellstreifens beobachtete Ausbildung von Stauchungs- und Dehnungsbereichen bestätigen die Plattenwirkung durch eine aus der Zelhöhe folgende Biegesteifigkeit. Die vorgestellten Berechnungsverfahren bilden die Biegesteifigkeit jedoch nur unzureichend ab, da entweder der Einfluss aus der Nachgiebigkeit des Untergrundes unberücksichtigt bleibt oder für eine allgemeine homogene Beschreibung keine äquivalenten Materialkennwerte vorliegen. Das üblicherweise auf Geozellen angewendete Homogenisierungsverfahren ist wegen der Vernachlässigung der Anisotropie ungeeignet.

Ein geeigneter Ansatz zur Homogenisierung von Geozellen wird der Literatur zu hexagonalen Wabenkernen in Sandwichwerkstoffen entnommen. Wie bei Geozellen liegt auch hier eine periodische Zellstruktur vor. Eine Übereinstimmung der Ebenen der Materialsymmetrie mit den Koordinatenebenen vorausgesetzt weisen beide Strukturen ein richtungsabhängiges orthotropes Materialverhalten auf. Für den Übertrag auf das Verbundmaterial Geozelle-Boden wird ausgehend von den Grundlagen der flächenbasierten Homogenisierung die konkrete Vorgehensweise zur Ableitung äquivalenter Materialkennwerte von Wabenkernen vorgestellt. Dementsprechend lassen sich die äquivalenten Materialkennwerte durch die Betrachtung unabhängiger Belastungszustände an einem repräsentativen Volumenelement mit einer Abbildung der Zellwände über mechanische Balken- oder Plattenmodelle ermitteln.

Ausgehend von dieser Vorgehensweise werden die äquivalenten Materialkennwerte für das Verbundmaterial in der Aufspannebene abgeleitet. Zur Beschreibung der wesentlichen Merkmale des Verbundverhaltens werden Beispielberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode durchgeführt, anhand welcher äquivalente statische Systeme für die verschiedenen Belastungszustände definiert werden. Die Systeme setzen sich hierbei aus den mechanischen Modellen von Plattenstreifen und Axialfedern zur Abbildung der Zellwände und des Füllmaterials zusammen. Durch Anwendung des Satzes von Betti auf die äquivalenten statischen Systeme und

unter Annahme einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung werden allgemeine Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte hergeleitet. Dabei weisen diese eine Abhängigkeit nur von den Eigenschaften der Geozellen und des Füllmaterials auf. Durch Grenzwertbetrachtungen wird gezeigt, dass die allgemeinen Gleichungen die in der Literatur angegebene Lösung von unbefüllten Wabenstrukturen annehmen sowie bei befüllten Geozellen mit sehr schlanken Zellwänden nur Normalkräfte als Schnittgrößen wirken. Ergänzend werden geometrische Anwendungsgrenzen für die Bestimmungsgleichungen bei sehr schlanken Zellwänden in Bezug auf den Querdehnungseinfluss des Füllmaterials definiert.

Eine weitergehende Plausibilitätsprüfung ergibt, dass die allgemeine analytische Lösung die aus der Theorie der Orthotropie folgenden Bedingungen erfüllt, jedoch durch den Einfluss des Füllmaterials das Reziproktheorem nur bei bestimmten Belastungskombinationen und Geozellengeometrien eingehalten wird. Vergleichsberechnungen mit der Finite-Elemente-Methode bestätigen die Gültigkeit der allgemeinen Lösung und der abgeleiteten Anwendungsgrenzen. Gewisse Abweichungen lassen sich auf Spannungskonzentrationen in den Finite-Elemente-Berechnungen bedingt durch den lokalen Einfluss der Biegesteifigkeit der Zellwände zurückführen. Die Bestimmungsgleichung zu dem äquivalenten Schubmodul stellt eine auf der sicheren Seite liegenden Näherungslösung dar.

Die wesentlichen Einflussgrößen auf die äquivalenten Materialkennwerte werden im Zuge einer Parameterstudie beschrieben. Hierbei stellen der Zellwinkel, die Schlankheit der Zellwände und das Steifigkeitsverhältnis des Füllmaterials zu den Wandsteifigkeiten die maßgebenden Einflussfaktoren dar. Weiterhin lässt sich für bestimmte Zellgeometrien näherungsweise eine Richtungsunabhängigkeit des Materialverhaltens in der Aufspannebene feststellen. Durch eine ergänzende Gegenüberstellung der allgemeinen und der vereinfachten Lösung mit schlanken Zellwänden wird gezeigt, dass für gängige Geozellenprodukte die Bestimmung der äquivalenten Druck- und Zugmodule sowie der äquivalenten Querdehnzahlen mit der vereinfachten Lösung eine ausreichende Genauigkeit liefert. Für den äquivalenten Schubmodul ist hingegen die allgemeine Näherungslösung zu verwenden.

Abschließend wird der Übertrag der äquivalenten Materialkennwerte auf die mechanischen Tragwerksmodelle einer Scheibe und einer schubstarren Platte im ebenen Verzerrungszustand und im zweidimensionalen Fall beschrieben. Für eine Abbildung als schubstarre Platte sind wegen des abweichenden Verhaltens bei Druck- und Zugbeanspruchung des Verbundmaterials homogenisierte Plattensteifigkeiten erforderlich. Die hierzu notwendigen Gleichungen werden basierend auf der schubstarren Plattentheorie im ebenen Verzerrungszustand hergeleitet. Eine Homogenisierung mit der klassischen Laminattheorie zeigt hingegen ein wenig zufriedenstellendes Ergebnis, weshalb vereinfacht die im ebenen Verzerrungszustand abgeleiteten Gleichungen auf den zweidimensionalen Fall erweitert werden. Eine Abbildung des Verbundmaterials Geozelle-Boden als homogenes Tragwerkselement ist somit möglich.

## 8.2 Ausblick

Die Homogenisierung des Verbundmaterial Geozelle-Boden beschränkt sich in vorliegender Arbeit auf die äquivalenten Materialkennwerte in der Aufspannebene. Für eine vollständige Beschreibung des orthotropen Materialverhaltens und für Schubelastische Plattenmodelle sind zusätzlich die äquivalenten Materialkennwerte in Richtung der Zellenhöhe erforderlich. Als Grundlage für die äquivalenten Schubmodule in Höhenrichtung können die in der Literatur vorhandenen Lösungsansätze zu unbefüllten Wabenkernen herangezogen werden.

Die analytische Lösung zu dem äquivalenten Schubmodul in der Aufspannebene gibt zwar den Übergang zu einem unbefüllten Zellensystem korrekt wieder, stellt jedoch für den Ansatz eines Füllmaterials nur eine auf der sicheren Seite liegende Näherungslösung dar. Zur Ableitung einer exakten Lösung sind erneute Betrachtungen notwendig, wobei dann die abweichenden Winkeländerungen bei der mittleren Gleitung beispielsweise anhand von zwei getrennten äquivalenten statischen Systeme ermittelt werden können.

Für eine möglichst einfache Lösung zu den äquivalenten Materialkennwerten wird für das Füllmaterial von einem linear elastischen Verhalten ohne Plastifizierung ausgegangen. Eine begrenzte Druckfestigkeit des Füllmaterials kann zum Beispiel durch linear elastische ideal plastische Federn in den äquivalenten statischen Systemen berücksichtigt werden. In diesem Fall ist der Ansatz einer Einzelfeder jedoch nicht mehr ausreichend. Vielmehr wäre die Wirkung des Füllmaterials ähnlich einem gebetteten Balken über Linienfedern abzubilden, womit eine einfache analytische Lösung nicht mehr gegeben ist. Dagegen kann ein vereinfachter Festigkeitsnachweis bei dem bestehenden Ansatz über den Vergleich der Federkräfte mit der Druckfestigkeit des Füllmaterials geführt werden.

Das Verbundmaterial wird in den verschiedenen Belastungszuständen isoliert von dem umliegenden Boden betrachtet. Demzufolge sind ergänzende Betrachtung zu dem Einfluss einer Belastung quer zur Aufspannebene sowie von Scherspannungen entlang der Ober- und Unterseite des Zellsystems auf die äquivalenten Materialkennwerte notwendig. Die in der Literatur beschriebenen Untersuchungsergebnisse zu Herausziehversuchen an Geozellen deuten auf einen nicht unwesentlichen Einfluss durch die Ausbildung von passiven Erdwiderständen in den Bodenbereichen oberhalb und unterhalb des Zellensystems hin, welcher durch erhöhte äquivalente Zugmodule berücksichtigt werden könnte. Die aus einer punktuellen Einwirkung quer zur Aufspannebene folgenden Vertikalspannungen führen zu Horizontalspannungen. Hierdurch tritt entsprechend der Theorie zum zusätzlichen Stützdruck eine weitere Beanspruchung der Zellwände auf. In den gängigen Plattentheorien lässt sich der Einfluss aus den Vertikalspannungen jedoch nicht berücksichtigen. Dieser kann vereinfacht über einer Kombination des Plattenansatzes und der Theorie zum zusätzlichen Seitendruck als innerer Materialnachweis der Zellwände abgebildet werden. Vergleichbar zu der punktuellen Einwirkung quer zur

Aufspannebene resultiert aus einer Verdichtung des Füllmaterials eine zusätzliche Beanspruchung der Zellwände. Diese lässt sich als eine Art Vorspannung interpretieren, durch welche zusätzlich ein erhöhter Widerstand gegen eine Einwirkung zu erwarten ist und in vorliegendem Ansatz durch eine Anpassung des Arbeitssatzes berücksichtigt werden könnte.

Die äquivalenten Materialkennwerte werden unter Annahme eines ebenen Spannungs- oder Verzerrungszustand hergeleitet, wodurch der Einfluss aus der Zellhöhe nur über das Flächenträgheitsmoment abgebildet wird. Variierende Spannungs- und Verzerrungsverteilungen über die Zellhöhe, insbesondere bei einer Scherbeanspruchung entlang der Ober- und Unterseite, werden vernachlässigt. Zur Berücksichtigung des Einflusses hieraus sind die Zellwände über Platten mit der tatsächlichen Zellhöhe und deren Beanspruchung abzubilden. Die Verschiebungsermittlung erfolgt dann als Randwertproblem mit entsprechenden Lösungsansätzen.

Im Rahmen der Homogenisierung werden ausschließlich Erstbelastungszustände betrachtet. Die vorgestellten numerischen Berechnungen zeigen, dass aufgrund der fehlenden Zugfestigkeit des Füllmaterials irreversible Verformungen stattfinden, womit kein linear elastisches Materialverhalten des Verbundmaterials vorliegt und weitergehende Betrachtungen zum Verhalten bei Ent- und Wiederbelastung notwendig sind. Weiterhin werden die nichtlinearen Eigenschaften des Füllmaterials und der Zellwände vernachlässigt. Zur Berücksichtigung der Nichtlinearitäten können dehnungsabhängige Formulierungen verwendet werden, welche jedoch inkrementelle Lösungsansätze erfordern. Die zeitabhängigen Festigkeitseigenschaften des Zellwandmaterials lassen sich vereinfacht über die in der EBGeo (2010) definierten Abminderungsfaktoren berücksichtigt. Die Einbindung einer geometrischen Nichtlinearität in die bestehende Lösung erfordert ebenfalls eine inkrementelle Lösung. Ein über die Zellwinkeländerung formulierter Ansatz wird in Literatur zu unbefüllten Wabenkernen beschrieben.

Zur Ableitung der äquivalenten Plattensteifigkeiten wird im zweidimensionalen Fall aufgrund der Abhängigkeit der äquivalenten Materialkennwerte von den Randbedingungen vereinfacht von einer ausschließlichen Wirkung des Füllmaterials im Druckbereich und der unbefüllten Zellstruktur im Zugbereich ausgegangen. Weiterhin wird eine Anwendbarkeit der für den ebenen Verzerrungszustand abgeleiteten Bestimmungsgleichungen zu den verschiedenen äquivalenten Plattensteifigkeiten angenommen. Zu beiden Annahmen sind ergänzende theoretische Betrachtungen erforderlich. Bedingt durch die Zellhöhe ist bei einer Durchbiegung der geozellenbewehrten Schicht von einer zusätzlichen Beanspruchung der Zellwände durch Torsion auszugehen. Entsprechende theoretische Ansätze lassen sich für unbefüllte Wabenkerne der Literatur entnehmen. Ebenfalls liegen zu sinusförmigen Waben Homogenisierungsansätze vor, wodurch die Form von Geozellen genauer abgebildet werden kann.

Bei den vorliegenden Betrachtungen handelt es sich ausschließlich um theoretische Untersuchungen zu einer homogenisierten Abbildung des Verbundmaterials Geozelle-Boden. Diese sind experimentell in geeigneten Prüfeinrichtungen nachzuweisen.



## 9 Literaturverzeichnis

- ABD EL-SAYED, F.K. (1976): *Kein Titel verfügbar - Kapitel 2, 3 und 4 bereitgestellt als PDF von Ian Burgess per E-Mail vom 19.05.2016 und 01.11.2018*. Dissertation, Sheffield: University of Sheffield
- ABD EL-SAYED, F.K.; JONES, R. und BURGESS, I.W. (1979): A theoretical approach to the deformation of honeycomb based materials. In: *Composites*. Oktober 1979, 10(4), S. 209-214
- ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J. und RIKARDS, R. (1996): *Einführung in die Mechanik der Laminat- und Sandwichtragwerke - Modellierung und Berechnung von Balken und Platten aus Verbundwerkstoffen*. Halle, Magdeburg und Riga: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Stuttgart, ISBN 3-342-00681-1
- ALTENBACH, H.; ALTENBACH, J. und NAUMENKO, K. (2016): *Ebene Flächentragwerke - Grundlagen der Modellierung und Berechnung von Scheiben und Platten*. 2. Auflage. Magdeburg: Springer Verlag GmbH, ISBN 978-3-662-47229-3
- AVESANI NETO, J.O.; BUENO, B.S. und FUTAI, M.M. (2013): A bearing capacity calculation method for soil reinforced with a geocell. In: *Geosynthetics International*. Juni 2013, 20(3), S. 129-142
- BALAWI, S.O.M. (2007): *Effective Mechanical Behavior of Honeycombs - Theoretical and Experimental Studies*. Disseration, Cincinnati: Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, College of Engineering, University of Cincinnati
- BATHURST, R.J. und RAJAPOGAL, K. (1993): Large-Scale Triaxial Compression Testing of Geocell-Reinforced Granular Soils. In: *Geotechnical Testing Journal*. September 1993, 16(3), S. 296-303
- BATHURST, R.J. und KNIGHT, M.A. (1998): Analysis of geocell reinforced-soil cover large span conduits. In: D.V. GRIFFITHS; J.S. MCCARTNEY und H.R. THOMAS, Hrsg. *Computers and Geotechnics*. April 1998, 22(3/4), S. 205-219
- BISWAS, A. und KRISHNA, A.M. (2017): Geocell-Reinforced Foundation Systems - A Critical Review. In: S.K. SHUKLA, Hrsg. *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*. Mai 2017, 3(17)
- BRINGREVE, R.B.J.; KUMARSWARMY, S.; SWOLFS, W.M.; ZAMPICH, L. und RAGI MANOJ, N. (2019): *Plaxis 2019*. Delft, Netherlands: Plaxis bv, Bentley Systems, Incorporated, ISBN-13: 978-90-76016-27-6

- BUSH, D.I.; JENNER, C.G. und BASSETT, R.H. (1990): The Design and Construction of Geocell Foundation Mattresses Supporting Embankments over Soft Ground. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. Dezember 1990, 9(1), S. 83-98
- CHEN, Z. und BUTCHER, C. (2013): *Micromechanics Modelling of Ductile Fracture*. In: G.M.L. GLADWELL, Hrsg. *Solid Mechanics and Its Applications - Volume 195*. Canada: Springer Verlag, ISBN 978-94-007-6097-4
- CHEN, R.; HUANG, Y. und HUANG, F. (2013): Confinement effect of geocells on sand samples under triaxial compression. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. 37, S. 35-44
- DANKERT, J. und DANKERT, H. (2006): *Technische Mechanik - Statik, Festigkeitslehre, Kinematik/Kinetik*. 4. Auflage. Jesteburg: Teubner Verlag, ISBN 3-8351-006-8
- DIN EN ISO 10318-1:2018-10: *Geokunststoffe - Teil 1: Begriffe (ISO 10318-1:2015 + Amd 1:2018)*. DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG e. V., Hrsg. Berlin: Beuth Verlag GmbH, Oktober 2018
- DIN EN ISO 10319:2015-09: *Geokunststoffe - Zugversuch am breiten Streifen (ISO 10319:2015)*. DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG e. V., Hrsg. Berlin: Beuth Verlag GmbH, September 2015
- DIN EN ISO 13426-1:2020-03: *Geotextilien und geotextilverwandte Produkte - Festigkeit produktinterner Verbindungen - Teil 1 Geozellen*. DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG e. V., Hrsg. Berlin: Beuth Verlag GmbH, März 2020
- DIN EN ISO 13431:1999-11: *Geotextilien und geotextilverwandte Produkte - Bestimmung des Zugkriech- und des Zeitstandbruchverhaltens*. DIN DEUTSCHES INSTITUT FÜR NORMUNG e. V., Hrsg. Berlin: Beuth Verlag GmbH, November 1999
- EBGEO (2010): *Empfehlungen für den Entwurf und die Berechnung von Erdkörpern mit Bewehrungen aus Geokunststoffen - EBGEO*. 2. Auflage. DGGT DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR Geotechnik e. V., Hrsg. Berlin : Ernst & Sohn, ISBN: 978-3-433-01855-2
- EMERSLEBEN, A. (2010): *Lastabtragsverhalten von Geozellen zur Stabilisierung mineralischer Tragschichten unter statischen und zyklischen Belastungen*. Dissertation. Clausthal: Institut für Geotechnik und Markscheidewesen, Technische Universität, ISBN 3-938924-13-6
- GEORGE, A.N. (2015): *Numerical Modeling of Geocell Reinforced Beds*. Masterarbeit. Hyderabad, India: Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology

- GHOSH, B.; FATAHI, B. und KHABBAZ, H. (2017): Analytical Solution to Analyze LTP on Column-Improved Soft Soil Considering Soil Nonlinearity. In: M. BARLA, Hrsg. *International Journal of Geomechanics*. März 2017, 17(3)
- GIBSON, L.J. (1981): *The elastic and plastic behaviour of cellular materials*. Dissertation. Cambridge, UK: Department of Engineering, University of Cambridge
- GIBSON, L.J. und ASHBY, M.F. (1999): *Cellular solids - Structure and properties*. 2. Auflage. In: D.R. CLARKE, S. SURESH und I.M. WARD, Hrsg. Cambridge Solid State Science Series. Cambridge, UK: Cambridge University Press, ISBN 0 521 49911 9
- GROSS, D.; HAUGER, W. und SCHNELL, W. (2002): *Technische Mechanik - Band 1: Statik*. 7. Auflage. Darmstadt: Springer Verlag, ISBN 3-540-43850-5
- GROSS, D.; HAUGER, W.; SCHRÖDER, J. und Wall, W.A. (2011a): *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. 11. Auflage. Darmstadt, Essen und München: Springer Verlag Heidelberg, ISSN 0937-7433
- GROSS, D.; HAUGER, W. und WRIGGERS, P. (2011b): *Technische Mechanik 4 - Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. 8. Auflage. Darmstadt und Hannover: Springer Verlag Heidelberg, ISSN 0937-7433
- GUO, Y. (2001): Test Research of Earthwork Flexibility Raft Foundation Strengthening Shallow Soft Subgrade. aus dem Chinesisch ins Deutsche übersetzt von Sijie CAO. In: CHINA ACADEMIC JOURNAL ELECTRONIC PUBLISHING HOUSE, Hrsg. *Shanxi Science & Technology Communications*. Juni 2001, 142(3)
- HAN, J.; YANG, X.; LESHCHINSKY, D. und PARSONS, R.L. (2008): Behavior of Geocell-Reinforced Sand under a Vertical Load. In: TRANSPORTATION RESEARCH BOARD ON NATIONAL ACADEMIES, Hrsg. *Transport Research Record: Journal of the Research Board*. Januar 2008, 2045(1), S. 95-101
- HEDGE, A. und SITHARAM, T.G. (2015a): Experimental and Analytical Studies on Soft Clay Beds Reinforced with Bamboo Cells and Geocells. In: S.K. SHUKLA, Hrsg. *International Journal of Geosynthetics and Ground Engineering*. April 2015, 1(13)
- HEDGE, A. und SITHARAM, T.G. (2015b): 3-Dimensional numerical modelling of geocell reinforced sand beds. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. April 2015, 43(2), S. 171-181
- HEDGE, A. (2017): Geocell reinforced foundation beds-past findings, present trends and future prospects: A state-of-the-art review. In: M.C. FORDE, Hrsg. *Construction and Building Materials*. November 2017, 154, S. 658-674
- HENKEL, D.J. und GILBERT, G.D. (1952): The Effect Measured of the Rubber Membrane on the Triaxial Compression Strength of Clay Samples. In: *Geotechnique*. März 1952, 3(1), S. 20-29

- HOHE, J. und BECKER, W. (2002): Effective stress-strain relations for two-dimensional cellular sandwich cores - Homogenization, material models, and properties. In: H. DANKOWICZ, Hrsg. *Applied Mechanics Review*. Januar 2002, 55(1), S. 61-87.
- KOERNER, R.M. (2005): *Designing with Geosynthetics*. 5. Auflage. New Jersey, USA: Pearson Education Inc., ISBN 0-12-145415-3
- LESHCHINSKY, B.A. (2012): *Enhancing Ballast Performance using Geocell Confinement*. Dissertation. Columbia, USA: Graduate School of Arts and Sciences, Columbia University
- MADHAVI LATHA, G. (2008): Design of Geocell Reinforcement for Supporting Embankments on Soft Ground. In: *Proceedings of 12th International Conference of International Association for Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Oktober 2008, S. 3575-3582.
- MADHAVI LATHA, G.; DASH, S.K. und RAJAPOGAL, K. (2009): Numerical Simulation of the Behavior of Geocell Reinforced Sand in Foundations. In: M. BARLA, Hrsg. *International Journal of Geomechanics*. August 2009, 9(4), S. 143-152
- MAHDI BIABANI, M. (2015): *Behaviour of Geocell-Reinforced Subballast under Cyclic Loading in Plane Strain Condition*. Dissertation. Wollongong, Australien: Department of Engineering at School of Civil, Mining and Environmental Engineering, University of Wollongong
- MAHESHWARI, P.; BASUDHAR, P.K. und CHANDRA, S. (2006): Modeling of beams on reinforced granular beds. In: J.L. HANSON und P.G. MARINOS, Hrsg. *Geotechnical and Geological Engineering*. April 2006, 24(2), S. 313-324
- MAHESHWARI, P. und VILADKAR, M.N. (2009): A mathematical model for beams on geosynthetic reinforced earth beds under strip loading. In: J. SIENZ, Hrsg. *Applied Mathematical Modelling*. April 2009, 33(4), S. 1803-1814
- MALEK, S. und GIBSON, L. (2015): Effective Elastic Properties of Periodic Hexagonal Honeycombs. In: B. LORET und G. SUBHASH, Hrsg. *Mechanics of Materials*. Dezember 2015, 91(1), S. 226-240
- MARTO, A.; OGHABI, M. und EISAZADEH, A. (2013): Effect of Geocell Reinforcement in Sand and Its Effect on the Bearing Capacity with Experimental Test - A Review. In: M. ÖNER und J. FRAZIER, Hrsg. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*. Januar 2013, 18(Q), S. 3501-3516
- MEHDIPOUR, I.; GHAZAVI, M. und MOAYED, R.Z. (2017): Stability Analysis of Geocell-Reinforced Slopes Using the Limit Equilibrium Horizontal Slice Method. In: M. BARLA, Hrsg. *International Journal of Geomechanics*. April 2017, 17(9)

- MITCHELL, K.M.; KAO, T. und KAVAZANJIAN, E. (1979): *Analysis of grid cell reinforced pavement bases*. Technical Report GL-79-8. Chief of Engineers, U.S. Army. Berkley, USA: Department of Civil Engineering, University of California
- MOGHADDAS TAFRESHI, S.N.; SHAGHAGI, T.; TAVAKOLI MEHRJARDI, G.; DAWSON, A.R. und GHADRAN, M. (2015): A simplified method for predicting the settlement of circular footings on multi-layered geocell-reinforced non-cohesive soils. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. August 2015, 43(4), S. 332-344
- NAST, E. (1997): *Zur numerischen und experimentellen Analyse von Flächentragwerken in Sandwich- und Laminatbauweise*. Dissertation. Hamburg: Fachbereich Elektrotechnik, Universität der Bundeswehr Hamburg
- NOURI, H.; FAKHER, A. und JONES, C.J.F.P. (2006): Development of Horizontal Slice Method for seismic stability analysis of reinforced slopes and walls. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. Juni 2006, 24(3), S. 175-187
- PALESE, J.; HARTSBOUGH, E.M.; ZAREMBSKI, A.M. und LING, H.I. (2018): *Field Demonstration of Geocell Track Substructure Support System Under High-Speed Passenger Railroad Operations*. Technical Report DOT/FRA/ORD-18/27. Washington DC, USA : Office of Research, Development and Technology, U.S. Department of Transportation - Federal Railroad Administration
- PASINI, D. und ARABNEJAD, S. (2017): *Dynamics of Lattice Materials*. Canada and USA : John Wiley & Sons Ltd, ISBN 978-1-118-729595
- POKHAREL, S.K. (2010): *Experimental Study on Geocell-reinforced Bases under Static and Dynamic Loading*. Dissertation. Kansas, USA: Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Kansas
- PRESTO (2003) *The Geoweb® load support system - Technical overview*. Appleton, Wisconsin, USA : Presto Products Company - Geosystems®
- PRIYADARSHEE, A. (2013): *Strength and deformation characteristics of geocell-fiber reinforced granular soil*. Dissertation. Guwahati, India: Geotechnical Engineering - Department of Civil Engineering, Indian Institute of Technology Guwahati
- QU, C. (2009): Tension Stress Analysis for Geocell with Different Modulus. In: M. ÖNER und J. FRAZIER, Hrsg. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*. Januar 2009, 14(D)
- RAJAPOGAL, K.; KRISHNASWAMY, N.R. und MADHAVI LATHA, G. (1999): Behaviour of sand confined with single and multiple geocells. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. 17

- RAJAPOGAL, K.; MADHAVI LATHA, G. und KRISHNASWAMY, N.R. (2001): Finite element analysis of embankments supported on geocell layer. In: DESAI et al., Hrsg. *Proceeding of 10th International Conference on Computer Methods and Advances in Geomechanics*. Januar 2001, S. 1251-1254
- REA, C. und MITCHELL, J.K. (1978): Sand reinforcement using paper grid cells. In: ASCE AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS, Hrsg. *Proceedings of the American Society of Civil Engineers - Symposium on Earth Reinforcement*. April 1978, S. 644-663
- RICHARDSON, G.N. (2004): Geocells: a 25-year perspective - Part 1: roadway applications. In: *Geotechnical Fabrics Report (GFR)*. Vol. 22(6), S. 14-19
- SATYAL, A.R.; LESHCHINSKY, B.; HAN, J. und NEUPANE, M. (2018): Use of cellular confinement for improved railway performance on soft subgrades. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. April 2018, 46(2), S. 190-205
- TIMOSHENKO, S.P. und GOODIER, J.N. (1970): *Theory of Elasticity*. 3. Auflage, New York, USA: McGraw-Hill Education, ISBN-10 0070642702
- YADAV, M.; AGNIHOTRI, A.K.; PRIYADARSHEE, A. und DHANE, G. (2014): Application of Geocells in Reinforcement of Soil. In: D.P. KOTHARI, Hrsg. *Journal of Civil Engineering and Environmental Technology*. August 2014, 1(5), S. 60-64
- YANG, X. (2010): *Numerical Analyses of Geocell-Reinforced Granular Soils under Static and Repeated Loads*. Dissertation. Kansas, USA: Department Civil, Environmental, and Architectural Engineering, University of Kansas
- YAO, W. und YE, Z. (2004): Analytical solution of bending-compression column using different tension-compression modulus. In: X. GUO, Hrsg. *Applied Mathematics and Mechanics*. September 2004, 25(9), S. 983-993
- YIN, J. (2000): Closed-Form solution for reinforced Timoshenko beam on elastic foundation. In: R. BALLARINI, Hrsg. *Journal of Engineering Mechanics*. August 2000, 126(8), S. 868-874.
- ZHANG, L.; ZHAO, M.; ZOU, X. und ZHAO, H. (2009): Deformation analysis of geocell reinforcement using Winkler model. In: D.V. GRIFFITHS; J.S. MCCARTNEY und H.R. THOMAS, Hrsg. *Computers and Geotechnics*. Juli 2009, 36(6), S. 977-983
- ZHANG, L.; ZHAO, M.; ZOU, X. und ZHAO, H. (2010a): Analysis of geocell-reinforced mattress with consideration of horizontal-vertical coupling. In: D.V. GRIFFITHS; J.S. MCCARTNEY und H.R. THOMAS, Hrsg. *Computers and Geotechnics*. September 2010, 37(6), S. 748-756

- ZHANG, L.; ZHAO, M.; SHI, C. und ZHAO, H. (2010b): Bearing capacity of geocell reinforcement in embankment engineering. In: R.K. ROWE und C.-S. YOO, Hrsg. *Geotextiles and Geomembranes*. Oktober 2010, 28(5), S. 475-482.
- ZHANG, L.; ZHAO, M.; SHI, C. und ZHAO, H. (2012a): Nonlinear analysis of a geocell mattress on an elastic-plastic foundation. In: D.V. GRIFFITHS; J.S. MCCARTNEY und H.R. THOMAS, Hrsg. *Computers and Geotechnics*. Mai 2012, 42, S. 204-211
- ZHANG, L.; ZHAO, M.; HU, Y. und CHEN, B. (2012b): Semi-analytical solutions for geosynthetic-reinforced and pile-supported embankment. In: D.V. GRIFFITHS; J.S. MCCARTNEY und H.R. THOMAS, Hrsg. *Computers and Geotechnics*. Mai 2012, 44, S. 167-175.





## Anhang A

### Anhang A.1: Übersicht zu den vorgestellten Untersuchungen zur Wirkungsweise von Geozellen

**Tab. A.1:** Übersicht zu den ummantelten triaxialen Kompressionsversuchen

	Bathurst & Rajapogal (1993)		Priyadarshee (2013)				Chen et al. (2013)
Beschreibung	Gesättigt, drainiert Versuche; D = 200 mm, H = 200 mm; konst. Dehnungsrate 1%/min		Versuche an trockenem Sand; D = 100 mm, H = 200 mm; konst. Verschiebungsrate 1,2 mm/min; Ummantelung durch Vernähen über 15 mm				Gesättigt, drainiert; H = 200 mm; Variation von Zellenanzahl, Form und Größe; konst. Dehnungsrate 0,1 %/min
Geozelle aus	Einzelne handelsübliche Geozelle aus PE-HD		Geonetz A	Geonetz B	Gewebe A	Gewebe B	Streifen aus PE-HD
Rohdichte	-		-	-	-	-	0,967
Flächenmasse [g/m <sup>2</sup> ]	-		232	61	114	344	118
Zugfestigkeit [kN/m]	-		1,5	2,4	7,1	11,5	15
Dehnsteifigkeit [kN/m]	Laut Bathurst & Rajapogal (1993) direkt aus Versuchen über Umfangsdehnung		12,5 bei 5 %	2,2 bei 5 %	25 bei 5 %	51 bei 5 %	101 bei 2 %
Wanddicke [mm]	1,15		-	-	-	-	0,38
Bodenart	Sand	Gebrochener Kalkstein	Mittelsand				Schlecht abgestufter Sand
d <sub>min</sub> [mm]	0,15	-	-				-
d <sub>max</sub> [mm]	0,425	19	-				-
d <sub>10</sub> [mm]	-	-	-				0,15
d <sub>50</sub> [mm]	0,3	2	0,39				0,25
C <sub>u</sub> [-]	-	-	2,61				2,07
C <sub>c</sub> [-]	-	-	0,93				1,04
ρ <sub>s</sub> [g/cm <sup>3</sup> ]	-	-	2,68				2,66
e <sub>min</sub> [-]	0,56	-	-				-
e <sub>max</sub> [-]	0,76	-	-				-
ρ <sub>d,min</sub> [g/cm <sup>3</sup> ]	1,48	-	1,39				1,33
ρ <sub>d,max</sub> [g/cm <sup>3</sup> ]	1,67	-	1,64				1,61
ρ <sub>d,rel</sub> [%]	40 bis 56	-	-				55
I <sub>D</sub> [%]	-	-	30, 60, 80				-

**Tab. A.2:** Übersicht zu den experimentellen Belastungsversuchen

	Pokharel (2010)				Emersleben (2010)			Leshchinsky (2012)	Mahdi Biabani (2015)	
Beschreibung	Statische und zyklische Belastungsversuche auf starrem und nachgiebigem Untergrund				Statische und zyklische Belastungsversuche auf starrem und nachgiebigem Untergrund			Zyklische Belastungsversuche an Eisenbahndamm	Zyklische Biaxialversuche	
Geokunststoffe										
Geozellentyp	PE-HD A	PE-HD B (faser-verstärkt)	PE-HD C (faser-verstärkt)	PE-HD D (faser-verstärkt)	PE-HD	Vliesstoff		PE-HD (faserverstärkt)	PE-HD	
Wanddicke [mm]	1,5	1,1			1,7	1,8		-	1,3	
Zugfestigkeit [kN/m]	12,5	19,1	20,9	21,3	17,5	20,6		26 MN/m²	12,5	
Dehnsteifigkeit [kN/m]	310 bei 2 %	355 bei 2 %	350 bei 2 %	440 bei 2 %	239-270 bei 2 %	178-209 bei 2 %		2,07 GN/m²	190 bei 5 %	
Perforation	keine	100 mm²	keine	keine	ja	keine		keine	16,80 % Flächenanteil	
Höhe [mm]	75, 100, 150				100, 150, 200				200	150
Geokunststoff als Trennlage	Geovlies				Geovlies (GRK 1)			-	-	
Flächenmasse [g/m²]	99,65				-			-	-	
Bodenmaterialien										
Bodenart	Sand A	Abbruch-rückstände	Gebrochen-er Kalkstein	Sand B	Sand	kiesiger Sand	Kies	Gebrochener Granit	Schotter	
d <sub>10</sub> [mm]	-	-	-	-	0,23	0,11	0,43	-	-	
d <sub>30</sub> [mm]	-	-	-	-	0,43	0,42	1,83	-	1,4	
d <sub>50</sub> [mm]	2,6	1,2	7	0,54	-	-	-	12,5	3,3	
d <sub>60</sub> [mm]	-	-	-	-	1,04	1,78	7,52	-	-	

(Fortsetzung)

$C_u$ [-]	2,73	12	-	3,1	4,5	16,8	17,6	-	16,3
$C_c$ [-]	0,98	0,77	-	0,95	0,8	0,9	1	-	1,3
$\rho_s$ [g/cm <sup>3</sup> ]	2,65		2,69	2,62	2,65	2,65	2,65	-	2,7
$\rho_{d,min}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	-	-	-	-	1,45	-	-	1,33	1,568
$\rho_{d,max}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	-	-	-	-	1,88	-	-	1,535	2,122
$w_l$ [%]	-	20	20	-	-	-	-	-	-
$w_p$ [%]	-	12	13	-	-	-	-	-	-
$w_{pr}$ [%]	-	9	10	6,3	9,3	7,4	3,8	-	-
$\rho_{pr}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	-	2,1	2,08	1,77	1,77	2,27	2,09	-	-
$\varphi'$ [°]	37,3 bei $\rho_{rel} = 70$ %	-	-	-	41 bei $\rho_{Einbau}$	46 bei $\rho_{Einbau}$	47,4 bei $\rho_{Einbau}$	45	-
$c'$ [kN/m <sup>2</sup> ]	-	-	-	-	4,9 bei $\rho_{Einbau}$	4,2 bei $\rho_{Einbau}$	3,5 bei $\rho_{Einbau}$	-	-
$\psi'$ [°]	-	-	-	-	-	-	-	15	-
CBR [%]	-	57 % (w = 7 %)	75 % (w = 7,1 %)	-	-	-	-	-	-
Einbauzustand des Füllmaterials der Geozellen									
Füllmaterial	Sand A	Abbruch- rückstand	Gebrochen- er Kalkstein	Sand B	Sand	kiesiger Sand	Kies	Gebrochener Granit	Schotter
$\rho_{d,rel}$ [%]	70 %	95 %	95 %	70 %	-	-	-	-	77 %
$\rho_{d,Einbau}$ [g/cm <sup>3</sup> ]	--	-	-	-	1,8	1,8	1,8	-	2,058
$w_{Einbau}$ [%]	-	-	5 %	8,9 %	-	-	-	-	-

(Fortsetzung)

Untergrund (wenn vorhanden, andernfalls starr)									
Untergrund	Kaolin (25 M-%) Sand B (75 M-%)				Glyben (Ben- tonit 53 % & Glycerin 47 %)	Sand (wie oben)		Gebrochener Granit (wie oben)	Schotter (wie oben)
w <sub>I</sub> [%]	-				52-55				
w <sub>p</sub> [%]	-				27-29				
I <sub>p</sub> [%]	-				23-28				
ρ <sub>Einbau</sub> [g/cm <sup>3</sup> ]	-				1,58				
E <sub>s,Erst</sub> [MN/m <sup>2</sup> ]	-				0-3				
E <sub>s,Wieder</sub> [MN/m <sup>2</sup> ]	-				4-5,5				
φ' [°]	-				6-10				
c' [kN/m <sup>2</sup> ]	-				17-25				
w <sub>pr</sub> [%]	10,8				-				
ρ <sub>Pr</sub> [g/cm <sup>3</sup> ]	2,01				-				
c <sub>u</sub> [kN/m <sup>2</sup> ]	35 - 50				-				
w <sub>Einbau</sub> [%]	11,4				-				
CBR [%]	2,2 (w = 11,06 %)				-				

**Tab. A.3:** Übersicht zu den numerischen Simulationen

	Han et al. (2008)	Yang (2010)	George (2015)	Hedge&Sitharam (2015b)	Satyal et al. (2018)
Beschreibung	Modellierung von Belastungsversuch an Einzelzelle auf starrem Untergrund	Modellierung von Belastungsversuchen an Einzelzelle auf starrem Untergrund und Zellsystem auf nachgiebigem Untergrund	Modellierung von Belastungsversuch an Einzelzelle und Zellsystem auf nachgiebigem Untergrund	Modellierung von Belastungsversuch an Einzelzelle auf starrem Untergrund und Zellsystem auf nachgiebigem Untergrund	Modellierung von Belastungsversuch an Zellsystem und von Eisenbahndamm auf nachgiebigem Untergrund
Programm/Verfahren	Flac 3D/ Finite Differenzen Verfahren	Flac 3D/ Finite Differenzen Verfahren	Flac 3D/ Finite Differenzen Verfahren	Flac 3D/ Finite Differenzen Verfahren	Abaqus Explicit/ Finite Elemente Verfahren
Zellform	rhombisch	rhombisch, sinusförmig	rhombisch, zusammengesetzt Form, sinusförmig	sinusförmig	sinusförmig
Füllmaterial (Kontinuum)	isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	nicht linear mit Stoffgesetz nach Duncan-Chang	isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	hyperbolische Verfestigung mit Fließbedingung nach Drucker-Prager
Untergrund	starr über Verschiebungsrandbedingungen	starr oder Kontinuum/ isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	Kontinuum/ isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	starr oder Kontinuum/ isotrop linear elastisch ideal plastisch mit Fließbedingung nach Mohr-Coulomb	Kontinuum/ hyperbolische mit Fließbedingung nach Drucker-Prager
Lastplatte	Kontinuum/ linear elastisch	Verschiebungsrandbedingung	Kontinuum/ linear elastisch	Verschiebungsrandbedingung	keine Angabe
Geozellen	linear elastisch mit Membranelemente	linear elastisch mit Plattenelemente	linear elastisch mit Membranelemente	linear elastisch mit Membranelemente	linear elastisch mit Membranelemente
Zellgröße [mm] (L <sub>c</sub> x W <sub>c</sub> x H <sub>c</sub> )	250 x 210 x 50	240 x 200 x 100/ 240 x 200 x 150	300 x 200 x 200	250 x 210 x 150	320 x 287 x 150
Variation	-	Zellwandmodul; Verbundsteifigkeit; Zellhöhe; Untergrundfestigkeit und -steifigkeit	Zellwandmodul; Verbundsteifigkeit; Perforationsanteil	Zellwandmodul; Verbundfestigkeit; Zellhöhe; Zellgröße	Bewehrungsanordnung im Damm

## Anhang A.2: Weitergehende Literaturübersicht zu analytischen Nachweisverfahren für Geozellen

**Tab. A.4:** Übersicht zu ausgewählter Literatur für Nachweisverfahren zur Tragfähigkeit

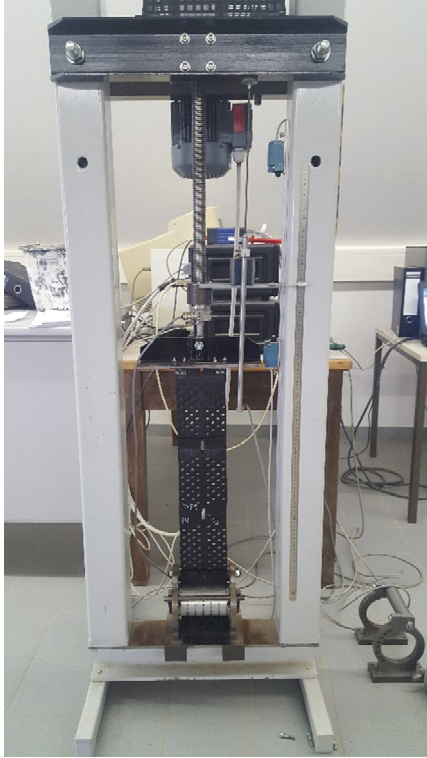
Autor	Nachweis	Beschreibung
Nachweisverfahren mit <u>diskreter</u> Betrachtung der Interaktion zwischen Geozelle und Füllmaterial als „innere“ Strukturnachweise zum Verbundmaterial		
Mitchell et al. (1979)	Durchstanzen der Zellwände für <u>Einzelzelle</u>	Bei direkter Lasteinleitung auf die geozellenbewehrte Schicht; größere Steifigkeit von Zellwandmaterial bewirkt höherer Belastung von Zellwand verglichen zu Füllmaterial; Relativverschiebung von Zellwänden gegenüber Füllmaterial in Untergrund; Fußwiderstand und Wandreibung aus aktivem Erddruck als Widerstände; Nachweis über vertikales Kräftegleichgewicht an Zellwand; Vermeidung des Versagens infolge Durchstanzen durch Anordnung einer Überdeckung mit einer Bodenschicht
Mitchell et al. (1979)	Bersten der Zellwände von kreisförmige <u>Einzelzelle</u>	Bersten infolge Überschreitung von Zugfestigkeit oder Festigkeit der Verbindungsstelle; Beanspruchung aus horizontalem aktiven Erddruck infolge Einwirkung; Widerstand aus Ringzugfestigkeit und horizontalem passiven Erddruck sowie Scherkräften infolge Reibung von ober- und unterhalb angeordneter Schicht; Nachweis über horizontales Kräftegleichgewicht
Emersleben (2010)	Innerer Nachweis zur Materialfestigkeit der Zellwände für kreisförmige <u>Einzelzelle</u> mit Einfluss aus Nachbarzellen (vergleichbar zu Bersten)	Beanspruchung aus horizontalem aktiven Erddruck infolge Einwirkung; Widerstand aus horizontalem passiven Erddruck von Bodeneigengewicht und Bodenverspannung in Nachbarzellen sowie Ringzugkräfte; bilinearer Verlauf für passiven Erddruck in Abhängigkeit der radialen Dehnungen; Nachweis über horizontales Kräftegleichgewicht; Superposition der verschiedenen Einflussgrößen
Presto (2003)	Dimensionierung von Tragschichtmächtigkeit basierend auf Grundbruchnachweis mit kreisförmiger <u>Einzelzelle</u>	Kreisförmige gleichmäßige Einwirkung an GOK; horizontale Spannungsberechnung an Ober- und Unterseite von Zellwänden mit Theorie von Boussinesq; resultierende Horizontalspannung auf Zellwände durch Mittelwertbildung; Berechnung von Scherwiderstand aus dieser Horizontalspannung durch Bezug auf Mantelfläche von Einzelzelle; Nachweis über vertikales Kräftegleichgewicht mit Widerstand aus undrainierter Scherfestigkeit des Untergrundes
Koerner (2005)	Allgemeines Grundbruch-/Durchstanzversagen von Füllmaterial bei <u>Einzelzelle</u> mit innenliegender Einwirkung	Geozelle verhindert oberflächennahe Gleitflächen und verlagert diese in Bodenbereich unterhalb Bewehrungslage; Relativverschiebung von Füllmaterial gegenüber Zellwänden in Untergrund; Grundbruchversagen nach Überschreitung von Scherwiderstand aus Wandreibung an Zellwänden; Wandreibung folgt aus horizontalem aktiven Erddruck infolge Einwirkung; Spannungsnachweis mit Einwirkung, Wandreibung und Grundbruchwiderstand aus Untergrund

(Fortsetzung)

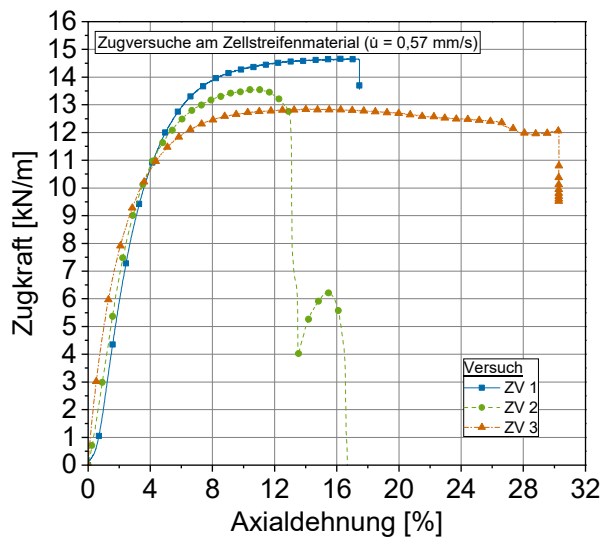
Avesani Neto et al. (2013)	Allgemeines Grundbruchversagen an <u>Zellensystem</u> mit diskreter Betrachtung von Zellen und Füllmaterial durch Scherwiderstand aus Wandreibung	Berücksichtigung von verminderter Radialverformung durch Geozellenummantelung mit Erdruhedruck anstelle von aktivem Erddruck; einzelne Zellen mit quadratischer Grundfläche; Lasteinleitungsfläche über mehrere Zellen; Scherwiderstand durch Aufsummierung der Wandreibung jeder belasteten Zelle; Nachweis über vertikales Kräftegleichgewicht mit Widerstand aus Untergrund; Scherwiderstand nur bei ausreichender Relativverschiebung zwischen Füllmaterial und Zellwänden (gleichmäßige Verschiebung über mehrere Zellen, kein Ansatz von Scherwiderstand in diesem Bereich)
Nachweisverfahren mit rein <u>äußerlicher</u> Betrachtung der Bewehrungswirkung		
Emersleben (2010)	Allgemeines Grundbruchversagen an Zellensystem mit äußerlicher Betrachtung der Wirkungsweise des Verbundmaterials durch erhöhte Lastausbreitung	Einwirkung beschränkt auf Einzelzelle; Vergrößerte Lastfläche auf Untergrund durch Vergleichmäßigung der Einwirkung; Abbildung über erhöhten Lastausbreitungswinkel; Lastausbreitung aus Belastungsversuchen auf starrem Untergrund mit Messung der Horizontalspannungen bestimmt; Lastausbreitung auf jeweils drei Zellen begrenzt; Grundbruchnachweis über vertikales Kräftegleichgewicht mit Ansatz der undrainierten Scherfestigkeit aus dem Untergrund
Zhang et al. (2010b)	wie zuvor mit zusätzlichem Widerstand aus Membranwirkung der geozellenbewehrten Schicht	Erhöhte Lastausbreitung hier nicht auf die Breite von drei Geozellen begrenzt, sondern von Größe des Lastausbreitungswinkel abhängig; zusätzlicher Widerstand aus Membranwirkung der geozellenbewehrten Schicht infolge großer Setzungen über Gleichgewichtsbetrachtung an deformierten differenziellen Element; zusätzlicher Widerstand abhängig von Dehnsteifigkeit des Verbundmaterials und axialer Dehnung der Schicht (äquivalente Dehnsteifigkeit notwendig, Werte hierzu werden in Literaturstelle jedoch nicht angegeben); Gesamtwiderstand aus Lastausbreitung und Membranwirkung durch Superposition
Avesani Neto et al. (2013)	Wie zuvor, jedoch ohne Membranwirkung	Begrenzung der erhöhten Lastausbreitung auf die Breite jeweils einer Zelle neben der Lasteinleitung, da Zellwände vertikale Zwangsgleitflächen darstellen und Gleitflächen unterbrechen
Hedge & Sitharam (2015a)	ähnlich zu vorherigem Ansatz mit Superposition von Wandreibung, Lastausbreitung und Membranwirkung	Annahme rotationssymmetrischer Randbedingungen; Grundbruchwiderstand setzt sich aus Scherwiderstand der Wandreibung, erhöhter Lastausbreitung und Membranwirkung zusammen; für Membranwirkung wird von dreiecksförmiger Verformung der geozellenbewehrten Schicht ausgegangen; Herleitung weitestgehend vergleichbar zu Avesani Neto et al. (2013) und Zhang et al. (2010b)
Mehdipour et al. (2017)	Gesamtstandsicherheit von Stützkonstruktionen als bewehrte Erde-Konstruktion mit Geozellenbewehrung	Erweiterung von horizontalen Lamellenverfahren nach Nouri et al. (2006); Abbildung der Bewehrungslagen als äquivalente Balken in Böschung aus homogenen nichtbindigen Boden; ausschließliche Wirkung von Eigengewicht; Gleitlinie verläuft durch Böschungsfuß; Ansatz von Normal- und Querkraft sowie Moment aus freigeschnittener Geozellenbewehrung in Gleitfläche; Berücksichtigung von Sicherheitsfaktor (FOS) im Geländebruchnachweis über vertikales Kräftegleichgewicht; abschließende Lösung über Momentengrenzgleichgewicht um Mittelpunkt der kreisförmigen Gleitfläche

### Anhang A.3: Materialkennwerte zu dem Biegeversuch des mit Sand befüllten Zellstreifens

#### Zellstreifenmaterial



**Abb. A.1:** Foto zum Zugversuch



**Abb. A.2:** Kraft-Dehnungs-Diagramm aus Zugversuchen am Streifenmaterial aus PE-HD in Anlehnung an DIN EN ISO 10319



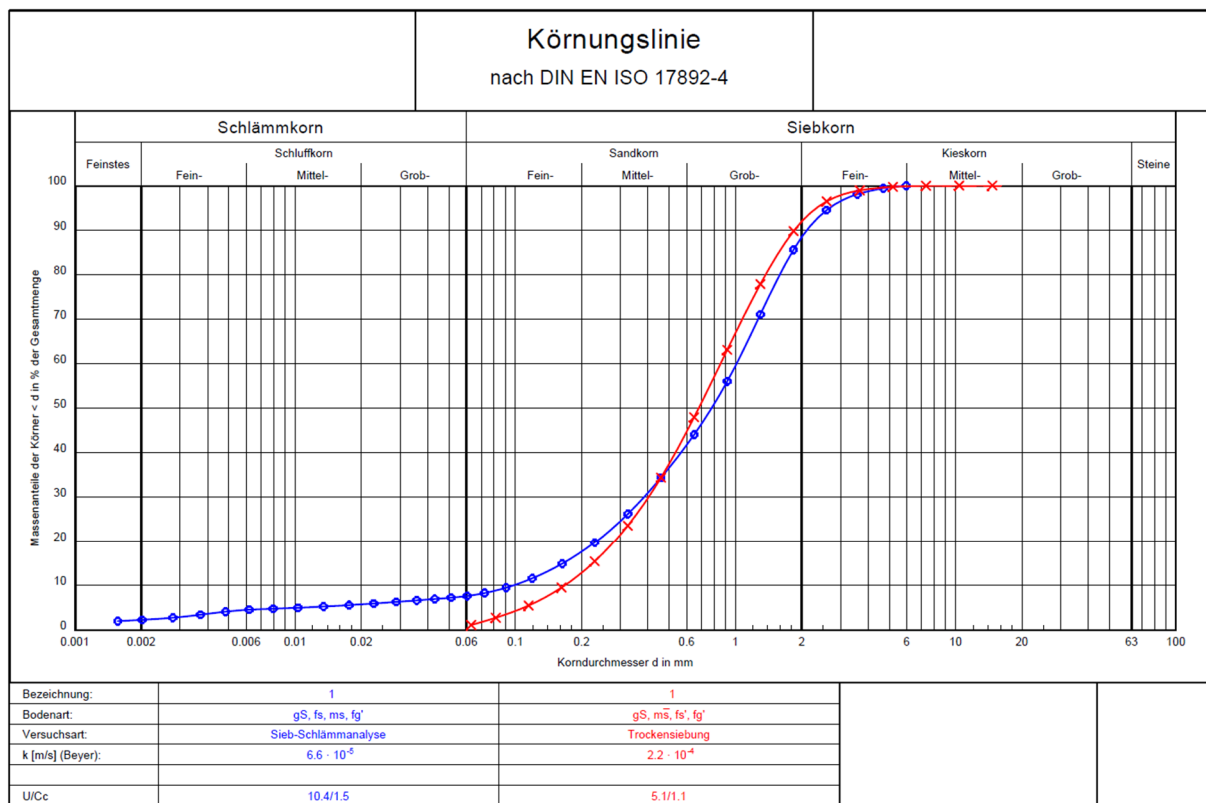
**Tab. A.5:** Übersicht zu den Zugversuchen am Streifenmaterial aus PE-HD

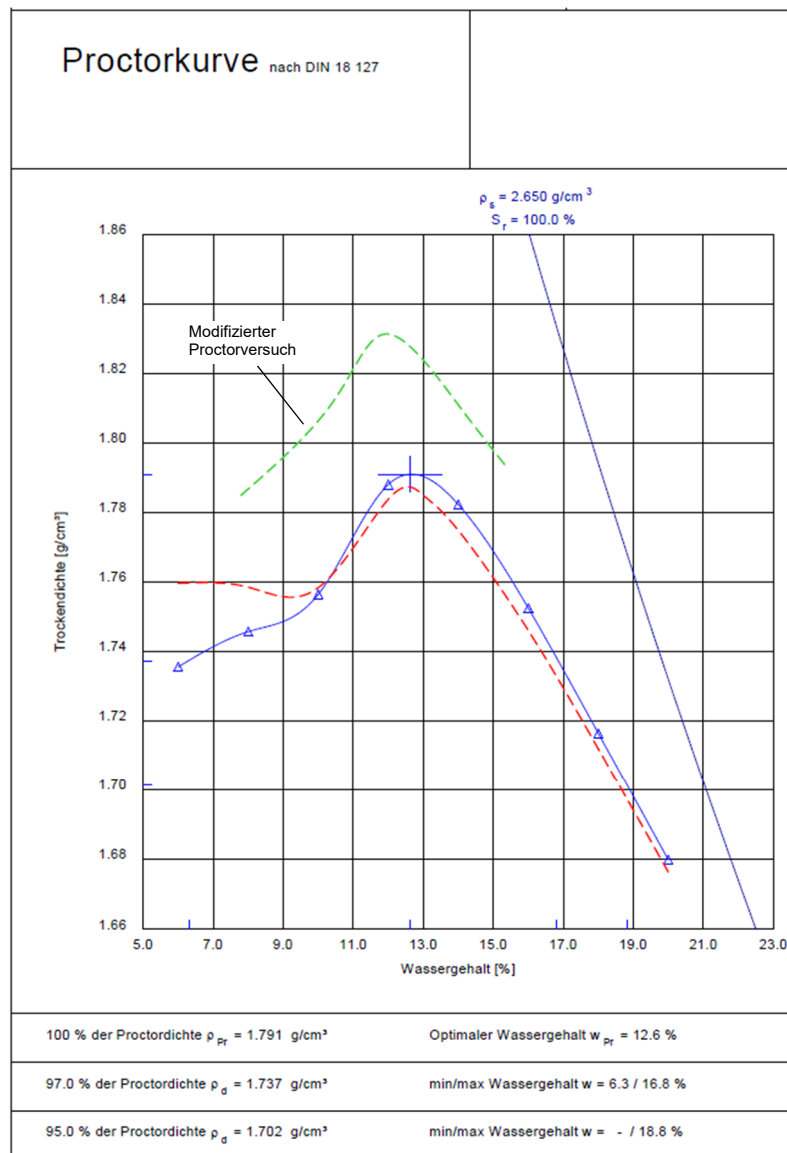
Versuch	Streifendicke	Streifenbreite	Streifenlänge	Vorspannkraft	Verschiebungsrate
	[mm]	[mm]	[mm]	[kN/m]	[mm/s]
ZV 1	1,5	120	555	0,45	0,5700
ZV 2	1,5	120	545	0,36	0,5731
ZV 3	1,5	120	565	0,89	0,5658

**Tab. A.6:** Ergebnisse zu den Zugversuchen am Streifenmaterial aus PE-HD

Versuch	Höchstzugkraft	Dehnung bei Höchstzugkraft	Dehnsteifigkeit [kN/m] über Sekantenmodul bei		
	[kN/m]	[%]	2 %	5 %	10 %
ZV 1	14,67	16,7	293,96	240,41	143,06
ZV 2	13,55	10,5	318,63	235,49	134,79
ZV 3	12,86	13,8	335,19	227,92	126,81

## Füllmaterial

**Abb. A.3:** Korngrößenverteilungen nach DIN EN ISO 17892-4:2017-04 für Versuchssand



**Abb. A.4:** Proctorversuch nach DIN 18127:2012-09 für Versuchssand

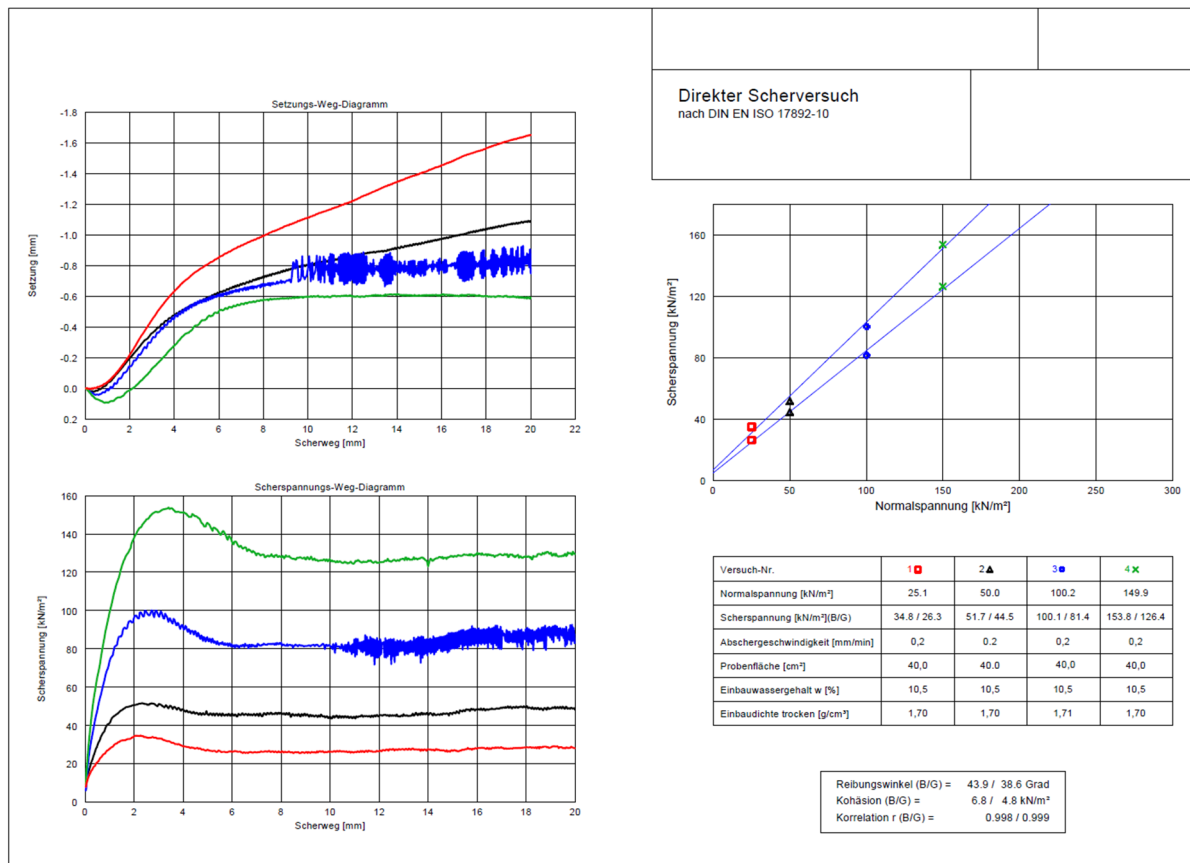


Abb. A.5: Direkter Scherversuche nach DIN EN ISO 17892-10:2019-04 für Versuchssand

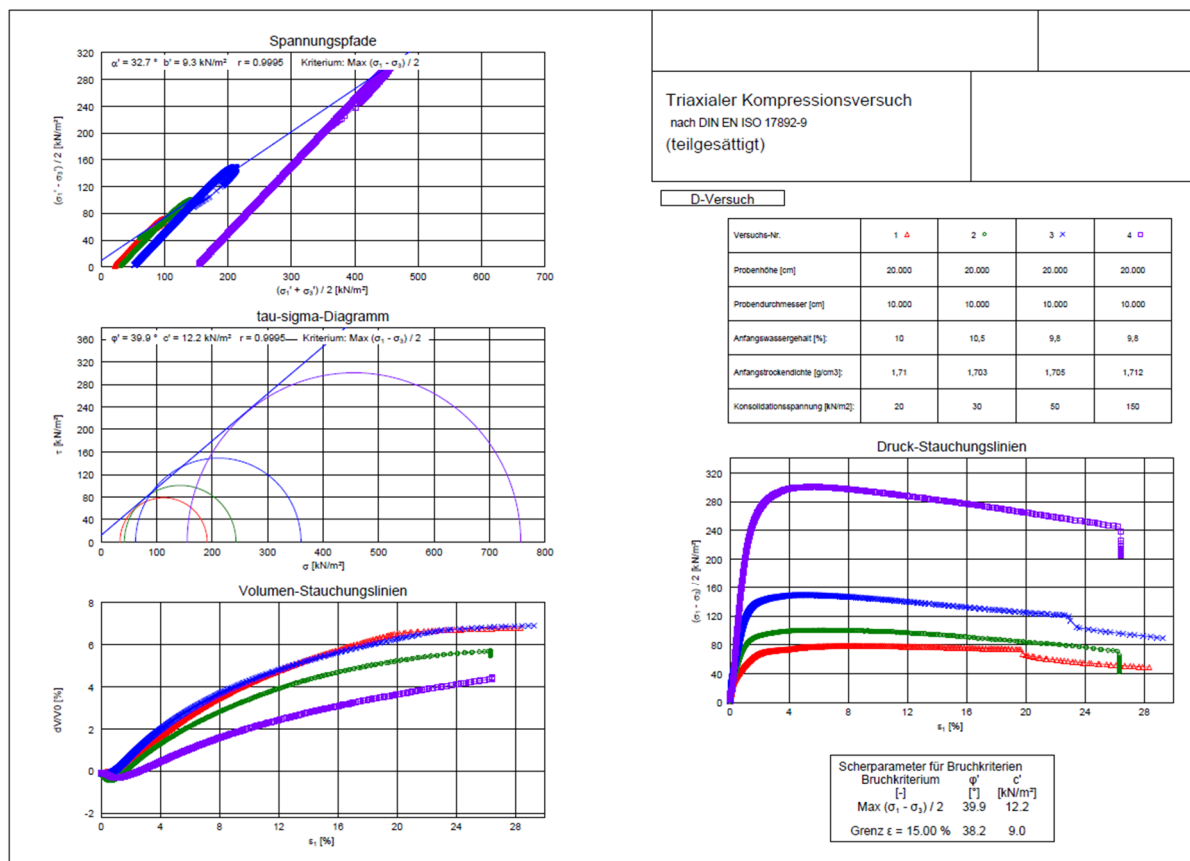


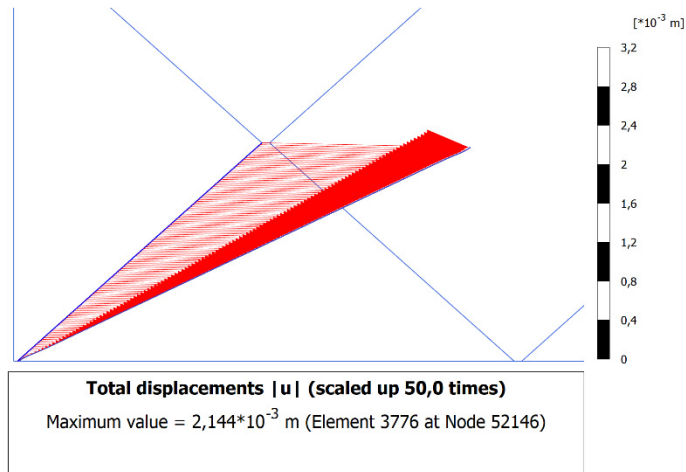
Abb. A.6: Triaxiale Kompressionsversuch nach DIN EN ISO 17892-8:2018-07 für Versuchssand

**Tab. A.7:** Übersicht zu den Materialkennwerten des Versuchssandes

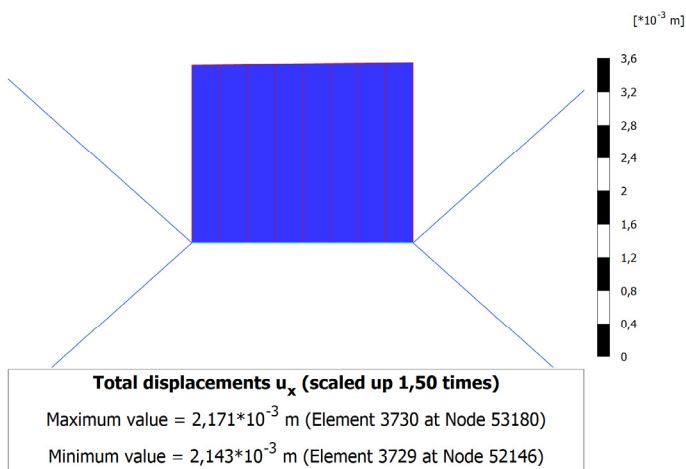
d <sub>10</sub> [mm]	d <sub>30</sub> [mm]	d <sub>50</sub> [mm]	d <sub>60</sub> [mm]	C <sub>u</sub> [-]	C <sub>c</sub> [-]
0,1 – 0,16	0,4	0,7 - 0,8	0,85 – 1,0	5,1 – 10,4	1,1 – 1,5
Bodenart			ρ <sub>d,min</sub> [g/cm³]	ρ <sub>d,max</sub> [g/cm³]	e <sub>max</sub> [-]
Grobsand, fein- bis mittelsandig			1,409	1,768	0,881
e <sub>min</sub> [-]	w <sub>Pr</sub> [%]	ρ <sub>Pr</sub> [g/cm³]	w <sub>Pr,mod</sub> [%]	ρ <sub>Pr,mod</sub> [g/cm³]	
0,500	12,6	1,791	11,8	1,832	
Scherfestigkeitsparameter (direkter Scherversuch) bei ρ <sub>d</sub> = 1,7 g/cm³ und w = 10,5 %					
φ <sup>‘</sup> <sub>Peak</sub> [°]	c <sup>‘</sup> <sub>Peak</sub> [kN/m²]	φ <sup>‘</sup> <sub>cv</sub> [°]	c <sup>‘</sup> <sub>cv</sub> [kN/m²]		
43,9	6,8	38,6	4,8		
Scherfestigkeitsparameter (triaxialer Kompressionsversuch) bei ρ <sub>d</sub> = 1,71 g/cm³ und w = 10,0 %					
φ <sup>‘</sup> <sub>Peak</sub> [°]	c <sup>‘</sup> <sub>Peak</sub> [kN/m²]	φ <sup>‘</sup> bei ε <sub>a</sub> = 15 % [°]		c <sup>‘</sup> bei ε <sub>a</sub> = 15 % [kN/m²]	
39,9	12,2	38,6		9,0	
Kennwerte für Einbauzustand im Biegeversuch von Zellstreifen					
w <sub>Einbau</sub> [%]	ρ <sub>d,Einbau</sub> [g/cm³]	e <sub>Einbau</sub> [-]	I <sub>D</sub> [%]	D <sub>Pr</sub> [%]	
8,0	1,710	0,550	86,9	95,2 %	

## Anhang B

Anhang B.1: Ergänzende Darstellungen zu den Modellierungsergebnissen für die Beispielberechnung im Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in  $x_1$ -Richtung



**Abb. B.1:** Resultierende Verschiebungsverteilung in geneigter Wand



**Abb. B.2:**  $u_x$ -Verteilung in Verbindungsstelle

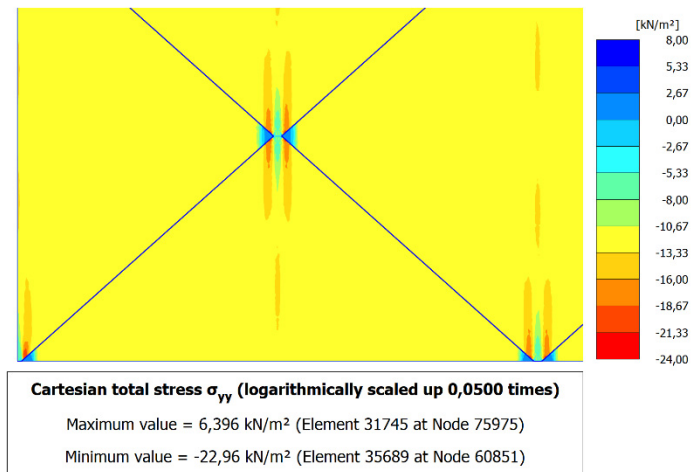
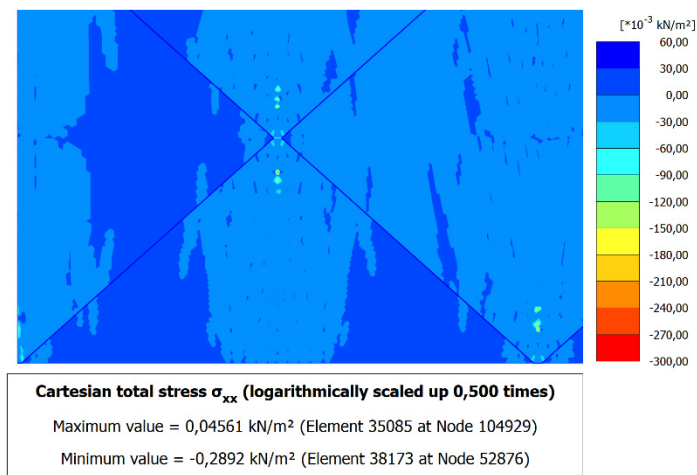
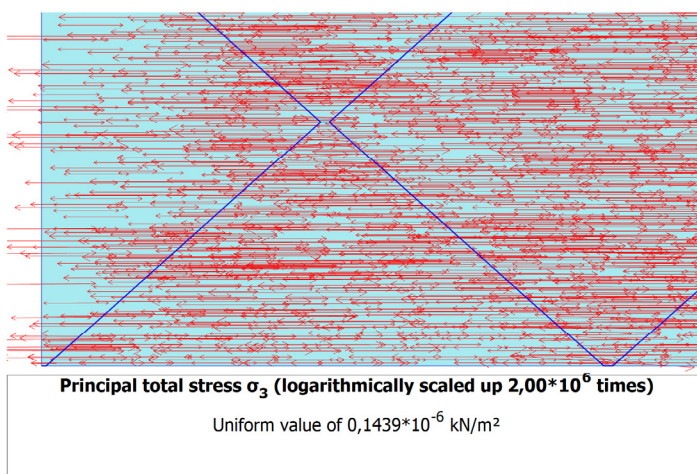
Abb. B.3:  $\sigma_{yy}$ -Verteilung im ModellausschnittAbb. B.4:  $\sigma_{xx}$ -Verteilung im Modellausschnitt

Abb. B.5: Minimale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt

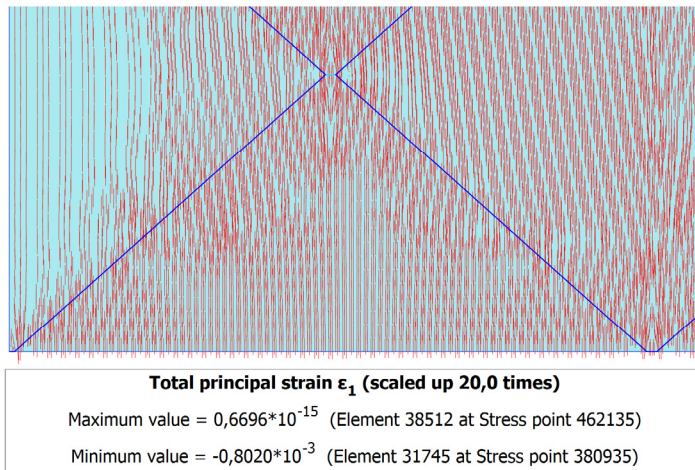


Abb. B.6: Maximale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

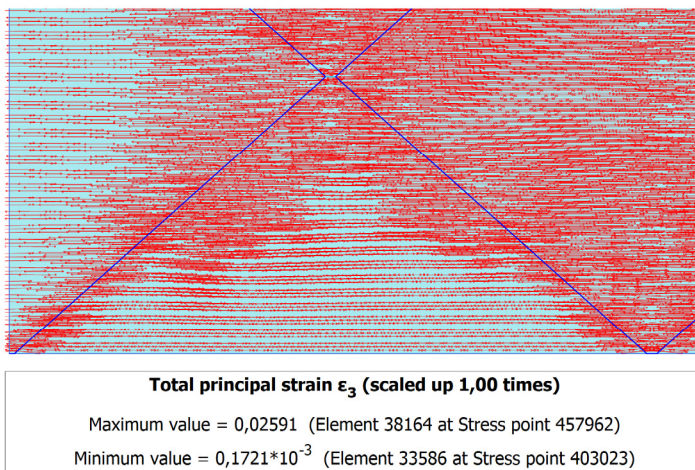


Abb. B.7: Minimale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

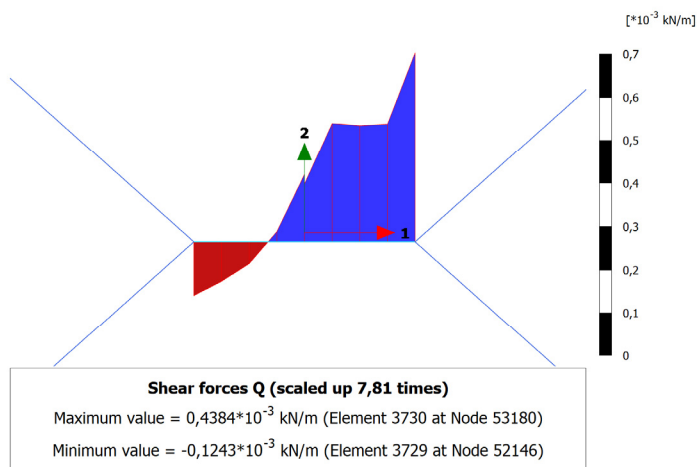
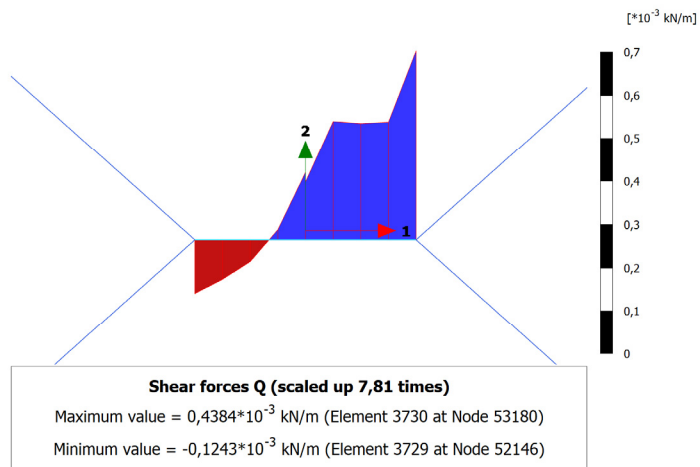


Abb. B.8: Querkraftverteilung in Verbindungsstelle (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)



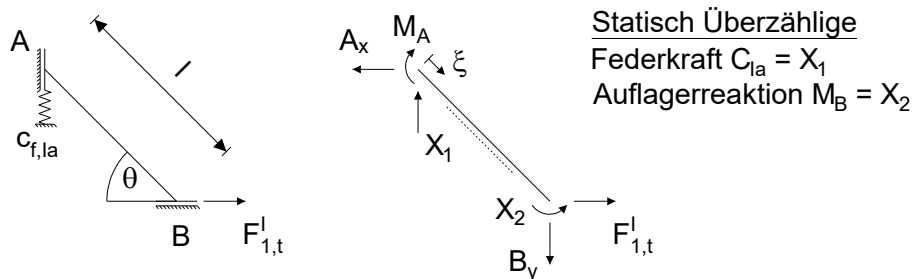
**Abb. B.9:** Momentenverteilung in Verbindungsstelle (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)



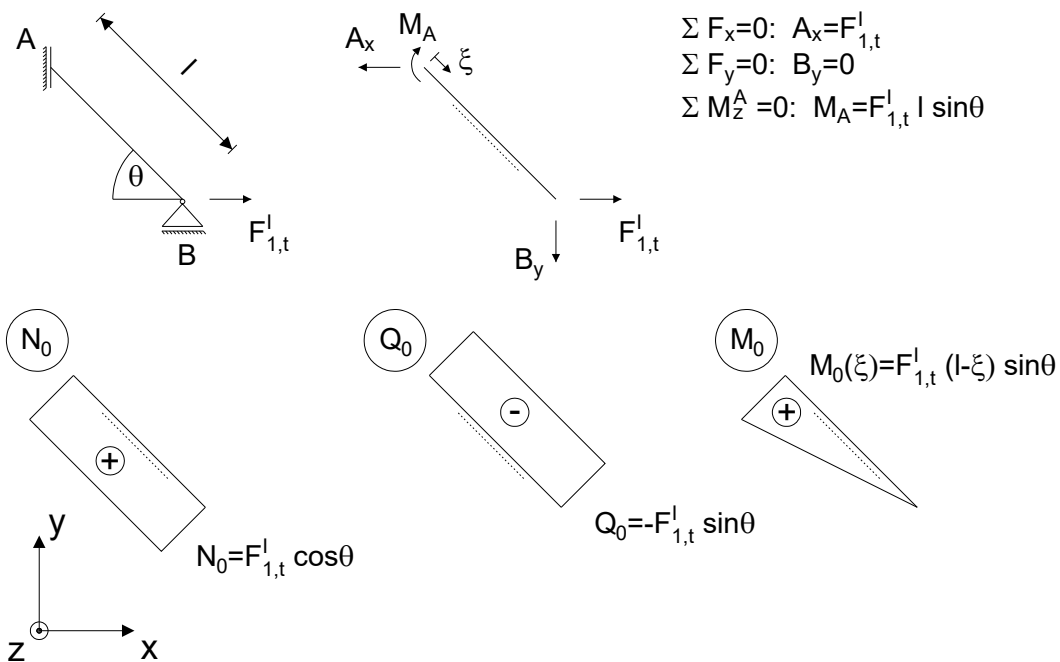
## Anhang B.2: Lösung zum statisch unbestimmten System im Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung

Schnittgrößenermittlung für 0-, 1- und 2-System

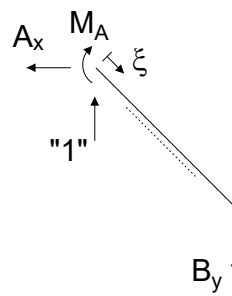
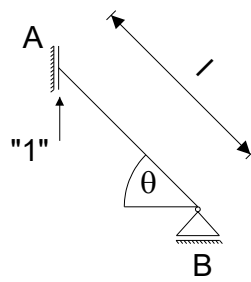
Ausgangssystem



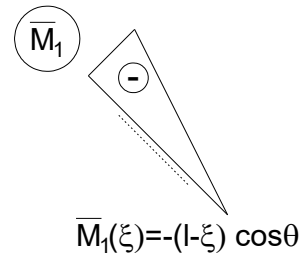
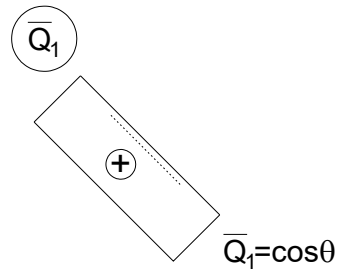
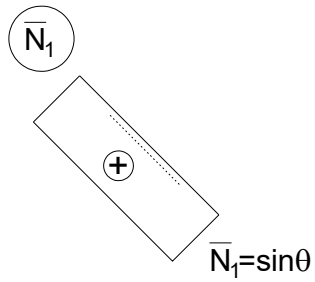
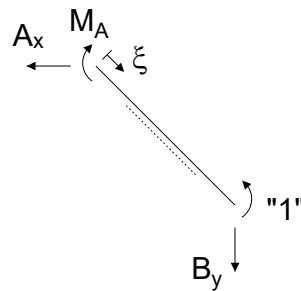
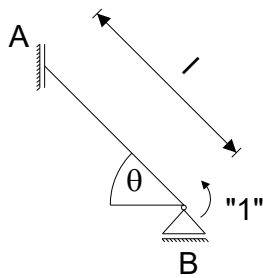
0-System



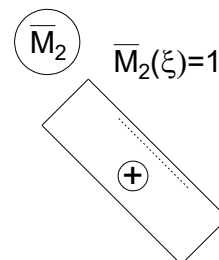
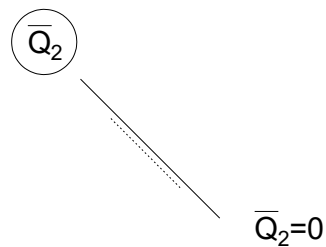
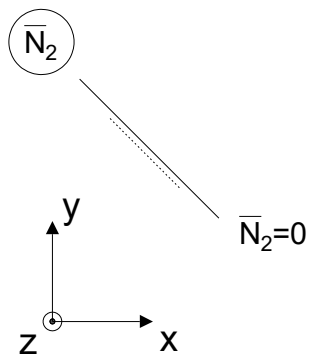
**Abb. B.10:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 0-System im Grundzustand Ia

1-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &= 0 \\ \Sigma F_y=0: B_y &= 1 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &= l \cos \theta\end{aligned}$$

2-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &= 0 \\ \Sigma F_y=0: B_y &= 0 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &= 1\end{aligned}$$



**Abb. B.11:** System und Zustandlinien der Schnittgrößen für das 1- und 2-System im Grundzustand Ia

Einflusszahlen  $\alpha_{ij}$  mit  $i, j = 0, 1$  und  $2$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

$$\alpha_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{Q_0 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = F_{1,t}^l l \sin \theta \cos \theta \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{11} = \int_0^l \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{20} = \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{F_{1,t}^l l^2 \sin \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = -\frac{l^2 \cos \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l}{EI_{cw}}$$

Gleichungssystem zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 = -\frac{X_1}{c_{f, Ia}} = u_y^A$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 = 0 = \psi_z^B$$

Lösung von Gleichungssystem für statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$C_{Ia} = X_1 = -F_{1,t}^l \sin \theta \cos \theta \cdot Y_t^l$$

$$M_B = X_2 = -\frac{F_{1,t}^l l \sin \theta}{2} (1 + Y_t^l \cos^2 \theta)$$

$$\text{mit: } Y_t^l = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f, Ia} l}}$$

## Resultierende Schnittgrößen

$$N = N_0 + X_1 \bar{N}_1 = F_{1,t}^l \cos \theta (1 - Y_t^l \sin^2 \theta) = F_{1,t}^l \cos \theta \frac{\frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}$$

$$\text{mit: } \bar{N}_2 = 0$$

$$Q = Q_0 + X_1 \bar{Q}_1 = -F_{1,t}^l \sin \theta (1 + Y_t^l \cos^2 \theta) = -F_{1,t}^l \sin \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}$$

$$\text{mit: } \bar{Q}_2 = 0$$

$$M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2$$

$$= F_{1,t}^l \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \sin \theta (1 + Y_t^l \cos^2 \theta) = F_{1,t}^l \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \sin \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,la}l}}$$

## Verschiebung am Punkt A in y-Richtung

$$u_y^A = -\frac{X_1}{c_{f,la}} = F_{1,t}^l \sin \theta \cos \theta \frac{Y_t^l}{c_{f,la}} = F_{1,t}^l l \sin \theta \cos \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{EI_{cw}}}{c_{f,la}l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

## Verschiebung am Punkt B in x-Richtung mittels Satz von Castigliano (Dankert &amp; Dankert 2006)

$$u = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial F} ds + \frac{C}{c} \frac{\partial C}{\partial F}$$

$$u_x^B = \int_0^l \frac{N}{EA_{cw}} \frac{\partial N}{\partial F_{1,t}^l} d\xi + \int_0^l \frac{Q}{GA_{cw}} \frac{\partial Q}{\partial F_{1,t}^l} d\xi + \int_0^l \frac{M}{EI_{cw}} \frac{\partial M}{\partial F_{1,t}^l} d\xi + \frac{X_1}{c_{f,la}} \frac{\partial X_1}{\partial F_{1,t}^l}$$

$$= F_{1,t}^l l \left[ \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} (1 - Y_t^l \sin^2 \theta)^2 + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \sin^2 \theta (1 + Y_t^l \cos^2 \theta)^2 + \frac{Y_t^{l^2}}{c_{f,la}l} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]$$

## Matlab Skript

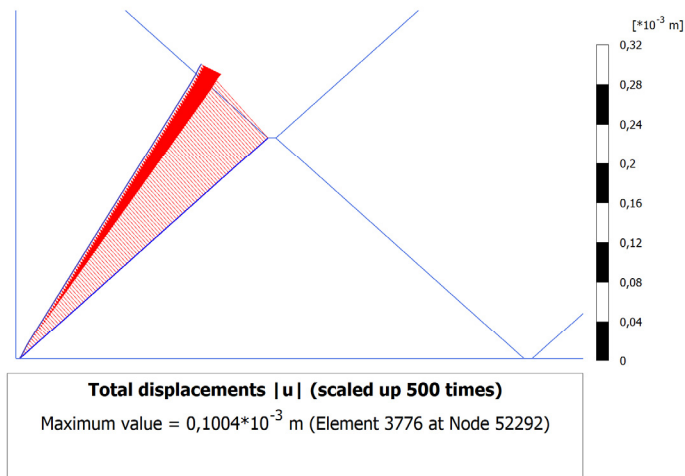
```

1  %% Statically indeterminate calculation for basic loading I tension
2  clear all; close all; format LongE;
3  % Variables
4  syms l e h theta; % Geometry
5  syms zetal zeta2; % Local coordinates
6  syms F; % Load
7  syms EI EA GA c; % Material properties
8  % Values
9  Lch0=0.259/2; h0=0.002; Wch0=0.224/2; Linc0=Lch0-2*h0; le0=(Linc0^2+Wch0^2)^0.5; theta0=atan(Wch0/Linc0); t0=0.0017; Ecw0=588235.3; Hc0=1; Ef0=1000;
10 F0=3.5/2; EA0=Ecw0*t0*Hc0; GA0=5/12*EA0; EIO=Ecw0*Hc0*t0^3/12; c0=Ef0*Lch0*Hc0/Wch0; % Piaxis definition for GA0 = 5/12*EA0/(1+n0); here: n0=0;
11 %% Stress resultants Sik
12 %% 0-System
13 NOI=F*cos(theta); QOI=-F*sin(theta); MOI=F*(le-zetal)*sin(theta); % Inclined wall
14 NOII=F; % Horizontal wall
15
16 %% 1-System
17 NII=sin(theta); QII=cos(theta); MII=-(le-zetal)*cos(theta);
18 NIII=0;
19
20 %% 2-System
21 N2I=0; Q2I=0; M2I=1;
22 N2II=0;
23
24 %% Influence numbers alphaij
25 alpha10=int(NOI*NII/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*QII/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*MI/EA,zetal,[0 le]);
26 alpha11=int(NII*NII/EA,zetal,[0 le])+int(QII*QII/GA,zetal,[0 le])+int(MII*MI/EA,zetal,[0 le]);
27 alpha20=int(NOI*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*M2I/EA,zetal,[0 le]);
28 alpha12=int(NII*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QII*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MII*M2I/EA,zetal,[0 le]);
29 alpha22=int(N2I*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(Q2I*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(M2I*M2I/EA,zetal,[0 le]);
30
31 % Indeterminates X1 & uA2
32 % Horizontal wall has no impact and can be neglected
33 A=[alpha11+1/c alpha12; alpha12 alpha22]; b=[-alpha10; -alpha20]; solu=linsolve(A,b); X1=solu(1,1); X2=solu(2,1); uA2=X1/c;
34 X1val=double(subs(X1,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
35 X2val=double(subs(X2,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
36 uA2val=double(X1val/c0);
37
38 %% Final stress resultants Sk
39 NI=NOI+X1*NII+X2*N2I;
40 QI=QOI+X1*QII+X2*Q2I;
41 MI=MOI+X1*MI+X2*M2I;
42
43 Nival=double(subs(NI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
44 Qival=double(subs(QI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
45 Mival=double(subs(MI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
46 Mifun=(subs(MI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
47 Res=[Nival; Qival; Mival];
48 figure(1)
49 fplot(Mifun,[0 le0]); title('MI');
50
51 %% uB1 with Castigliano theorem
52 % Contribution of part II to strain energy must be considered here
53 U=int(NI^2/(2*EA),zetal,[0 le])+int(QI^2/(2*GA),zetal,[0 le])+int(MI^2/(2*EI),zetal,[0 le])...
54 +X1^2/(2*c)+2*int(NOII^2/(2*EA),zeta2,[0 h]); % times two since there are two horizontal walls in RVE
55 uB1Cas=diff(U,F);
56 uB1Casval=double(subs(uB1Cas,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));
57
58 % Alternativ version of Castigliano
59 uB1Casalt=int(diff(NI,F)*NI/EA,zetal,[0 le])+int(diff(QI,F)*QI/GA,zetal,[0 le])...
60 +int(diff(MI,F)*MI/EI,zetal,[0 le])+diff(X1,F)*X1/c+2*int(diff(NOII,F)*NOII/EA,zeta2,[0 h]);
61 uB1Casaltval=double(subs(uB1Casalt,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EIO c0]));

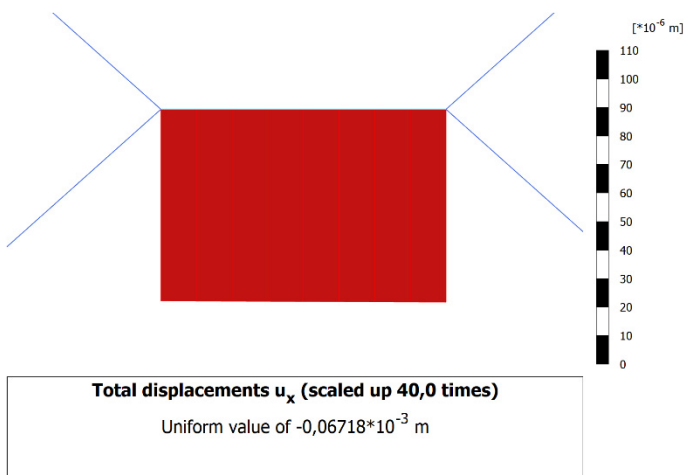
```

Abb. B.12: Matlab Skript für Grundzustand Ia

Anhang B.3: Ergänzende Darstellungen zu den Modellierungsergebnissen für die Beispielberechnung im Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in  $x_1$ -Richtung



**Abb. B.13:** Resultierende Verschiebungsverteilung in geneigter Wand



**Abb. B.14:**  $u_x$ -Verteilung in Verbindungsstelle

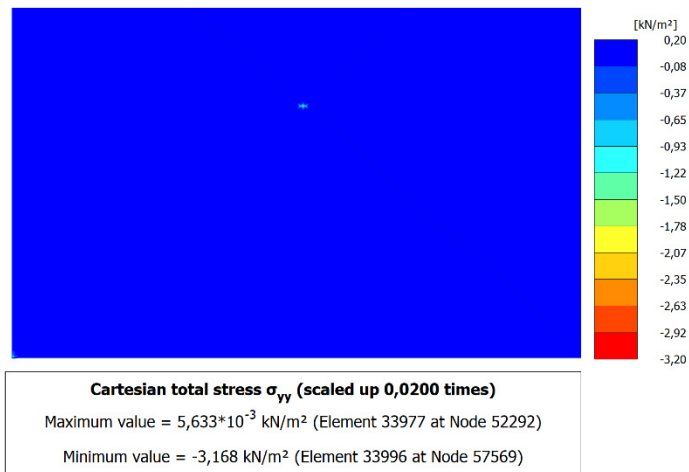
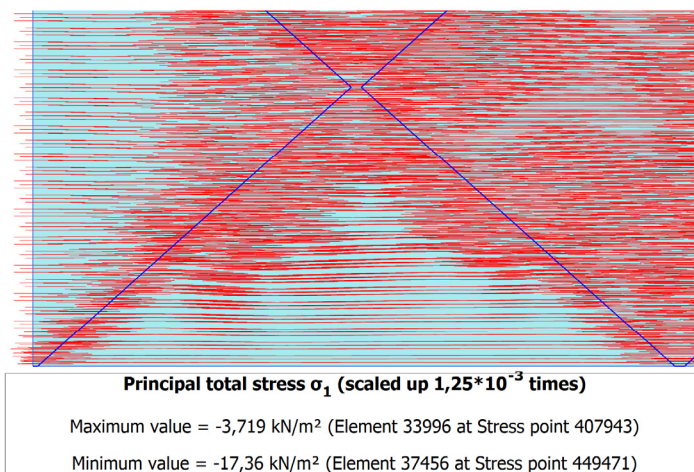
Abb. B.15:  $\sigma_{yy}$ -Verteilung im Modellausschnitt

Abb. B.16: Maximale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt

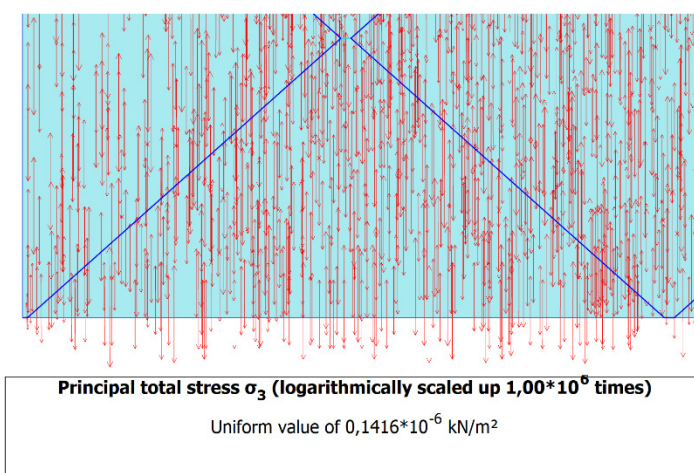
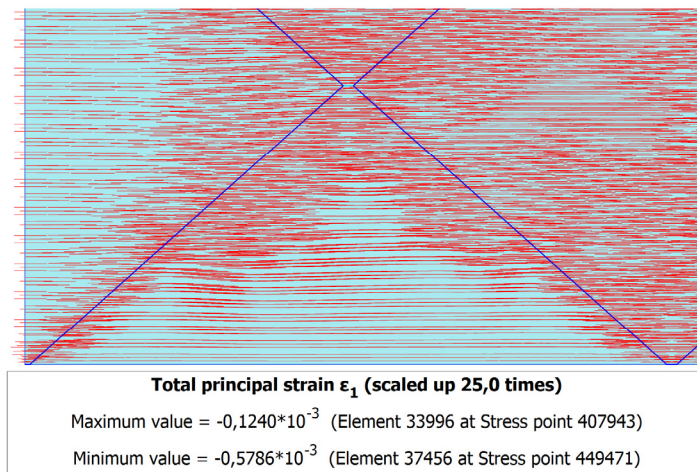
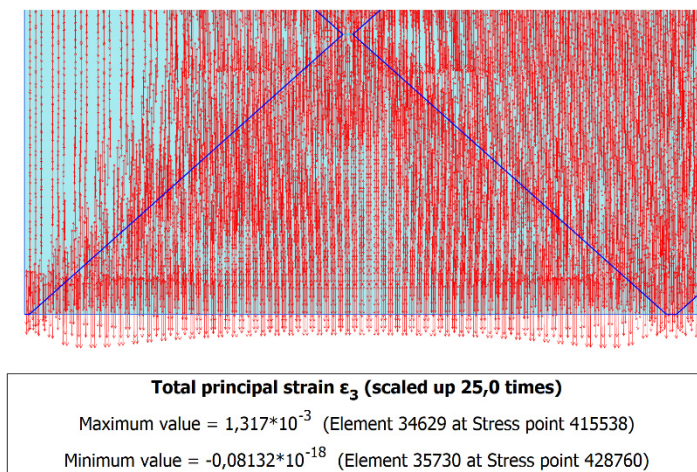


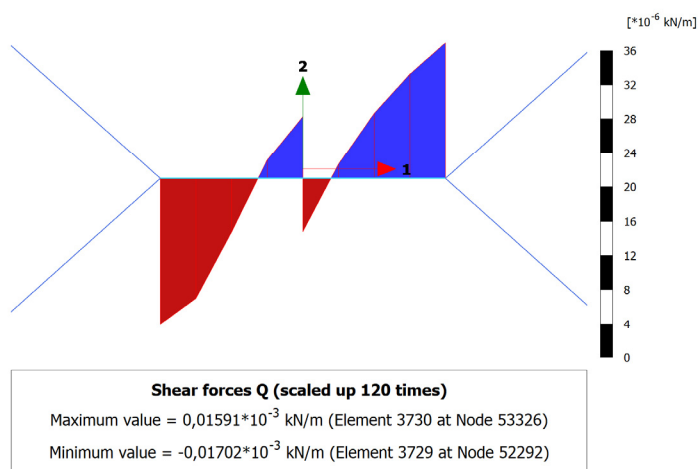
Abb. B.17: Minimale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt



**Abb. B.18:** Maximale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

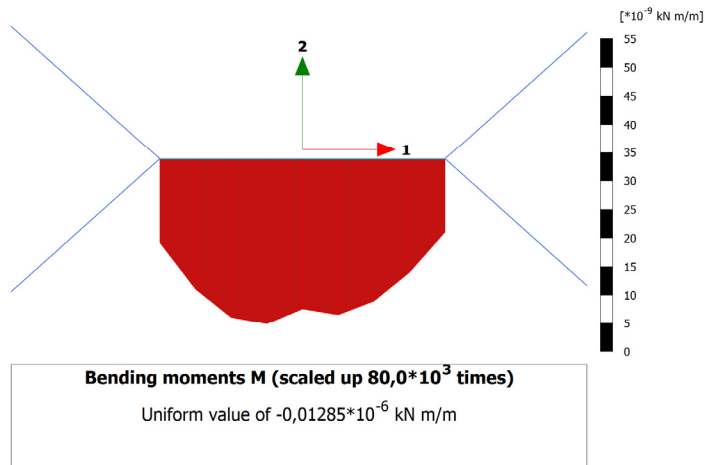


**Abb. B.19:** Minimale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt



**Abb. B.20:** Querkraftverteilung in Verbindungsstelle (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)



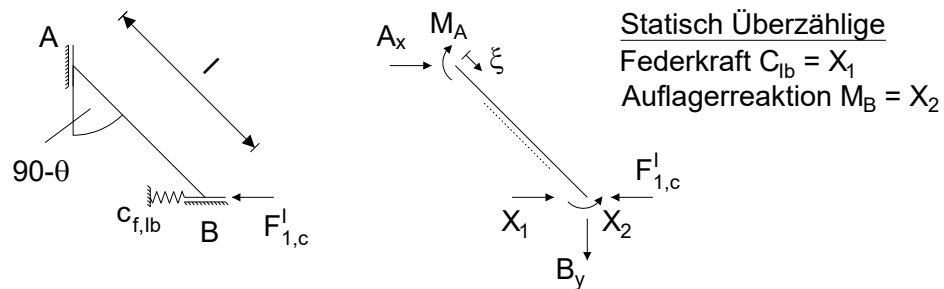


**Abb. B.21:** Momentenverteilung in Verbindungsstelle (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)

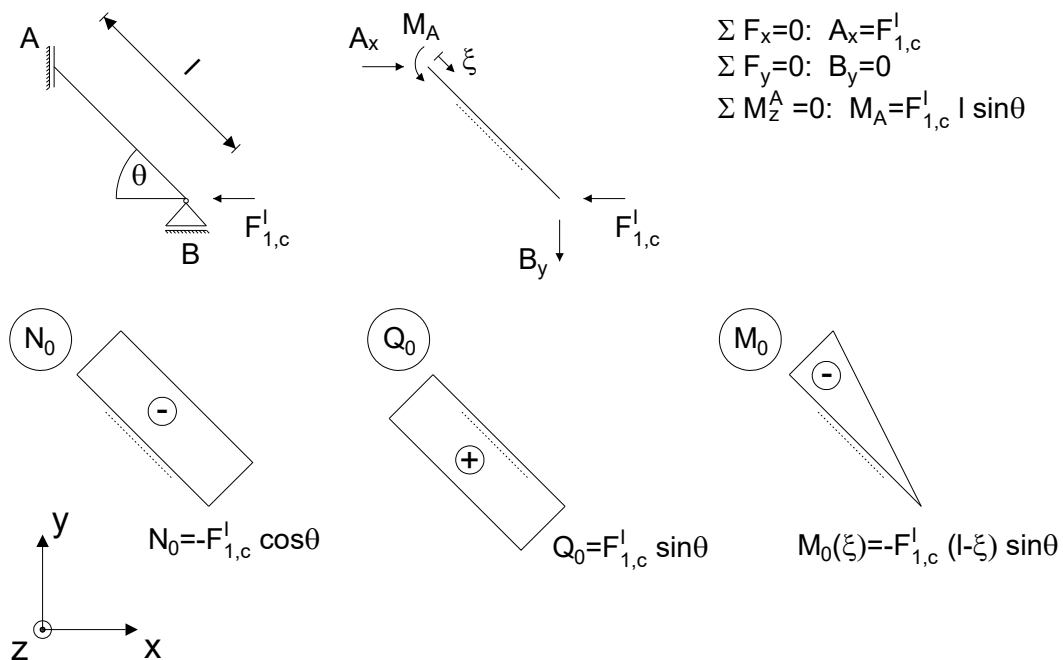
# Anhang B.4: Lösung zum statisch unbestimmten System im Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung

## Schnittgrößenermittlung für 0-, 1- und 2-System

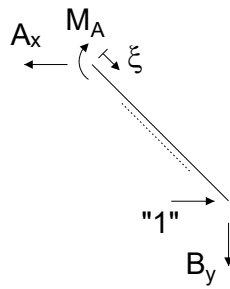
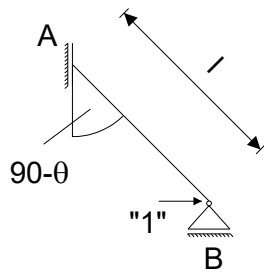
### Ausgangssystem



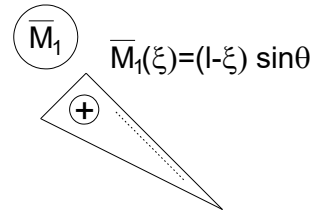
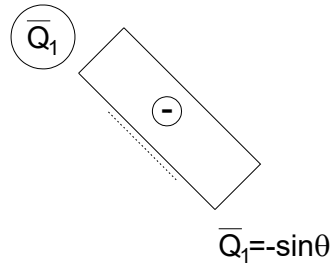
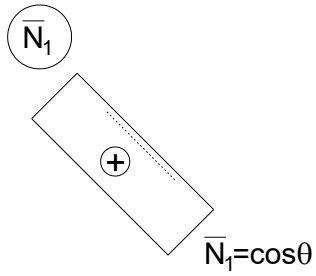
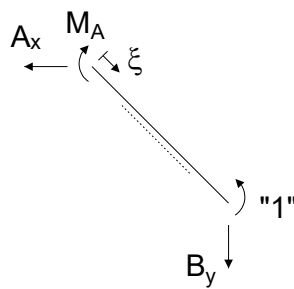
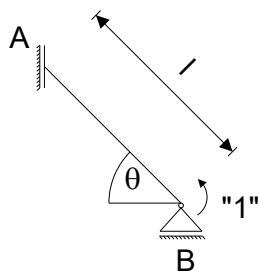
### 0-System



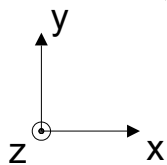
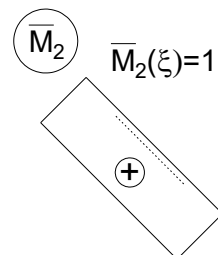
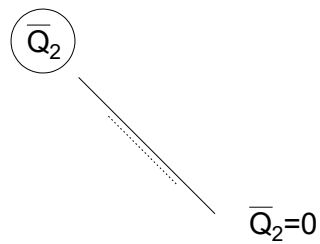
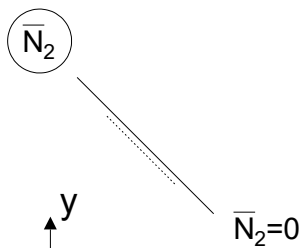
**Abb. B.22:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 0-System im Grundzustand Ib

1-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &= 1 \\ \Sigma F_y=0: B_y &= 0 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &= l \sin \theta\end{aligned}$$

2-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &= 0 \\ \Sigma F_y=0: B_y &= 0 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &= 1\end{aligned}$$



**Abb. B.23:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 1- und 2-System im Grundzustand Ib

Einflusszahlen  $\alpha_{ij}$  mit  $i, j = 0, 1$  und  $2$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

$$\alpha_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{Q_0 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = -F_{1,c}^l l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{11} = \int_0^l \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{20} = \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = -\frac{F_{1,c}^l l^2 \sin \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l^2 \sin \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l}{EI_{cw}}$$

Gleichungssystem zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 = -\frac{X_1}{c_{f,lb}} = u_x^B$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 = 0 = \psi_z^B$$

Lösung von Gleichungssystem für statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$C_{lb} = X_1 = F_{1,c}^l \cdot Y_c^l$$

$$M_B = X_2 = -\frac{F_{1,c}^l l \sin \theta}{2} (Y_c^l - 1)$$

$$\text{mit: } Y_c^l = \frac{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,lb} l}}$$

Resultierende Schnittgrößen

$$N = N_0 + X_1 \bar{N}_1 = F_{1,c}^l \cos \theta (Y_c^l - 1) = \frac{-F_{1,c}^l \cos \theta}{c_{f,lb} l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

$$\text{mit: } \bar{N}_2 = 0$$

$$Q = Q_0 + X_1 \bar{Q}_1 = -F_{1,c}^l \sin \theta (Y_c^l - 1) = \frac{F_{1,c}^l \sin \theta}{c_{f,lb} l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

$$\text{mit: } \bar{Q}_2 = 0$$

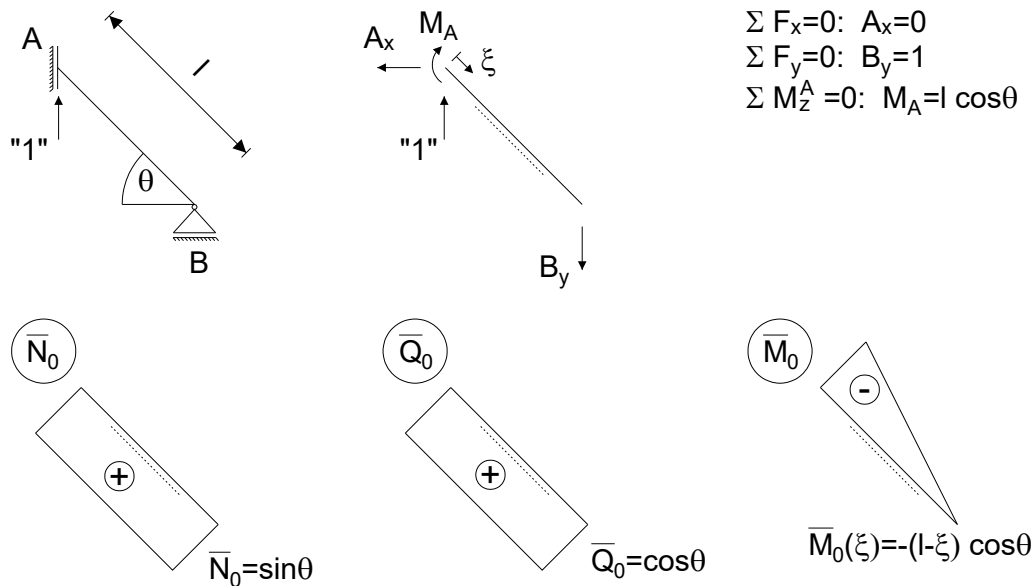
$$M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 = F_{1,c}^I \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \sin \theta (Y_c^I - 1) = \frac{-F_{1,c}^I \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \sin \theta}{c_{f,lb} l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

Verschiebung am Punkt B in x-Richtung

$$u_x^B = -\frac{X_1}{c_{f,lb}} = -F_{1,c}^I \frac{Y_c^I}{c_{f,lb}} = -\frac{F_{1,c}^I l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} \right)}{c_{f,lb} l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

Verschiebung im Punkt A in y-Richtung mittels Reduktionssatz

Zugeordnetes statisch bestimmtes System für Reduktionssatz



**Abb. B.24:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für den Reduktionssatz im Grundzustand Ib

Reduktionssatz (Gross et al. 2011a)

$$u = \int \frac{M \bar{M}_0}{EI} ds + \int \frac{N \bar{N}_0}{EA} ds + \int \frac{Q \bar{Q}_0}{GA} ds$$

$$u_y^A = F_{1,c}^I l \sin \theta \cos \theta (Y_c^I - 1) \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$$

## Matlab Skript

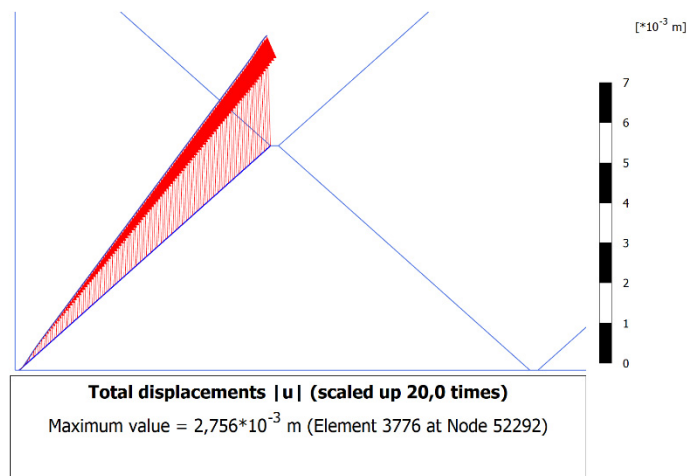
```

1  %% Statically indeterminate calculation for basic loading I compression
2  clear all; close all; format LongE;
3  % Variables
4  syms l e h theta; % Geometry;
5  syms zetal zeta2; % Local coordinates
6  syms F; % Load
7  syms EI EA GA c; % Material properties
8  % Values
9  Lch0=0.259/2; h0=0.002; Wch0=0.224/2; Linc0=Lch0-2*h0; le0=(Linc0^2+Wch0^2)^0.5; theta0=atan(Wch0/Linc0); t0=0.0017; Ecw0=588235.3; Hc0=1; EF0=30000;
10 F0=1.75; EA0=Ecw0*t0*Hc0; GA0=5/12*EA0; EI0=Ecw0*Hc0*t0^3/12; c0=EF0*Wch0*Hc0/(Lch0-h0); % Plaxis definition for GA0 = 5/12*EA0/(1+nu0); here: nu0=0;
11 %% Stress resultants Sik
12 % 0-System
13 N0I=-F*cos(theta); Q0I=F*sin(theta); M0I=-F*(1e-zetal)*sin(theta); % Inclined walls
14 N0II=-F; % Horizontal wall
15
16 % 1-System
17 N1I=cos(theta); Q1I=-sin(theta); M1I=(1e-zetal)*sin(theta);
18 N1II=0;
19
20 % 2-System
21 N2I=0; Q2I=0; M2I=1;
22 N2II=0;
23
24 %% Influence numbers alphaij
25 alpha10=int(N0I*N1I/EA,zetal,[0 1e]);int(Q0I*Q1I/GA,zetal,[0 1e]);int(M0I*M1I/EI,zetal,[0 1e]);
26 alpha11=int(N1I*N1I/EA,zetal,[0 1e]);int(Q1I*Q1I/GA,zetal,[0 1e]);int(M1I*M1I/EI,zetal,[0 1e]);
27 alpha20=int(N0I*N2I/EA,zetal,[0 1e]);int(Q0I*Q2I/GA,zetal,[0 1e]);int(M0I*M2I/EI,zetal,[0 1e]);
28 alpha12=int(N1I*N2I/EA,zetal,[0 1e]);int(Q1I*Q2I/GA,zetal,[0 1e]);int(M1I*M2I/EI,zetal,[0 1e]);
29 alpha22=int(N2I*N2I/EA,zetal,[0 1e]);int(Q2I*Q2I/GA,zetal,[0 1e]);int(M2I*M2I/EI,zetal,[0 1e]);
30
31 % Indeterminates X1 & uB1
32 % Displacement from horizontal walls is considered in an additional term
33 A=[alpha11+1/c alpha12; alpha12 alpha22]; b=[-alpha10; -alpha20]; solu=linsolve(A,b); X1=solu(1,1);X2=solu(2,1); uBlincl=X1/c;
34 X1val=double(subs(X1,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
35 X2val=double(subs(X2,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
36 uBlinclval=double(X1val/c0)
37 uBlhorzval=2*F0/EA0*h0; % Not further considered, since solution is incorrect for application of stress instead of force
38 uBlval=uBlinclval+uBlhorzval % Not further considered
39 %% Final stress resultants Sk
40 NI=N0I+X1*N1I+X2*N2I;
41 QI=Q0I+X1*Q1I+X2*Q2I;
42 MI=M0I+X1*M1I+X2*M2I;
43
44 N1val=double(subs(NI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
45 Q1val=double(subs(QI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
46 M1val=double(subs(MI,[le theta F EA GA EI c zetal],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0 0]));
47 M1fun=(subs(MI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
48 Res=[N1val; Q1val; M1val]
49 % figure(1)
50 % fplot(M1fun,[0 le0]); title('MI');
51
52 %% Reduction theorem for uA2
53 N00I=sin(theta); Q00I=cos(theta); M00I=-(1e-zetal)*cos(theta);
54 uA2Red=int(NI*N00I/EA,zetal,[0 1e])+int(QI*Q00I/GA,zetal,[0 1e])+int(MI*M00I/EI,zetal,[0 1e]);
55 uA2Redval=double(subs(uA2Red,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]))

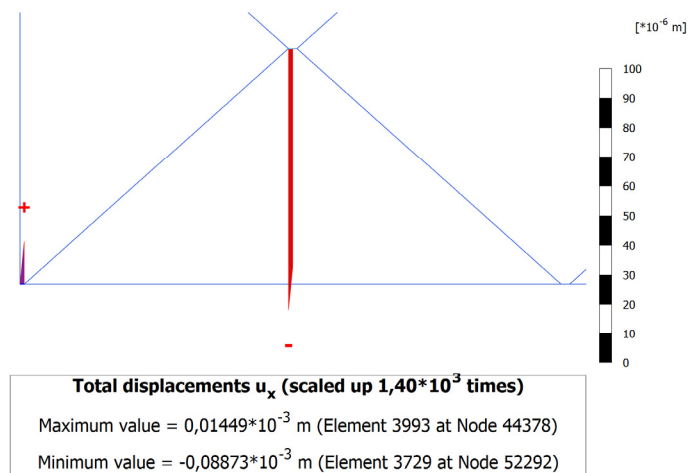
```

Abb. B.25: Matlab Skript für Grundzustand Ib

Anhang B.5: Ergänzende Darstellungen zu den Modellierungsergebnissen für die Beispielberechnung im Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in  $x_2$ -Richtung



**Abb. B.26:** Resultierende Verschiebungsverteilung in geneigter Wand



**Abb. B.27:**  $u_x$ -Verteilungen in den beiden relevanten Verbindungsstellen

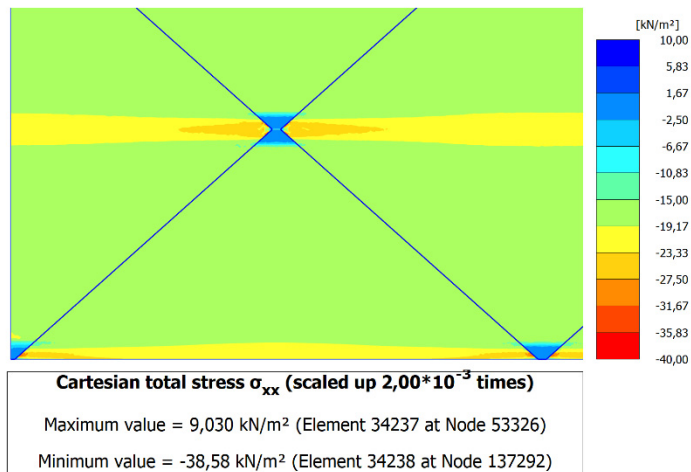
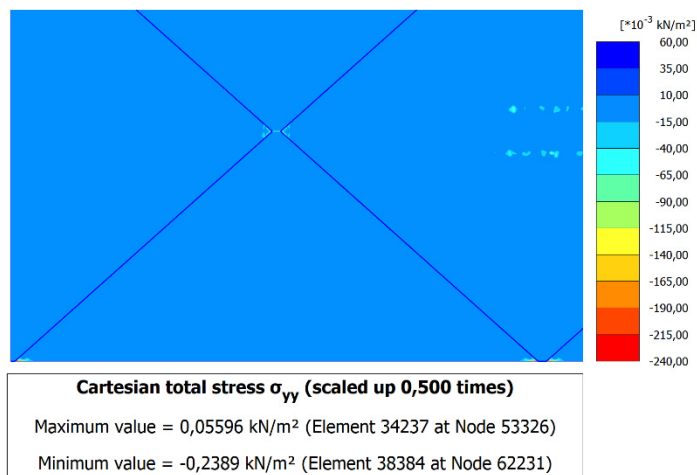
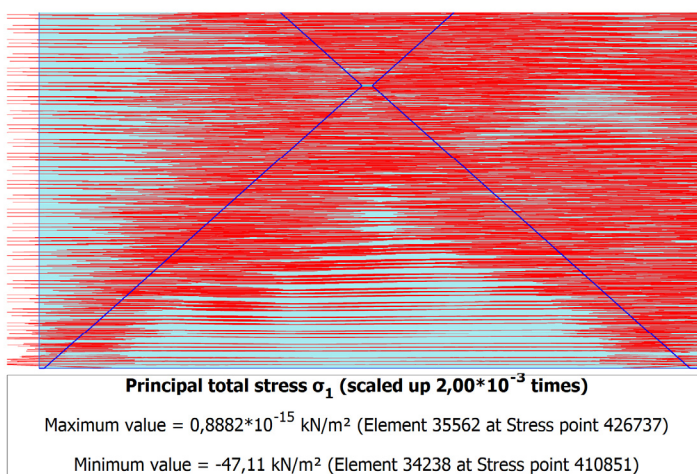
Abb. B.28:  $\sigma_{xx}$ -Verteilung im ModellausschnittAbb. B.29:  $\sigma_{yy}$ -Verteilung im Modellausschnitt

Abb. B.30: Maximale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt



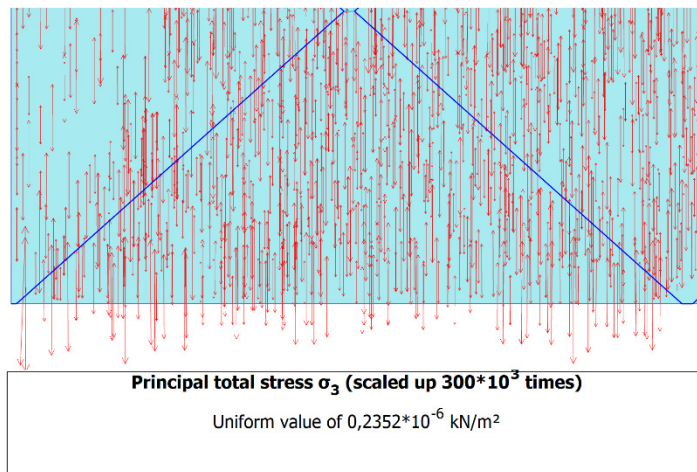


Abb. B.31: Minimale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt

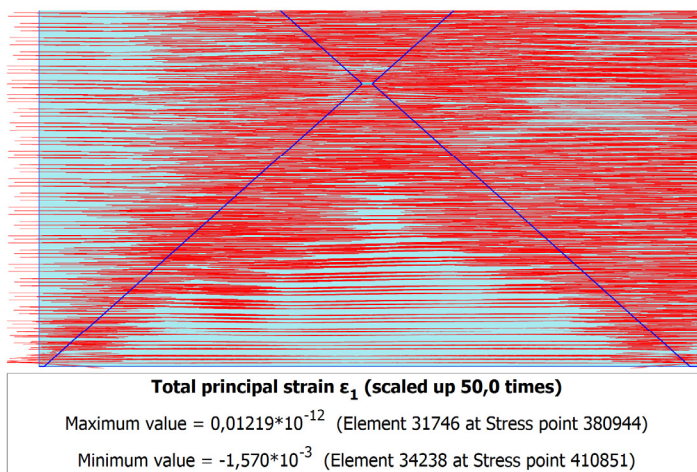


Abb. B.32: Maximale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

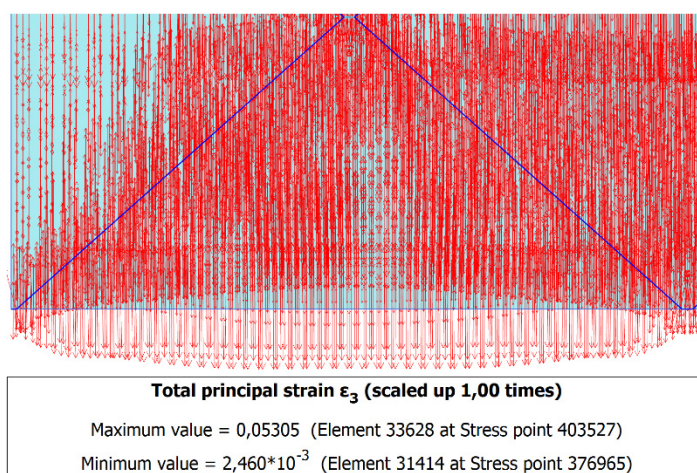
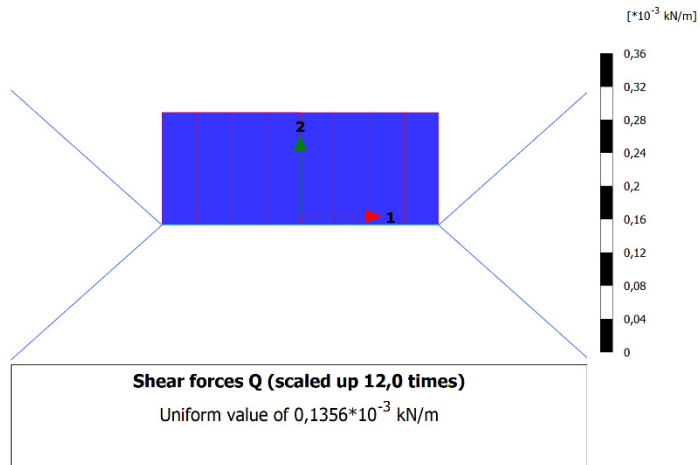
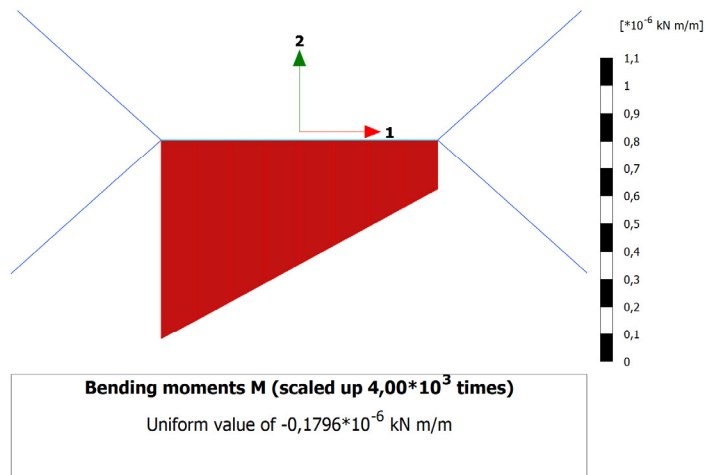


Abb. B.33: Minimale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt



**Abb. B.34:** Querkraftverteilung in Verbindungsstelle (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)

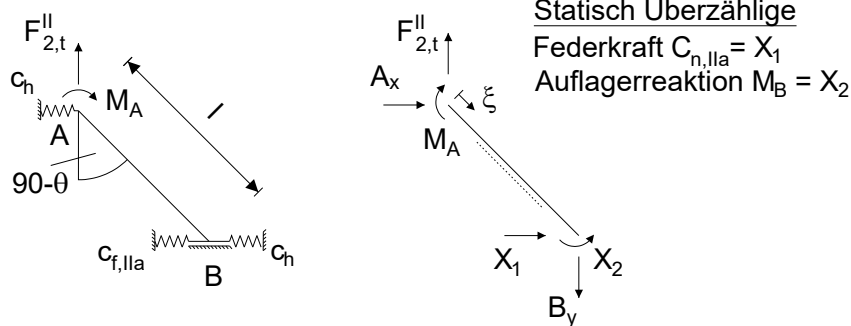


**Abb. B.35:** Momentenverteilung in Verbindungsstelle (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)

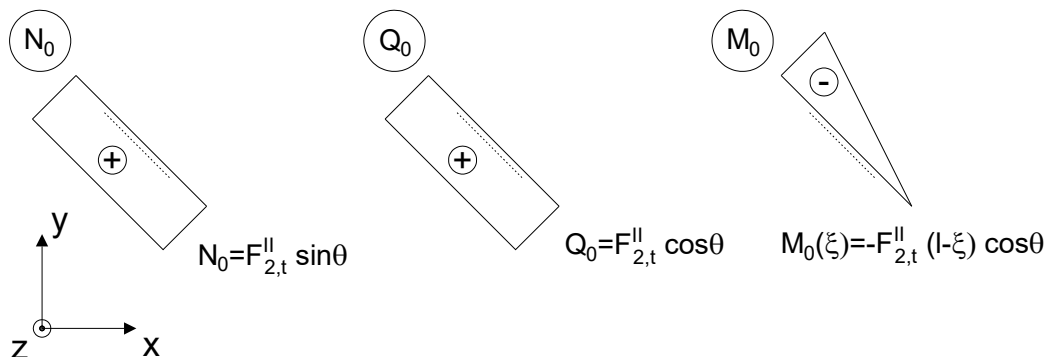
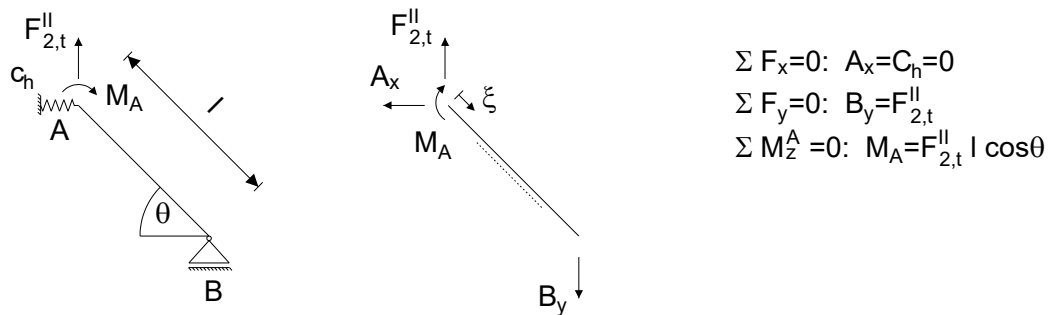
# Anhang B.6: Lösung zum statisch unbestimmten System im Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung

## Schnittgrößenermittlung für 0-, 1- und 2-System

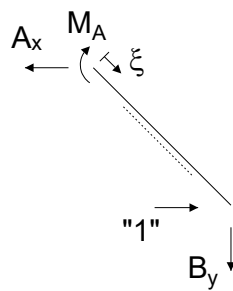
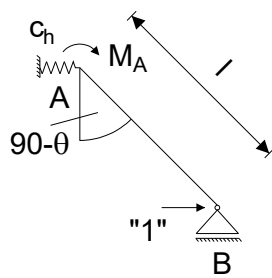
### Ausgangssystem



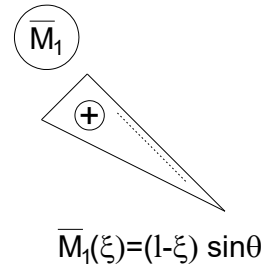
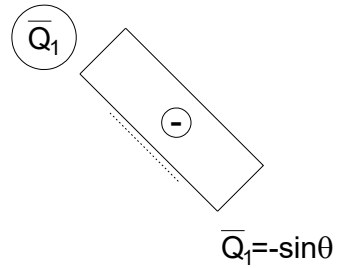
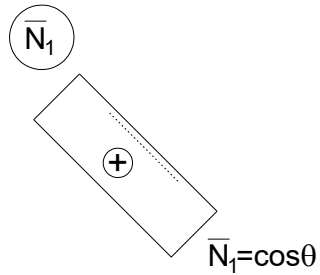
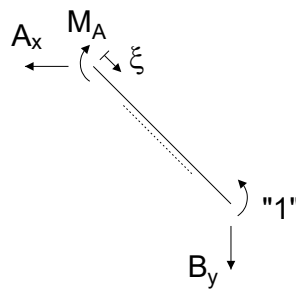
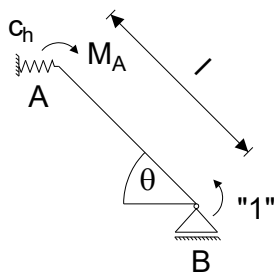
### 0-System



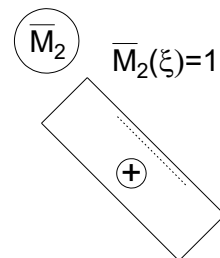
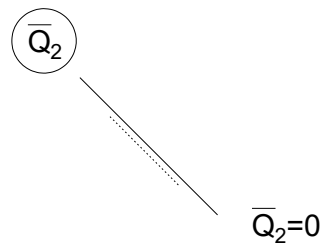
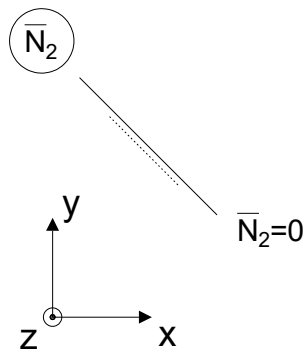
**Abb. B.36:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 0-System im Grundzustand IIa

1-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: & A_x=1 \\ \Sigma F_y=0: & B_y=0 \\ \Sigma M_z^A=0: & M_A=l \sin\theta\end{aligned}$$

2-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: & A_x=C_h=0 \\ \Sigma F_y=0: & B_y=0 \\ \Sigma M_z^A=0: & M_A=1\end{aligned}$$



**Abb. B.37:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 1- und 2-System im Grundzustand IIa

Einflusszahlen  $\alpha_{ij}$  mit  $i, j = 0, 1$  und  $2$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds + \frac{C_i C_j}{c}$$

$$\alpha_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{Q_0 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = F_{2,t}^{II} l \sin \theta \cos \theta \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{11} = \int_0^l \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi + \frac{\bar{C}_{h,1}^2}{c_h} = l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{3EI_{cw}} + \frac{1}{c_h l} \right)$$

$$\alpha_{20} = \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = -\frac{F_{2,t}^{II} l^2 \cos \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l^2 \sin \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l}{EI_{cw}}$$

Gleichungssystem zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 = -\frac{X_1}{c_{n,IIa}} = u_x^B$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 = 0 = \psi_z^B$$

Lösung von Gleichungssystem für statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$C_{IIa} = X_1 = -F_{2,t}^{II} \sin \theta \cos \theta \cdot Y_t^{II}$$

$$M_B = X_2 = \frac{F_{2,t}^{II} l \cos \theta}{2} (1 + Y_t^{II} \sin^2 \theta)$$

$$\text{mit: } Y_t^{II} = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}$$

Resultierende Schnittgröße für Verbindungsstelle

$$N_h = X_1 \bar{N}_1 = -F_{2,t}^{II} \sin \theta \cos \theta \cdot Y_t^{II} = -F_{2,t}^{II} \sin \theta \cos \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}$$

$$\text{mit: } \bar{N}_{0,h} = \bar{N}_{2,h} = 0$$

## Resultierende Schnittgrößen für geneigte Wand

$$N = N_0 + X_1 \bar{N}_1 = F_{2,t}^{II} \sin \theta (1 - Y_t^{II} \cos^2 \theta) = F_{2,t}^{II} \sin \theta \frac{\frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}$$

mit:  $\bar{N}_2 = 0$ 

$$Q = Q_0 + X_1 \bar{Q}_1 = F_{2,t}^{II} \cos \theta (1 + Y_t^{II} \sin^2 \theta) = F_{2,t}^{II} \cos \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}$$

mit:  $\bar{Q}_2 = 0$ 

$$M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 = -F_{2,t}^{II} \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \cos \theta (1 + Y_t^{II} \sin^2 \theta) \\ = -F_{2,t}^{II} \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \cos \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2}{c_h l} + \frac{1}{c_{f,IIa} l}}$$

## Verschiebung am Punkt B in x-Richtung

$$u_x^B = -\frac{X_1}{c_{n,IIa}} = F_{2,t}^{II} \sin \theta \cos \theta \frac{Y_t^{II}}{c_{n,IIa}} \\ = F_{2,t}^{II} l \sin \theta \cos \theta \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{c_{n,IIa} l \left( \frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_h l} \right) + 1}$$

## Verschiebung am Punkt A in y-Richtung mittels Satz von Castigliano (Dankert &amp; Dankert 2006)

$$u = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial F} ds + \frac{C}{c} \frac{\partial C}{\partial F} \\ u_y^A = \int_0^l \frac{N}{EA_{cw}} \frac{\partial N}{\partial F_{2,t}^{II}} d\xi + \int_0^l \frac{Q}{GA_{cw}} \frac{\partial Q}{\partial F_{2,t}^{II}} d\xi + \int_0^l \frac{M}{EI_{cw}} \frac{\partial M}{\partial F_{2,t}^{II}} d\xi + \frac{X_1}{c_{n,IIa}} \frac{\partial X_1}{\partial F_{2,t}^{II}} + \frac{X_1}{c_h} \frac{\partial X_1}{\partial F_{2,t}^{II}} \\ = F_{2,t}^{II} l \left[ \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} (1 - Y_t^{II} \cos^2 \theta)^2 + \left( \frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right) \cos^2 \theta (1 + Y_t^{II} \sin^2 \theta)^2 \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right) \frac{Y_t^{II^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{l} \right]$$

## Matlab Skript

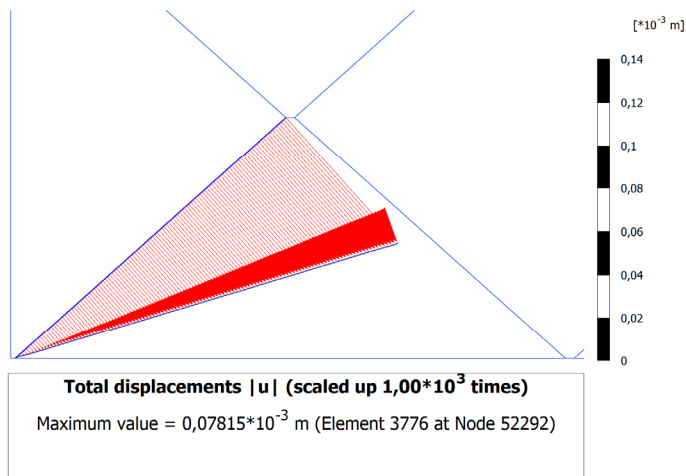
```

1  %% Statically indeterminate calculation for basic loading II tension
2  clear all; close all; format LongE;
3  % Variables
4  syms l e h theta; % Geometry
5  syms zetal zeta2; % Local coordinates
6  syms F; % Load
7  syms EI EA GA c Ecw Hc t; % Material properties
8  % Scalars
9  Lch0=0.259/2; h0=0.002; Wch0=0.224/2; Linc0=Lch0-2*h0; le0=(Linc0^2+Wch0^2)^0.5; theta0=atan(Wch0/Linc0); t0=0.0017; Ecw0=150000; Hc0=1; Ef0=30000; % Ef0=1E-6;
10 F0=3.5/2; EA0=Ecw0*t0*Hc0; GA0=5/12*EA0; EI0=Ecw0*Hc0*t0^3/12; c0=Ef0*Wch0*Hc0/(Lch0-h0); % Plaxis definition for GA0 = 5/12*EA0/(1+n0); here: n0=0;
11 cn=1/(1/c+h/EA); % representative spring stiffness
12 %% Stress resultants Sik
13 %% 0-System
14 NOI=F*sin(theta); QOI=F*cos(theta); MOI=-F*(le-zetal)*cos(theta); % Inclined wall
15 NOII=0; % Horizontal wall
16
17 %% 1-System
18 NI=cos(theta); QI=-sin(theta); MI=(le-zetal)*sin(theta);
19 NIII=1;
20
21 %% 2-System
22 N2I=0; Q2I=0; M2I=1;
23 N2II=0;
24
25 %% Influence numbers alphas
26 alpha10=int(NOI*NII/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*QII/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*MII/EI,zetal,[0 le]);
27 alpha11=int(NII*NIII/EA,zetal,[0 le])+int(QII*QIII/GA,zetal,[0 le])+int(MII*MIII/EI,zetal,[0 le])+int(NIII*NIIII/EA,zeta2,[0 h]); % Wand in Punkt B
28 alpha20=int(NOI*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*M2I/EI,zetal,[0 le]);
29 alpha12=int(NII*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QII*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MII*M2I/EI,zetal,[0 le]);
30 alpha22=int(N2I*N2II/EA,zetal,[0 le])+int(Q2I*Q2II/GA,zetal,[0 le])+int(M2I*M2II/EI,zetal,[0 le]);
31 %% Indeterminates X1 & uB1/u1
32 A=[alpha11+1/cn alpha12; alpha12 alpha22]; b=[-alpha10; -alpha20]; solu=lin_solve(A,b); X1=solu(1,1); X2=solu(2,1); uB1=-X1/cn;
33 X1val=double(subs(X1,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
34 X2val=double(subs(X2,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
35 cnval=double(subs(cn,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
36 uB1val=double(-X1val/cnval);
37 u1val=uB1val+X1val/EA0*h0;
38 %% Final stress resultants Sk
39 NI=NOI+X1*NII+X2*N2I;
40 QI=QOI+X1*QII+X2*Q2I;
41 MI=MOI+X1*MII+X2*M2I;
42 NII=X1*NIII;
43
44 NIval=double(subs(NI,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
45 QIval=double(subs(QI,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
46 MIval=double(subs(MI,[le h theta F EA GA EI c zetal],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0 0]));
47 MIfun=(subs(MI,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
48 NIIval=double(subs(NII,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
49 Res=[NIval; QIval; MIval; NIIval];
50 %% uA2 with Castigliano theorem
51 U=int(NI^2/(2*EA),zetal,[0 le])+int(QI^2/(2*GA),zetal,[0 le])+int(MI^2/(2*EI),zetal,[0 le])+X1^2/(2*cn)+int(NII^2/(2*EA),zeta2,[0 h]);
52 uA2Cas=diff(U,F);
53 uA2Casval=double(subs(uA2Cas,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
54 % Alternativ version of Castigliano
55 uA2Casalt=int(diff(NI,F)*NI/EA,zetal,[0 le])+int(diff(QI,F)*QI/GA,zetal,[0 le])+int(diff(MI,F)*MI/EI,zetal,[0 le])+diff(X1,F)*X1/cn+int(diff(NII,F)*NII/EA,zeta2,[0 h]);
56 uA2Casaltval=double(subs(uA2Casalt,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));

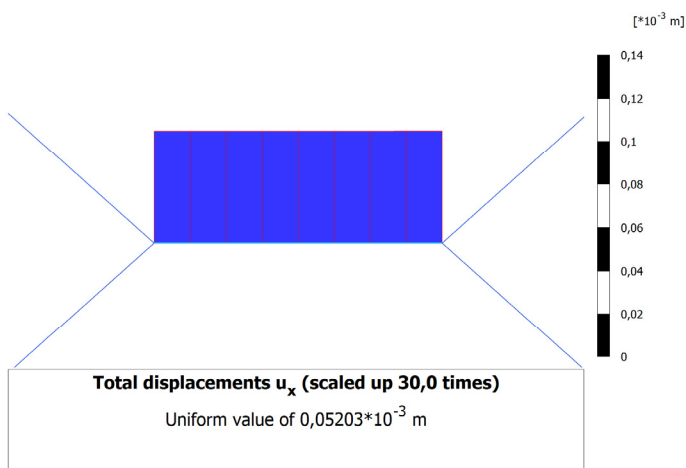
```

Abb. B.38: Matlab Skript für Grundzustand IIa

Anhang B.7: Ergänzende Darstellungen zu den Modellierungsergebnissen für die Beispielberechnung im Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in  $x_2$ -Richtung

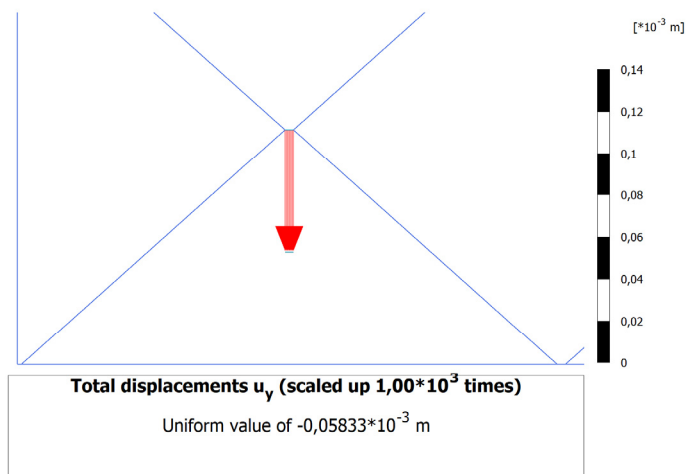
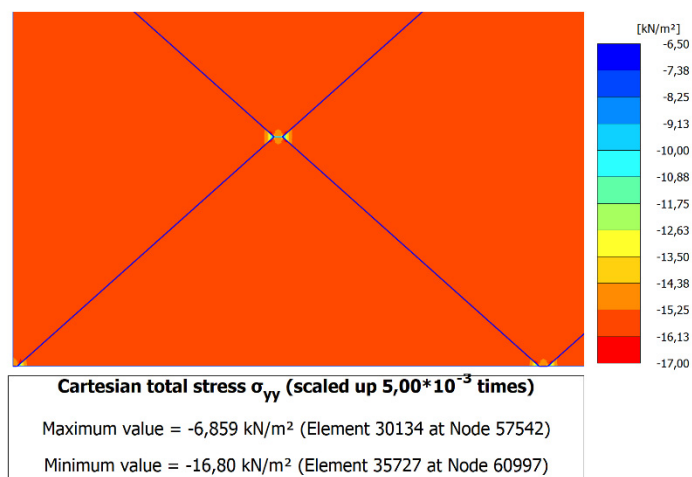
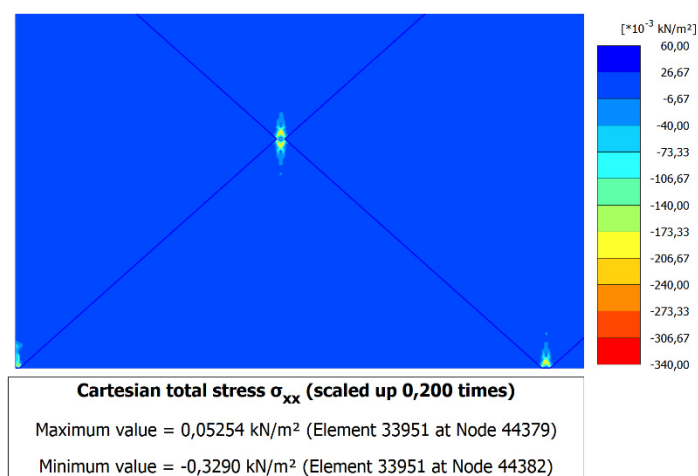


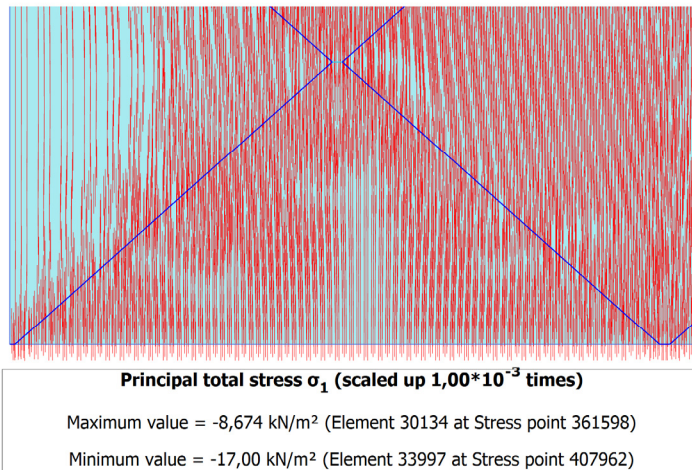
**Abb. B.39:** Resultierende Verschiebungsverteilung in geneigter Wand



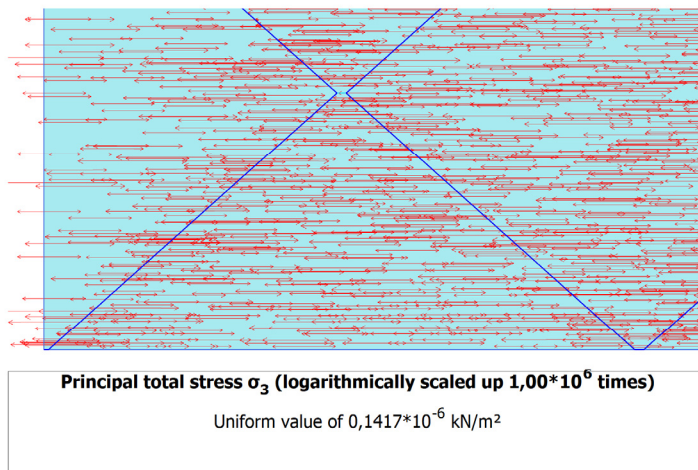
**Abb. B.40:**  $u_x$ -Verteilung in Verbindungsstelle



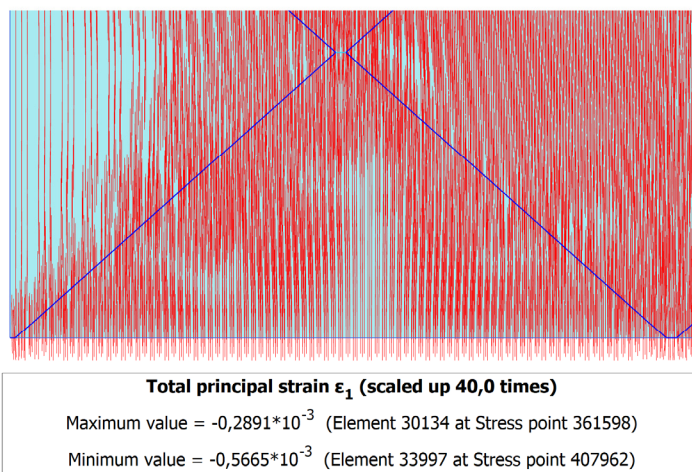
Abb. B.41:  $u_y$ -Verteilung in VerbindungsstelleAbb. B.42:  $\sigma_{yy}$ -Verteilung im ModellausschnittAbb. B.43:  $\sigma_{xx}$ -Verteilung im Modellausschnitt



**Abb. B.44:** Maximale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt



**Abb. B.45:** Minimale Hauptspannungstrajektorien im Modellausschnitt



**Abb. B.46:** Maximale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

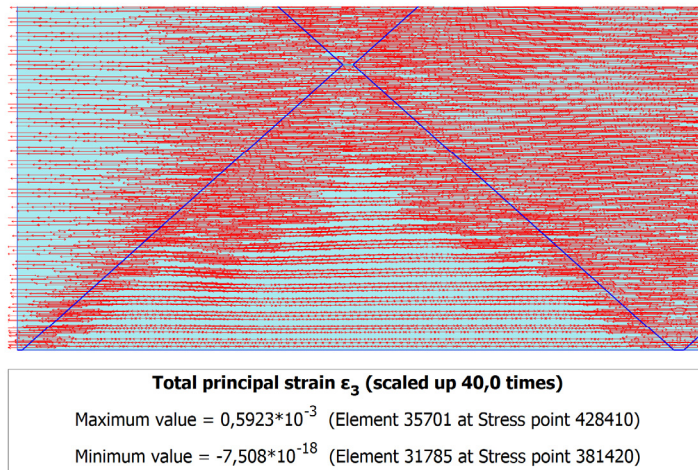


Abb. B.47: Minimale Hauptdehnungstrajektorien im Modellausschnitt

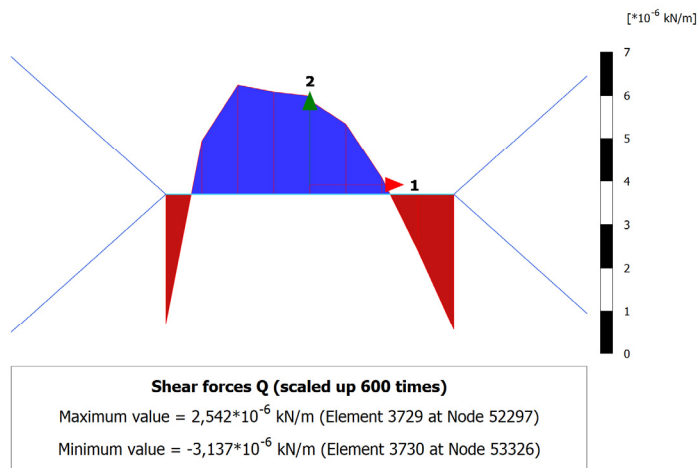


Abb. B.48: Querkraftverteilung in Verbindungsstelle (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)

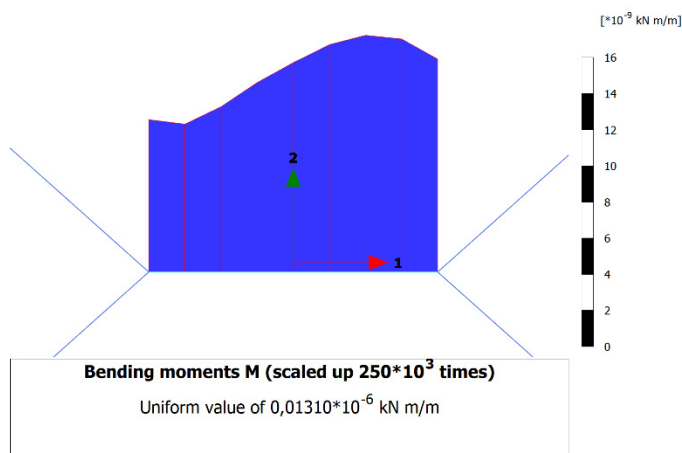
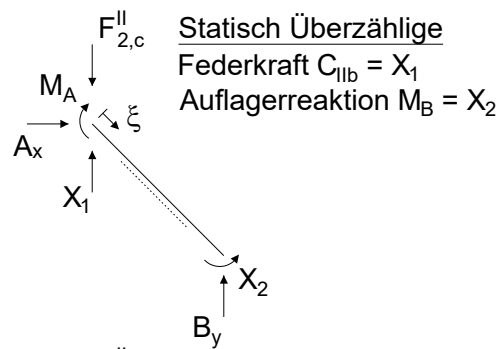
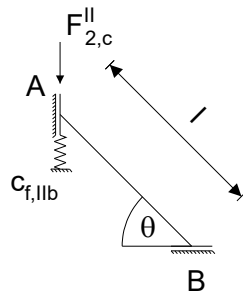


Abb. B.49: Momentenverteilung in Verbindungsstelle (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)

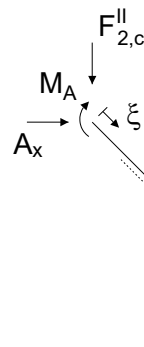
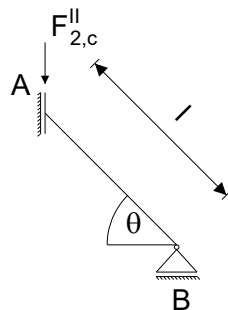
# Anhang B.8: Lösung zum statisch unbestimmten System im Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung

Schnittgrößenermittlung für 0-, 1- und 2-System

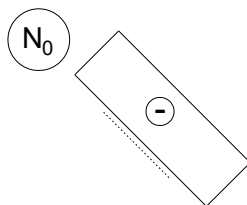
## Ausgangssystem



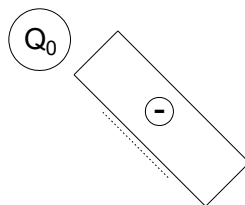
## 0-System



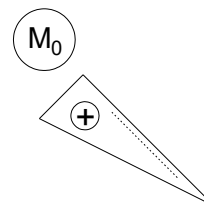
$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: & A_x=0 \\ \Sigma F_y=0: & B_y=F_{2,c}^{II} \\ \Sigma M_z^A=0: & M_A=F_{2,c}^{II} l \cos\theta\end{aligned}$$



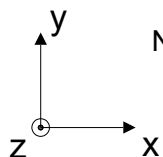
$$N_0 = -F_{2,c}^{II} \sin\theta$$



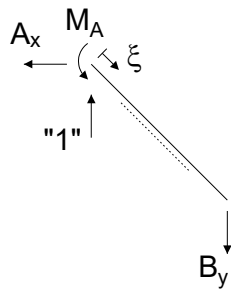
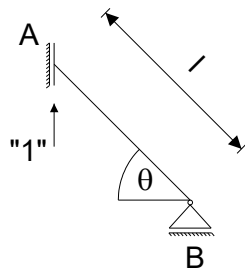
$$Q_0 = -F_{2,c}^{II} \cos\theta$$



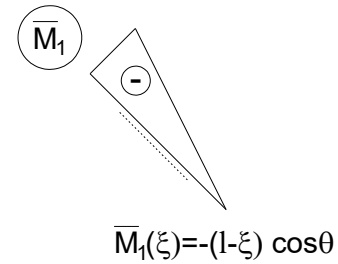
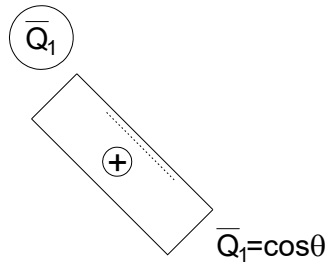
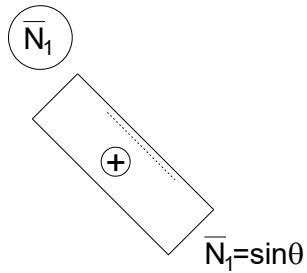
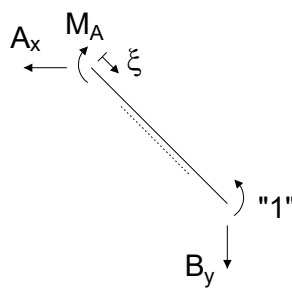
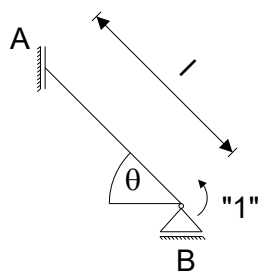
$$M_0(\xi) = F_{2,c}^{II} (l - \xi) \cos\theta$$



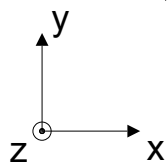
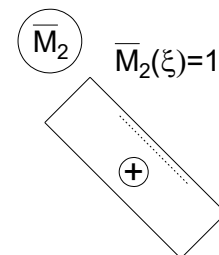
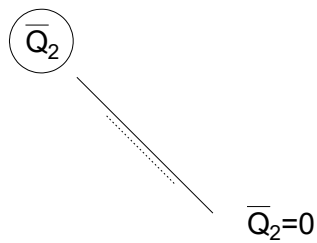
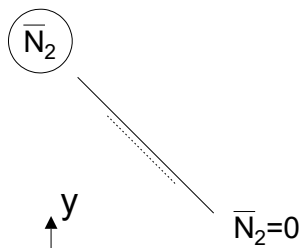
**Abb. B.50:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für das 0-System im Grundzustand IIb

1-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &=0 \\ \Sigma F_y=0: B_y &=1 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &=l \cos\theta\end{aligned}$$

2-System

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0: A_x &=0 \\ \Sigma F_y=0: B_y &=0 \\ \Sigma M_z^A=0: M_A &=1\end{aligned}$$



**Abb. B.51:** System und Zustandlinien der Schnittgrößen für das 1- und 2-System im Grundzustand IIb

Einflusszahlen  $\alpha_{ij}$  mit  $i, j = 0, 1$  und  $2$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

$$\alpha_{10} = \int_0^l \frac{N_0 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{Q_0 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = -F_{2,c}^{II} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{11} = \int_0^l \frac{\bar{N}_1 \bar{N}_1}{EA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{Q}_1 \bar{Q}_1}{GA_{cw}} d\xi + \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1}{EI_{cw}} d\xi = l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{3EI_{cw}} \right)$$

$$\alpha_{20} = \int_0^l \frac{M_0 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{F_{2,c}^{II} l^2 \cos \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = -\frac{l^2 \cos \theta}{2EI_{cw}}$$

$$\alpha_{22} = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 \bar{M}_2}{EI_{cw}} d\xi = \frac{l}{EI_{cw}}$$

Gleichungssystem zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 = -\frac{X_1}{c_{f,IIb}} = u_y^A$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1 + \alpha_{22} X_2 = 0 = \psi_z^B$$

Lösung von Gleichungssystem für statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$C_{IIb} = X_1 = F_{2,c}^{II} \cdot Y_c^{II}$$

$$M_B = X_2 = \frac{F_{2,c}^{II} l \cos \theta}{2} (Y_c^{II} - 1)$$

$$\text{mit: } Y_c^{II} = \frac{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIb} l}}$$

Resultierende Schnittgrößen

$$N = N_0 + X_1 \bar{N}_1 = F_{2,c}^{II} \sin \theta (Y_c^{II} - 1) = \frac{-F_{2,c}^{II} \sin \theta}{c_{f,IIb} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

$$\text{mit: } \bar{N}_2 = 0$$

$$Q = Q_0 + X_1 \bar{Q}_1 = F_{2,c}^{II} \cos \theta (Y_c^{II} - 1) = \frac{-F_{2,c}^{II} \cos \theta}{c_{f,IIb} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

$$\text{mit: } \bar{Q}_2 = 0$$

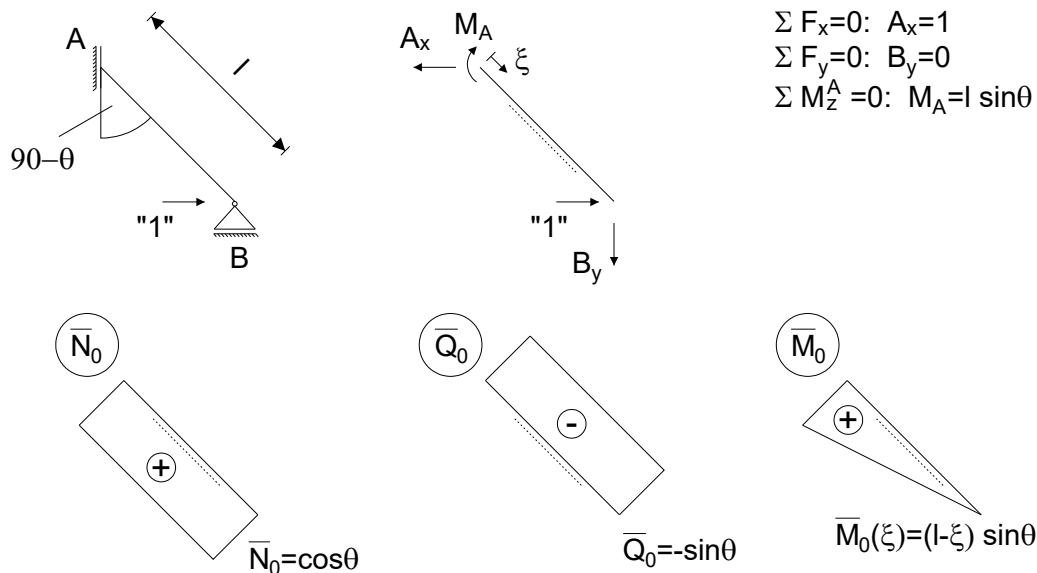
$$M = M_0 + X_1 \bar{M}_1 + X_2 \bar{M}_2 = -F_{2,c}^{II} \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \cos \theta (Y_c^{II} - 1) = \frac{F_{2,c}^{II} \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \cos \theta}{c_{f,IIb} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

Verschiebung im Punkt A in y-Richtung

$$u_y^A = -\frac{X_1}{c_{f,IIb}} = -F_{2,c}^{II} \frac{Y_c^{II}}{c_{f,IIb}} = -\frac{F_{2,c}^{II} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right)}{c_{f,IIb} l \left( \frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}} \right) + 1}$$

Verschiebung am Punkt B in x-Richtung mittels Reduktionssatz

Zugeordnetes statisch bestimmtes System für Reduktionssatz



**Abb. B.52:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für den Reduktionssatz im Grundzustand IIb

Reduktionssatz (Gross et al. 2011a)

$$u = \int \frac{M \bar{M}_0}{EI} ds + \int \frac{N \bar{N}_0}{EA} ds + \int \frac{Q \bar{Q}_0}{GA} ds$$

$$u_y^A = F_{2,c}^{II} l \sin \theta \cos \theta (Y_c^{II} - 1) \left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$$

## Matlab Skript

```

1  %% Statically indeterminate calculation for basic loading II compression
2  clear all; close all; format LongE;
3  % Variables
4  syms l h theta; % Geometry;
5  syms zetal zeta2; % Local coordinates
6  syms F; % Load
7  syms EI EA GA c; % Material properties
8  % Scalars
9  Lch0=0.259/2; h0=0.002; Wch0=0.224/2; Linc0=Lch0-2*h0; le0=(Linc0^2+Wch0^2)^0.5; theta0=atan(Wch0/Linc0); t0=0.0017; Ecw0=588235.29; Hc0=1; Ef0=10; % Ef0=1E-6;
10 FG=(3.5*(0.224/0.259))/2; EA0=Ecw0*t0*Hc0; GA0=5/12*EA0; EI0=Ecw0*Hc0*t0^3/12; c0=Ef0*Lch0*Hc0/Wch0; % Plaxis definition for GA0 = 5/12*EA0/(1+nu0); here: nu0=0;
11 %% Stress resultants Sik
12 %% 0-System
13 NOI=-F*sin(theta); QOI=-F*cos(theta); MOI=F*(1e-zetal)*cos(theta); % inclined wall
14 NOII=0; % Horizontal wall irrelevant, since it is free of resultants in all systems
15
16 %% 1-System
17 NII=sin(theta); QII=cos(theta); MII=-(1e-zetal)*cos(theta);
18 NIII=0;
19
20 %% 2-System
21 N2I=0; Q2I=0; M2I=1;
22 N2II=0;
23
24 %% Einflusszahlen alphaIj
25 alphaI0=int(NOI*NII/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*QII/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*MII/EI,zetal,[0 le]);
26 alphaI1=int(NII*NII/EA,zetal,[0 le])+int(QII*QII/GA,zetal,[0 le])+int(MII*MII/EI,zetal,[0 le]);
27 alpha20=int(NOI*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QOI*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MOI*M2I/EI,zetal,[0 le]);
28 alphaI2=int(NII*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(QII*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(MII*M2I/EI,zetal,[0 le]);
29 alpha22=int(N2I*N2I/EA,zetal,[0 le])+int(Q2I*Q2I/GA,zetal,[0 le])+int(M2I*M2I/EI,zetal,[0 le]);
30
31 %% Unbestimmte Xi & uA2
32 A=[alphaI1+1/c alphaI2; alphaI2 alpha22]; b=[-alphaI0; -alpha20]; solu=linsolve(A,b); X1=solu(1,1);X2=solu(2,1); uA2=-X1/c;
33 X1val=double(subs(X1,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
34 X2val=double(subs(X2,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
35 uA2val=double((-X1val/c0))
36 %% Final stress resultants Sk
37 NI=NOI+X1*NII+X2*N2I;
38 QI=QOI+X1*QII+X2*Q2I;
39 MI=MOI+X1*MII+X2*M2I;
40
41 Nival=double(subs(NI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
42 Qival=double(subs(QI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
43 Mival=double(subs(MI,[le theta F EA GA EI c zetal],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0 0]));
44 Mifun=(subs(MI,[le theta F EA GA EI c],[le0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]));
45 Res=[Nival; Qival; Mival]
46 % figure(1)
47 % fplot(Mifun,[0 le0]); title('MI');
48 %% Reduction theorem for uB1
49 NOOI=cos(theta); QOOI=-sin(theta); MOOI=(1e-zetal)*sin(theta);
50 uB1Red=int(NI*NOOI/EA,zetal,[0 le])+int(QI*QOOI/GA,zetal,[0 le])+int(MI*MOOI/EI,zetal,[0 le]);
51 uB1Redval=double(subs(uB1Red,[le h theta F EA GA EI c],[le0 h0 theta0 F0 EA0 GA0 EI0 c0]))

```

Abb. B.53: Matlab Skript für Grundzustand IIb



# Anhang B.9: Grenzwertbetrachtungen der allgemeinen analytischen Lösungen für Grundzustand I und II

**Tab. B.1:** Grenzwerte für die wesentlichen Größen des geneigten Balkens im Grundzustand Ia

Größe	Allgemeine Gleichung	Grenzwertbetrachtung	
		$t \rightarrow 0,$ $Y_t^I \rightarrow -1/\cos^2\theta$	$c_{f,Ia} \rightarrow 0,$ $Y_t^I \rightarrow 0$
$C_{Ia} = X_1$	$= -F_{1,t}^I \sin\theta \cos\theta \cdot Y_t^I$	$= F_{1,t}^I \tan\theta$	0
$M_B = X_2$	$= -\frac{F_{1,t}^I l \sin\theta}{2} (1 + Y_t^I \cos^2\theta)$	0	$= -\frac{F_{1,t}^I l \sin\theta}{2}$
N	$= F_{1,t}^I \cos\theta (1 - Y_t^I \sin^2\theta)$	$= \frac{F_{1,t}^I}{\cos\theta}$	$= F_{1,t}^I \cos\theta$
Q	$= -F_{1,t}^I \sin\theta (1 + Y_t^I \cos^2\theta)$	0	$= -F_{1,t}^I \sin\theta$
M	$= F_{1,t}^I \left(\frac{l}{2} - \xi\right) \sin\theta (1 + Y_t^I \cos^2\theta)$	0	$= F_{1,t}^I \left(\frac{l}{2} - \xi\right) \sin\theta$
$u_{B_x}^B$	= Gleichung (4.7)	$= \frac{F_{1,t}^I}{\cos^2\theta} \times$ $\left(\frac{l}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{c_{f,Ia}}\right)$	$= F_{1,t}^I l \times$ $\left(\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2\theta}{12EI_{cw}}\right)$
$u_{A_y}^A$	$= F_{1,t}^I \sin\theta \cos\theta \frac{Y_t^I}{c_{f,Ia}}$	$= -\frac{F_{1,t}^I \tan\theta}{c_{f,Ia}}$	$= F_{1,t}^I l \sin\theta \cos\theta \times$ $\left(\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}\right)$

**Tab. B.2:** Grenzwerte für die wesentlichen Größen des geneigten Balkens im Grundzustand Ib

Größe	Allgemeine Gleichung	Grenzwertbetrachtung	
		$t \rightarrow 0,$ $Y_c^I \rightarrow 1$	$c_{f,Ib} \rightarrow 0,$ $Y_c^I \rightarrow 0$
$C_{Ib} = X_1$	$= F_{1,c}^I \cdot Y_c^I$	$= F_{1,c}^I$	0
$M_B = X_2$	$= -\frac{F_{1,c}^I l \sin\theta}{2} (Y_c^I - 1)$	0	$= \frac{F_{1,c}^I l \sin\theta}{2}$
N	$= F_{1,c}^I \cos\theta (Y_c^I - 1)$	0	$= -F_{1,c}^I \cos\theta$
Q	$= -F_{1,c}^I \sin\theta (Y_c^I - 1)$	0	$= F_{1,c}^I \sin\theta$
M	$= F_{1,c}^I \sin\theta \left(\frac{l}{2} - \xi\right) (Y_c^I - 1)$	0	$= -F_{1,c}^I \sin\theta \left(\frac{l}{2} - \xi\right)$
$u_{B_x}^B$	$= -\frac{F_{1,c}^I \cdot Y_c^I}{c_{f,Ib}}$	$= -\frac{F_{1,c}^I}{c_{f,Ib}}$	$= -F_{1,c}^I l \times$ $\left(\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2\theta}{12EI_{cw}}\right)$
$u_{A_y}^A$	$= F_{1,c}^I l \sin\theta \cos\theta (Y_c^I - 1) \times$ $\left(\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}\right)$	$= \frac{F_{1,c}^I}{c_{f,Ib} \tan\theta}$	$= -F_{1,c}^I l \sin\theta \cos\theta \times$ $\left(\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}\right)$

**Tab. B.3:** Grenzwerte für die wesentlichen Größen des Grundzustandes IIa

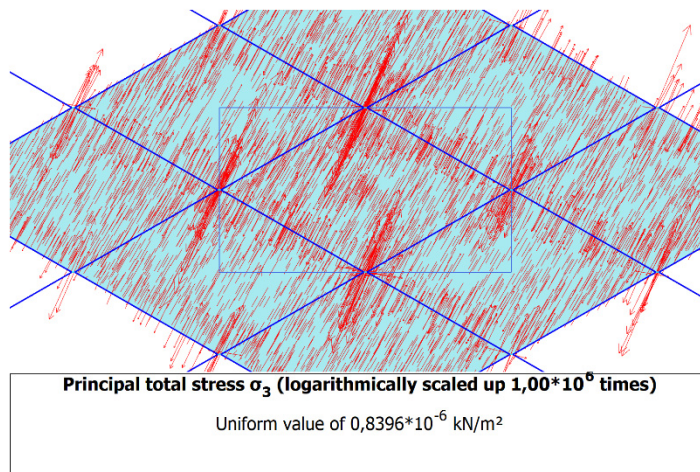
Größe	Gleichung	Grenzwertbetrachtung	
		$t \rightarrow 0,$ $Y_t^{II} \rightarrow -1/\sin^2\theta$	$c_{f,IIa} \rightarrow 0,$ $Y_t^{II} \rightarrow 0$
$C_{IIa} = X_1$	$= -F_{2,t}^{II} \sin\theta \cos\theta \cdot Y_t^{II}$	$= \frac{F_{2,t}^{II}}{\tan\theta}$	0
$M_B = X_2$	$= \frac{F_{2,t}^{II} l \cos\theta}{2} (1 + Y_t^{II} \sin^2\theta)$	0	$= \frac{F_{2,t}^{II} l \cos\theta}{2}$
N	$= F_{2,t}^{II} \sin\theta (1 - Y_t^{II} \cos^2\theta)$	$= \frac{F_{2,t}^{II}}{\sin\theta}$	$= F_{2,t}^{II} \sin\theta$
Q	$= -F_{2,t}^{II} \cos\theta (1 + Y_t^{II} \sin^2\theta)$	0	$= F_{2,t}^{II} \cos\theta$
M	$= -F_{2,t}^{II} \cos\theta \left( \frac{l}{2} - \xi \right) \times$ $(1 + Y_t^{II} \sin^2\theta)$	0	$= -F_{2,t}^{II} \cos\theta \left( \frac{l}{2} - \xi \right)$
$u_{B_x}^B$	$= \frac{F_{2,t}^{II} l \sin\theta \cos\theta \cdot Y_t^{II}}{c_{n,IIa}}$	$= -\frac{F_{2,t}^{II}}{c_{n,IIa} \tan\theta}$	$= F_{2,t}^{II} l \sin\theta \cos\theta \times$ $\left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$
$u_{A_y}^A$	= Gleichung (4.22)	$= \frac{F_{2,t}^{II}}{\sin^2\theta} \times \left[ \frac{l}{EA_{cw}} + \cos^2\theta \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right) \right]$	$= F_{2,t}^{II} l \times$ $\left( \frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}} \right)$

**Tab. B.4:** Grenzwerte für die wesentlichen Größen des geneigten Balkens im Grundzustand IIb

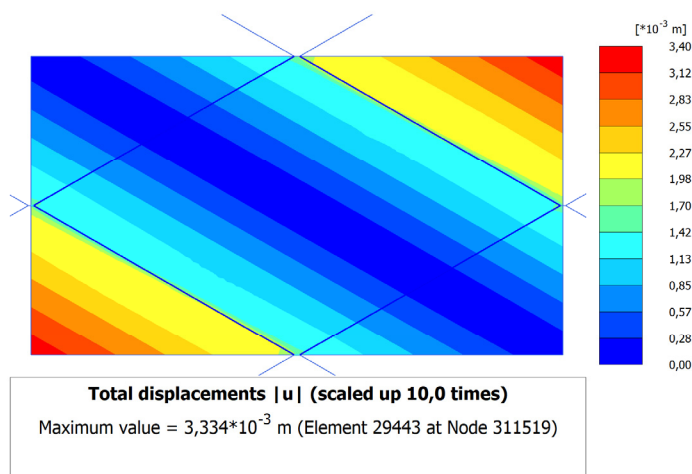
Größe	Gleichung	Grenzwertbetrachtung	
		$t \rightarrow 0,$ $Y_c^{II} \rightarrow 1$	$c_{f,IIb} \rightarrow 0,$ $Y_c^{II} \rightarrow 0$
$C_{IIb} = X_1$	$= F_{2,c}^{II} \cdot Y_c^{II}$	$= F_{2,c}^{II}$	0
$M_B = X_2$	$= \frac{F_{2,c}^{II} l \cos\theta}{2} (Y_c^{II} - 1)$	0	$= -\frac{F_{2,c}^{II} l \cos\theta}{2}$
N	$= F_{2,c}^{II} \sin\theta (Y_c^{II} - 1)$	0	$= -F_{2,c}^{II} \sin\theta$
Q	$= F_{2,c}^{II} \cos\theta (Y_c^{II} - 1)$	0	$= -F_{2,c}^{II} \cos\theta$
M	$= -F_{2,c}^{II} \cos\theta \left( \frac{l}{2} - \xi \right) (Y_c^{II} - 1)$	0	$= F_{2,c}^{II} \cos\theta \left( \frac{l}{2} - \xi \right)$
$u_{A_y}^A$	$= -\frac{F_{2,c}^{II} \cdot Y_c^{II}}{c_{f,IIb}}$	$= -\frac{F_{2,c}^{II}}{c_{f,IIb}}$	$= -F_{2,c}^{II} l \times$ $\left( \frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}} \right)$
$u_{B_x}^B$	$= F_{2,c}^{II} l \sin\theta \cos\theta (Y_c^{II} - 1) \times$ $\left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$	$= \frac{F_{2,c}^{II} \tan\theta}{c_{f,IIb}}$	$= -F_{2,c}^{II} l \sin\theta \cos\theta \times$ $\left( \frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}} \right)$

## Anhang C

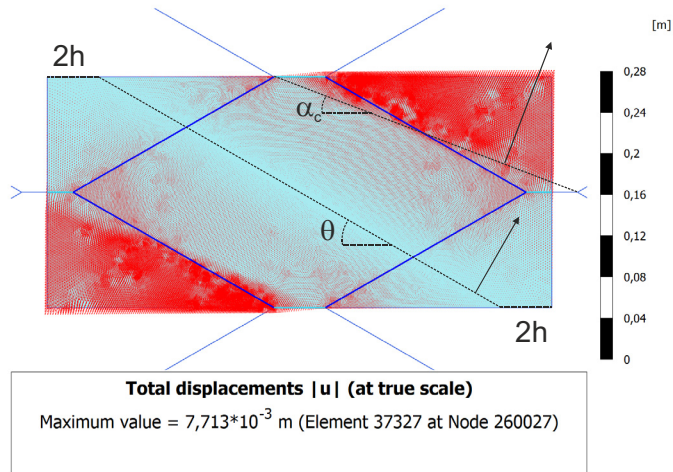
Anhang C.1: Ergänzende Darstellungen zu den Modellierungsergebnissen für die Beispielberechnung im Grundzustand III bei reiner Schubbelastung in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene



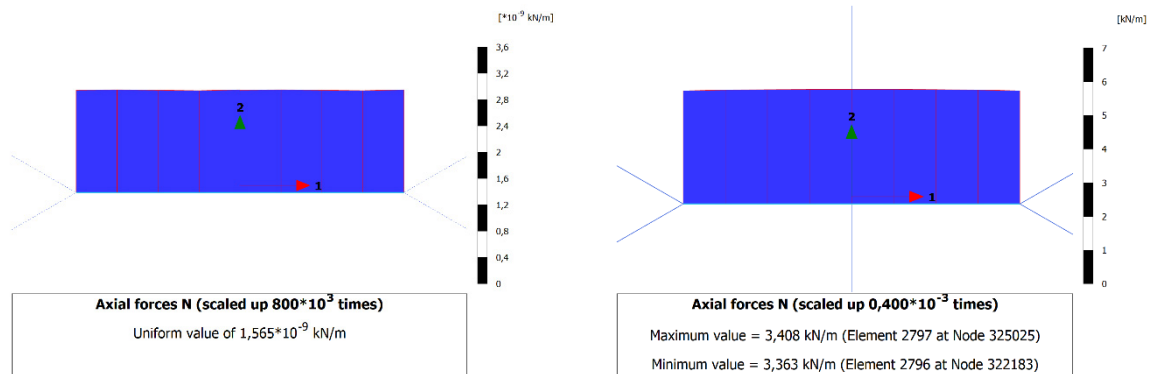
**Abb. C.1:** Minimale Hauptspannungstrajektorien im Bereich des Modellausschnitt



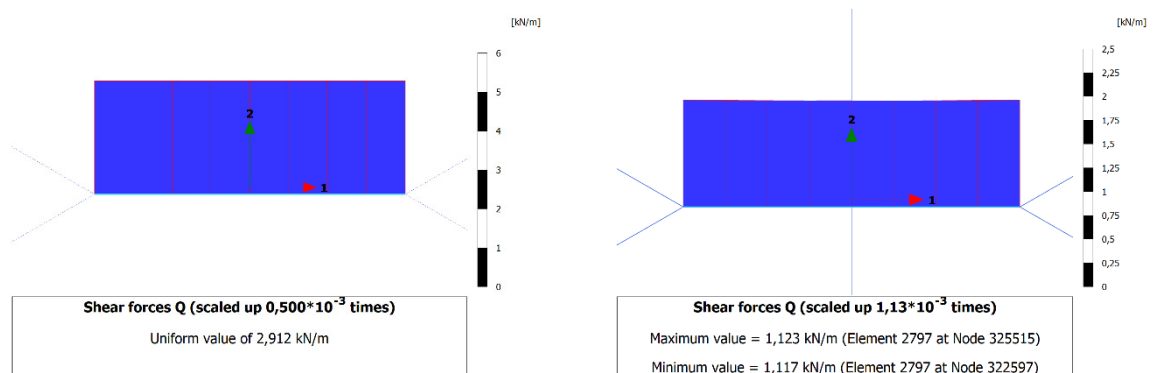
**Abb. C.2:** Verteilung der resultierenden Verschiebungen im Modellausschnitt



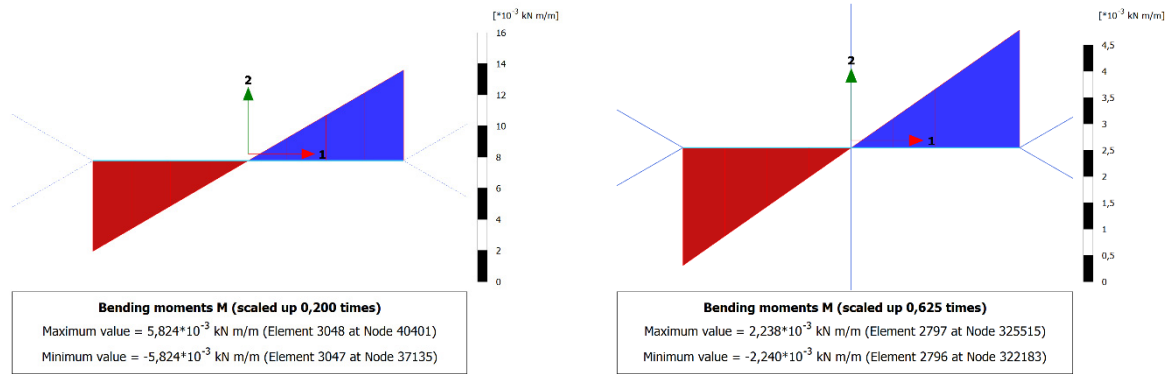
**Abb. C.3:** Vektorielle Darstellung zu resultierenden Verschiebungen im Modellausschnitt mit Kennzeichnung der maßgebenden Verschiebungsrichtung für ein Zellsystem mit  $h = 25$  mm



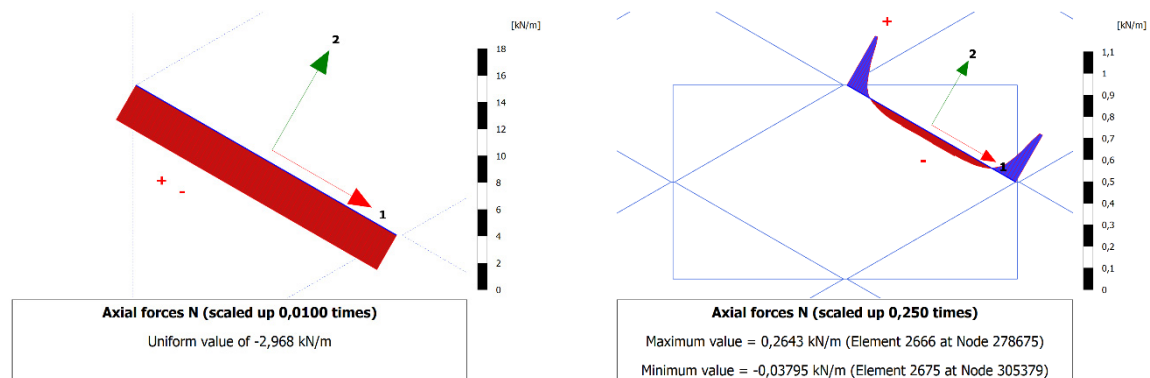
**Abb. C.4:** Normalkraftverteilung in der Verbindungsstelle (horizontale Wand c) für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt



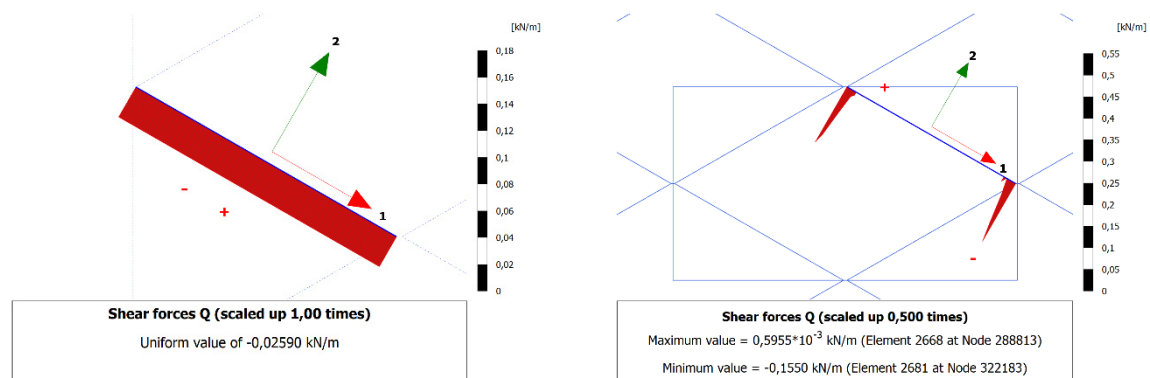
**Abb. C.5:** Querkraftverteilung in der Verbindungsstelle (horizontale Wand c) für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)



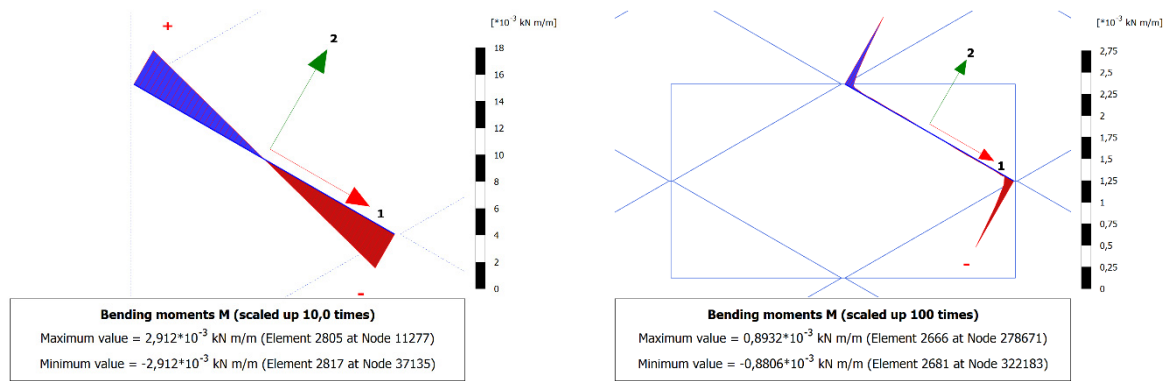
**Abb. C.6:** Momentenverteilung in der Verbindungsstelle (horizontale Wand c) für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)



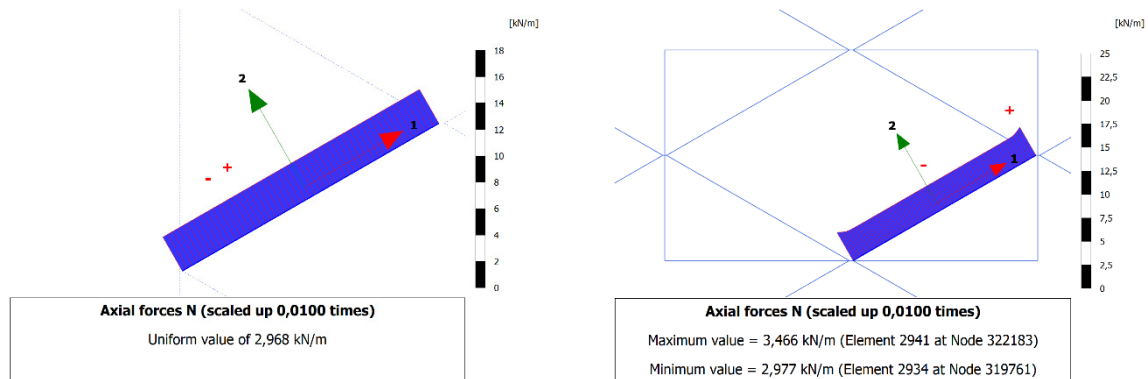
**Abb. C.7:** Normalkraftverteilung in geneigter Wand a für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt



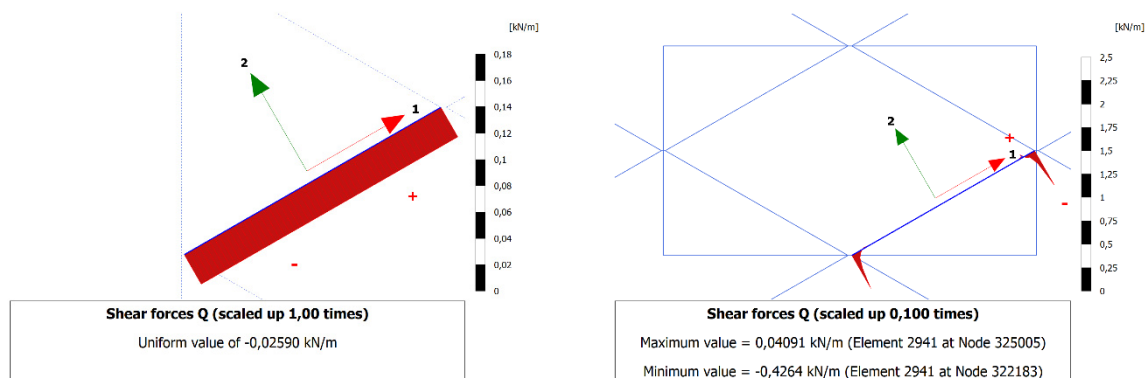
**Abb. C.8:** Querkraftverteilung in geneigter Wand a für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)



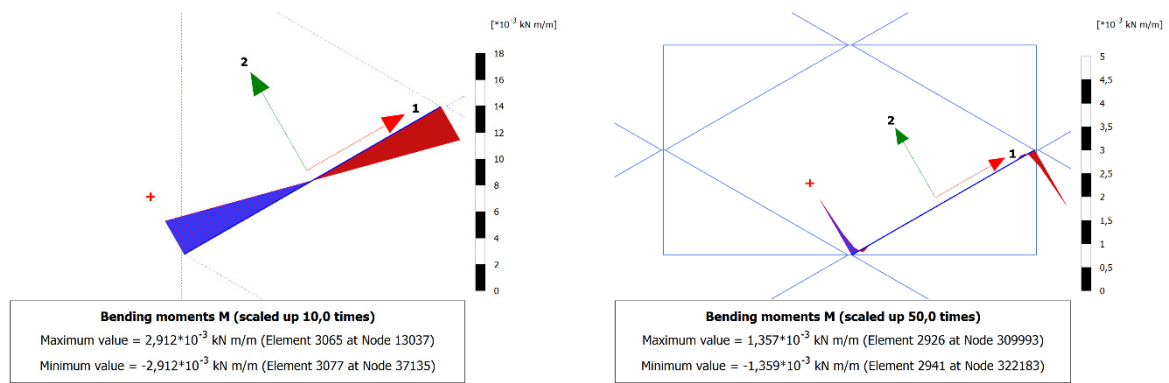
**Abb. C.9:** Momentenverteilung in geneigter Wand a für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)



**Abb. C.10:** Normalkraftverteilung in geneigter Wand b für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt



**Abb. C.11:** Querkraftverteilung in geneigter Wand b für ein unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (positiv in Richtung der positiven 2-Richtung)



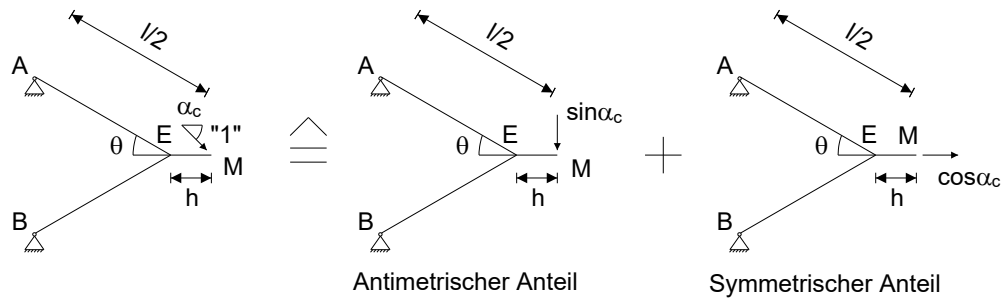
**Abb. C.12:** Momentenverteilung in geneigter Wand b für unbefülltes (links) und befülltes (rechts) Zellsystem im Modellausschnitt (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)



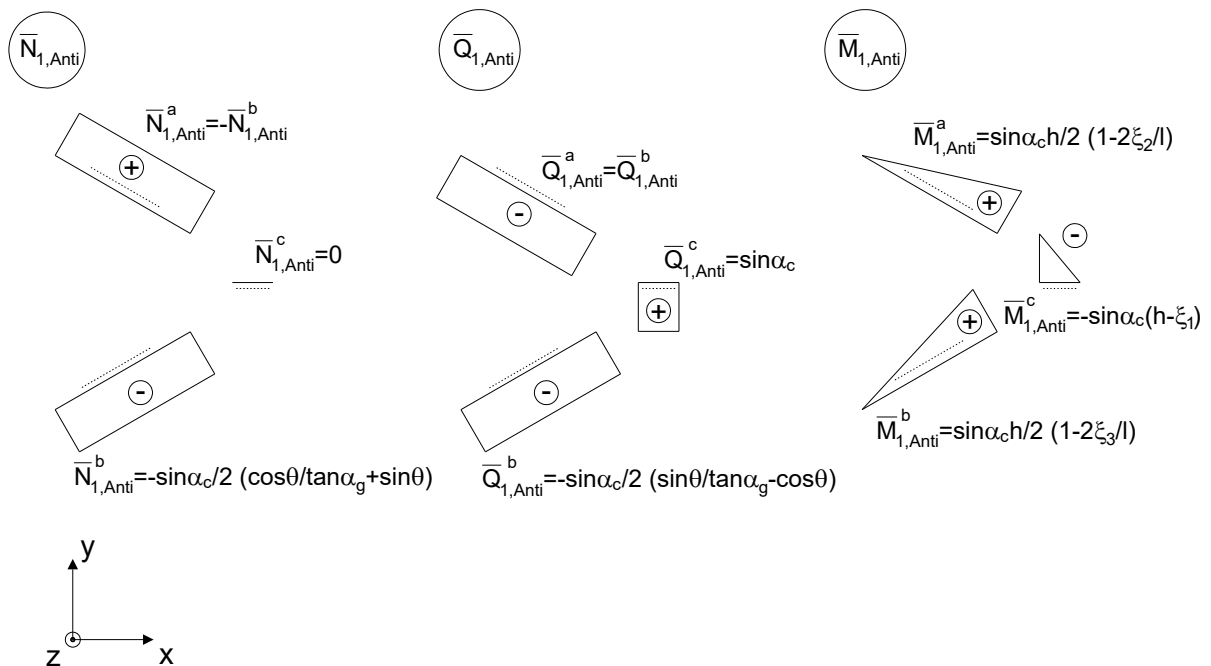
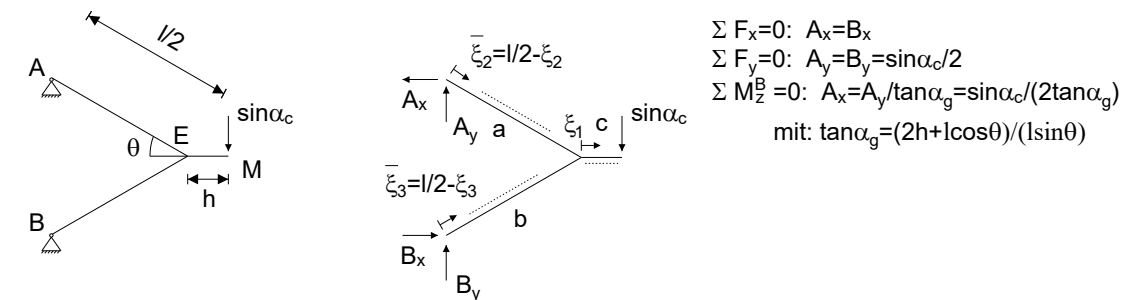


# 1-System: Zerlegung der "1"-Kraft in antimetrischen und symmetrischen Anteil

## 1-System



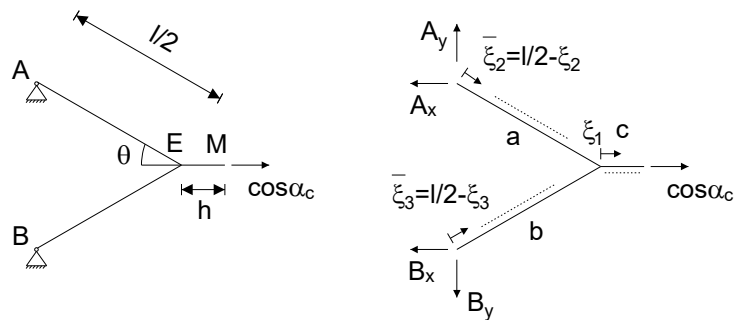
## 1-System: Antimetrischer Anteil



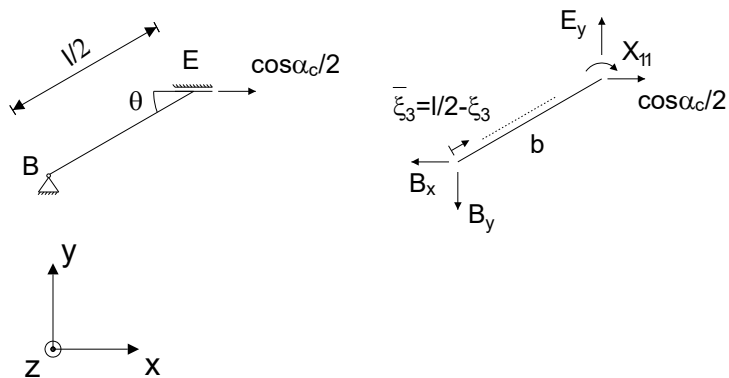
**Abb. C.14:** Zerlegung des 1-Systems in antimetrischen und symmetrischen Anteil (oben) sowie System und Zustandslinien der Schnittgrößen für den antimetrischen Anteil des 1-Systems (unten) im Grundzustand III

Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften für symmetrischen Anteil durch ausschließliche Betrachtung der Wand b; Schnittgrößen für Wand a aus Symmetrie

### 1-System: Symmetrischer Anteil



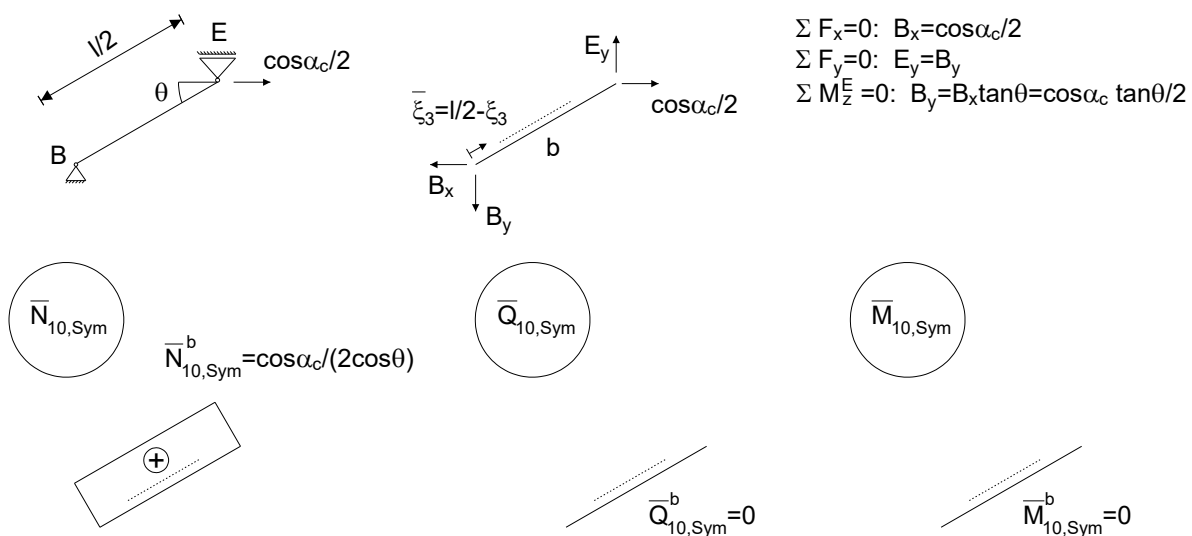
Teilsystem für Wand b infolge Symmetrie



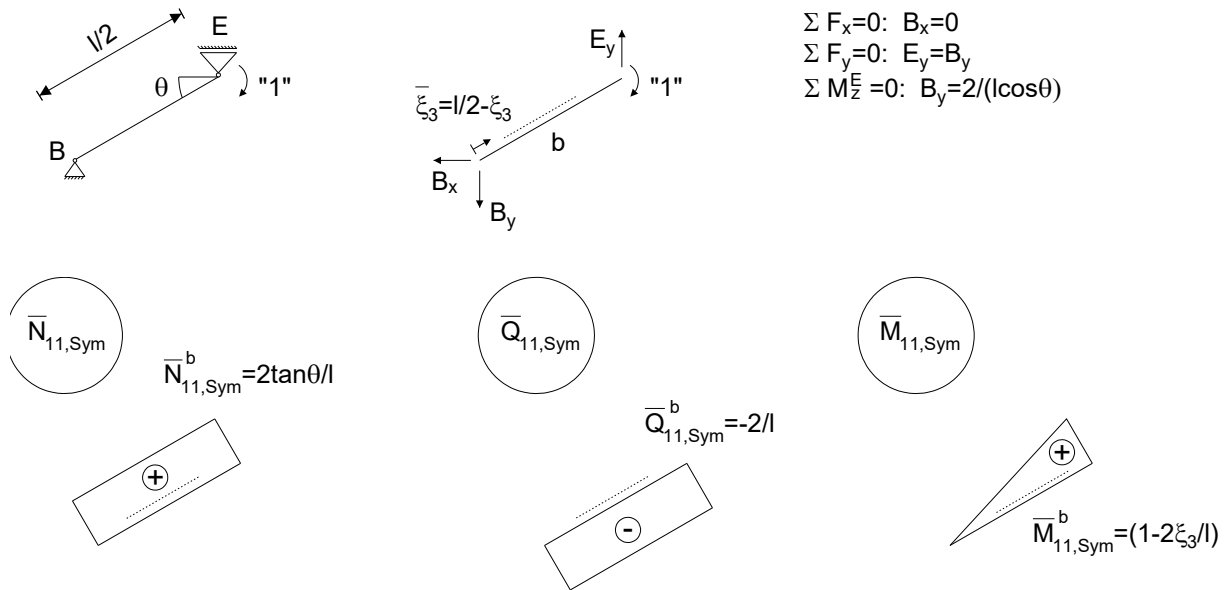
**Abb. C.15:** Zerlegung des symmetrischen Anteils des 1-Systems in Wand a und b im Grundzustand III

Teilsystem für Wand b ist einfach statisch überbestimmtes System; Wahl von Moment im Punkt E als statisch Überzählige  $X_{11}$ ; Bestimmung mit Pvk

### 10-System



**Abb. C.16:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für 10-System des symmetrischen Anteils im 1-System für den Grundzustand III

11-System

**Abb. C.17:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für 11-System des symmetrischen Anteils im 1-System für den Grundzustand III

Einflusszahlen zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_{11}$

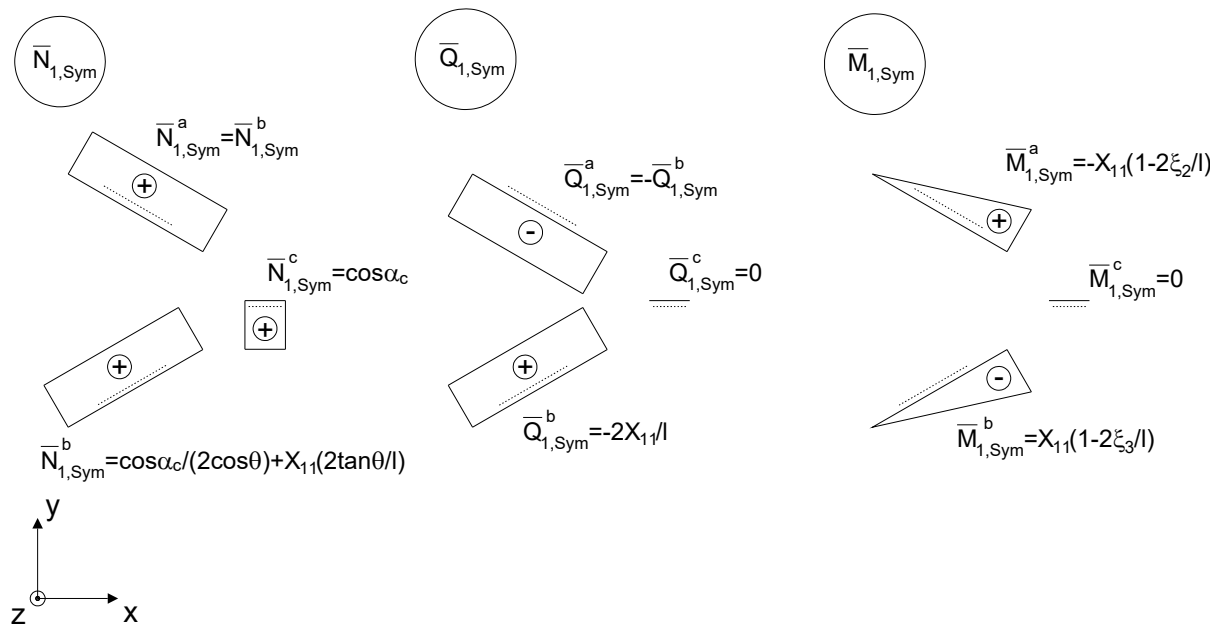
$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds \\
 \alpha_{110} &= \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_{10,Sym} \bar{N}_{11,Sym}}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_{10,Sym} \bar{Q}_{11,Sym}}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_{10,Sym} \bar{M}_{11,Sym}}{EI_{cw}} d\xi_3 \\
 &= \frac{\cos \alpha_c \tan \theta}{2 \cos \theta EA_{cw}} \\
 \alpha_{111} &= \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_{11,Sym} \bar{N}_{11,Sym}}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_{11,Sym} \bar{Q}_{11,Sym}}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_{11,Sym} \bar{M}_{11,Sym}}{EI_{cw}} d\xi_3 \\
 &= \frac{2 \tan^2 \theta}{l EA_{cw}} + \frac{2}{l GA_{cw}} + \frac{l}{6 EI_{cw}}
 \end{aligned}$$

Gleichung zur Ermittlung von  $X_{11}$  (aufgrund von Symmetrie ist Verdrehung im Punkt E Null)

$$\alpha_{110} + \alpha_{111} X_{11} = 0 \Leftrightarrow X_{11} = -\frac{\alpha_{110}}{\alpha_{111}} = -\frac{\frac{\cos \alpha_c \tan \theta}{2 \cos \theta EA_{cw}}}{\frac{2 \tan^2 \theta}{l EA_{cw}} + \frac{2}{l GA_{cw}} + \frac{l}{6 EI_{cw}}}$$

## Resultierende Schnittgrößen für symmetrischen Anteil von 1-System

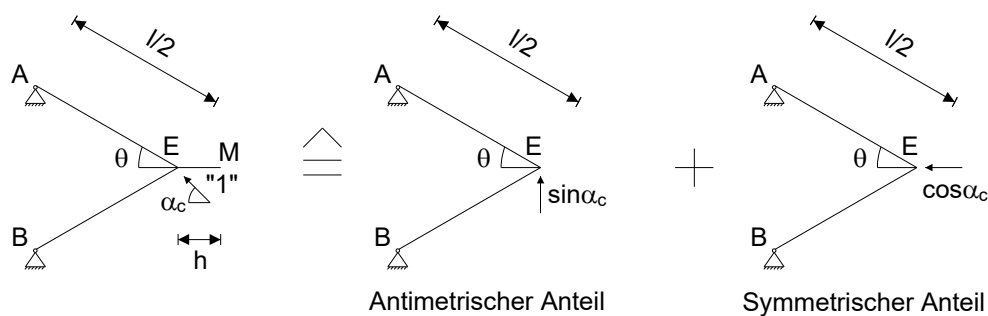
### 1-System: Symmetrischer Anteil - Schnittgrößen



**Abb. C.18:** Zustandslinien der Schnittgrößen des symmetrischen Anteils im 1-System für den Grundzustand III

2-System: Zerlegung der "1"-Kraft in antimetrischen und symmetrischen Anteil (Vorgehen ähnlich zu 1-System)

### 2-System



**Abb. C.19:** Zerlegung des 2-Systems in antimetrischen und symmetrischen Anteil im Grundzustand III

## 2-System: Antimetrischer Anteil

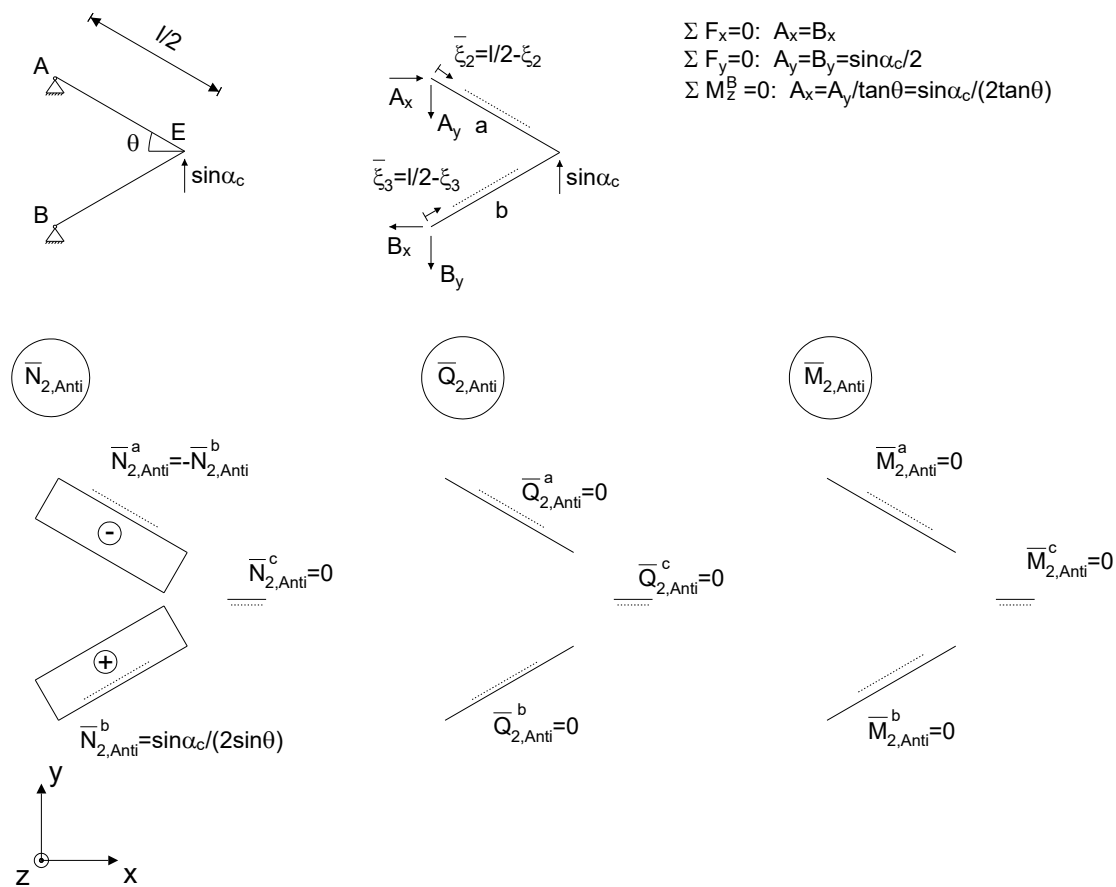


Abb. C.20: System und Zustandslinien der Schnittgrößen für den antisymmetrischen Anteil des 2-Systems im Grundzustand III

Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften für symmetrischen Anteil durch ausschließliche Betrachtung der Wand b; Schnittgrößen für Wand a aus Symmetrie

## 2-System: Symmetrischer Anteil

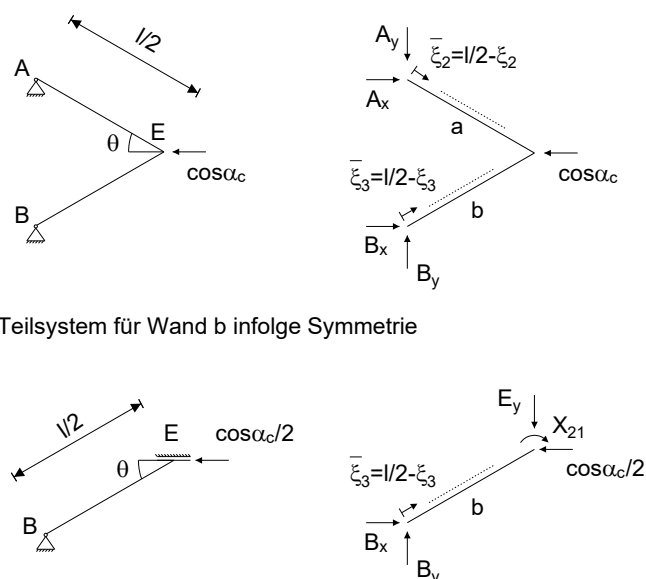
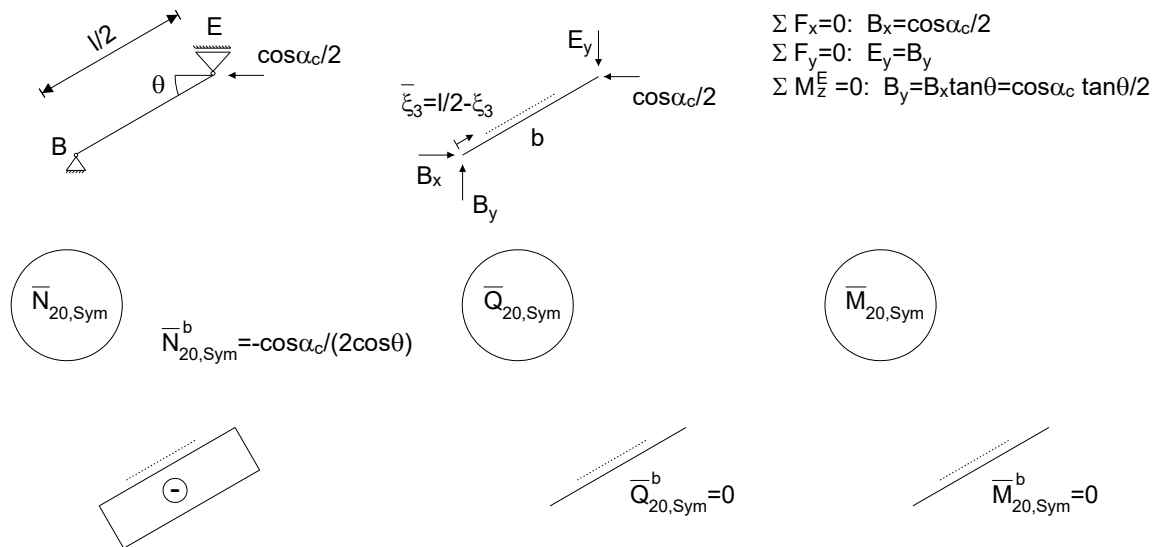


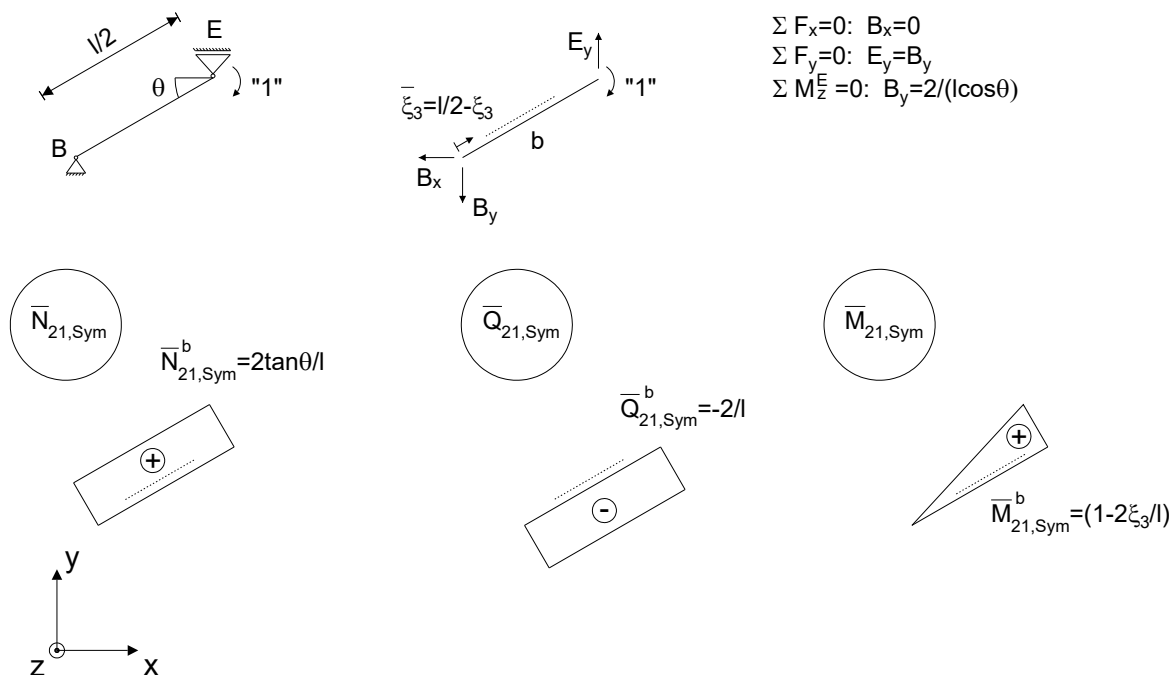
Abb. C.21: Zerlegung des symmetrischen Anteils des 2-Systems in Wand a und b im Grundzustand III

Teilsystem für Wand b ist einfach statisch überbestimmtes System; Wahl von Moment im Punkt E als statische Überzählige  $X_{11}$ ; Bestimmung mit PvK

### 20-System



### 21-System (entspricht 11-System)



**Abb. C.22:** System und Zustandslinien der Schnittgrößen für 20-System (oben) und für 21-System (unten) des symmetrischen Anteils im 1-System für den Grundzustand III

Einflusszahlen zur Ermittlung der statisch Überzähligen  $X_{21}$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds$$

$$\alpha_{210} = -\alpha_{110} = \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_{10,Sym} \bar{N}_{11,Sym}}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_{10,Sym} \bar{Q}_{11,Sym}}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_{10,Sym} \bar{M}_{11,Sym}}{EI_{cw}} d\xi_3$$

$$= -\frac{\cos \alpha_c \tan \theta}{2 \cos \theta EA_{cw}}$$

$$\alpha_{211} = \alpha_{111} = \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_{11,Sym} \bar{N}_{11,Sym}}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_{11,Sym} \bar{Q}_{11,Sym}}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_{11,Sym} \bar{M}_{11,Sym}}{EI_{cw}} d\xi_3$$

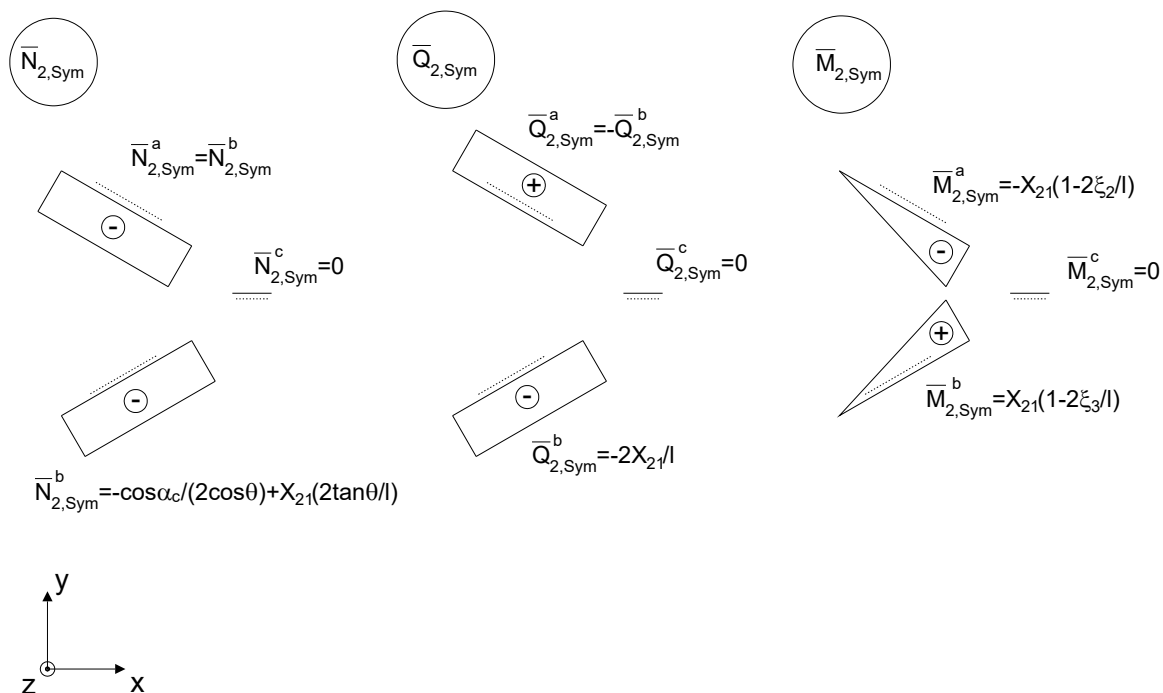
$$= \frac{2 \tan^2 \theta}{l EA_{cw}} + \frac{2}{l GA_{cw}} + \frac{l}{6 EI_{cw}}$$

Gleichung zur Ermittlung von  $X_{21}$  (aufgrund von Symmetrie ist Verdrehung im Punkt E Null)

$$\alpha_{210} + \alpha_{211} X_{21} = 0 \Leftrightarrow X_{21} = -\frac{\alpha_{110}}{\alpha_{111}} = \frac{\frac{\cos \alpha_c \tan \theta}{2 \cos \theta EA_{cw}}}{\frac{2 \tan^2 \theta}{l EA_{cw}} + \frac{2}{l GA_{cw}} + \frac{l}{6 EI_{cw}}} = -X_{11}$$

Resultierende Schnittgrößen für symmetrischen Anteil von 2-System

2-System: Symmetrischer Anteil - Schnittgrößen



**Abb. C.23:** Zustandslinien der Schnittgrößen des symmetrischen Anteils im 2-System für den Grundzustand III

Resultierende Schnittgrößen im 1- und 2-System mittels Superposition der Schnittgrößen von antimetrischem und symmetrischen Anteil

$$\bar{N}_1^c = \bar{N}_{1,Anti}^c + \bar{N}_{1,Sym}^c = 0 + \cos\alpha_c = \cos\alpha_c$$

$$\bar{Q}_1^c = \bar{Q}_{1,Anti}^c + \bar{Q}_{1,Sym}^c = \sin\alpha_c + 0 = \sin\alpha_c$$

$$\bar{M}_1^c = \bar{M}_{1,Anti}^c + \bar{M}_{1,Sym}^c = -\sin\alpha_c(h - \xi_1) + 0 = -\sin\alpha_c(h - \xi_1)$$

$$\bar{N}_1^a = \bar{N}_{1,Anti}^a + \bar{N}_{1,Sym}^a = \frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right) + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} + X_{11} \frac{2\tan\theta}{l}$$

$$\bar{Q}_1^a = \bar{Q}_{1,Anti}^a + \bar{Q}_{1,Sym}^a = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right) + X_{11} \frac{2}{l}$$

$$\bar{M}_1^a = \bar{M}_{1,Anti}^a + \bar{M}_{1,Sym}^a = \frac{\sin\alpha_c h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right) - X_{11} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right) = \left( \frac{\sin\alpha_c h}{2} - X_{11} \right) \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right)$$

$$\bar{N}_1^b = \bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right) + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} + X_{11} \frac{2\tan\theta}{l}$$

$$\bar{Q}_1^b = \bar{Q}_{1,Anti}^b + \bar{Q}_{1,Sym}^b = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right) - X_{11} \frac{2}{l}$$

$$\bar{M}_1^b = \bar{M}_{1,Anti}^b + \bar{M}_{1,Sym}^b = \frac{\sin\alpha_c h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right) + X_{11} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right) = \left( \frac{\sin\alpha_c h}{2} + X_{11} \right) \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right)$$

$$\text{mit: } \tan\alpha_g = \frac{l\sin\theta}{2h + l\cos\theta} \text{ und } \tan\alpha_c = \frac{l\sin\theta}{4h + l\cos\theta}$$

$$\bar{N}_2^c = \bar{N}_{2,Anti}^c + \bar{N}_{2,Sym}^c = 0 + 0 = 0$$

$$\bar{Q}_2^c = \bar{Q}_{2,Anti}^c + \bar{Q}_{2,Sym}^c = 0 + 0 = 0$$

$$\bar{M}_2^c = \bar{M}_{2,Anti}^c + \bar{M}_{2,Sym}^c = 0 + 0 = 0$$

$$\bar{N}_2^a = \bar{N}_{2,Anti}^a + \bar{N}_{2,Sym}^a = -\frac{\sin\alpha_c}{2\sin\theta} - \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} + X_{21} \frac{2\tan\theta}{l} = -\left( \frac{\sin\alpha_c}{2\sin\theta} + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} \right) + X_{21} \frac{2\tan\theta}{l}$$

$$\bar{Q}_2^a = \bar{Q}_{2,Anti}^a + \bar{Q}_{2,Sym}^a = 0 + X_{21} \frac{2}{l} = X_{21} \frac{2}{l}$$

$$\bar{M}_2^a = \bar{M}_{2,Anti}^a + \bar{M}_{2,Sym}^a = 0 - X_{21} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right) = -X_{21} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right)$$

$$\bar{N}_2^b = \bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b = \frac{\sin\alpha_c}{2\sin\theta} - \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} + X_{21} \frac{2\tan\theta}{l}$$

$$\bar{Q}_2^b = \bar{Q}_{2,Anti}^b + \bar{Q}_{2,Sym}^b = 0 - X_{21} \frac{2}{l} = -X_{21} \frac{2}{l}$$

$$\bar{M}_2^b = \bar{M}_{2,Anti}^b + \bar{M}_{2,Sym}^b = 0 + X_{21} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right) = X_{21} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right)$$

Einflusszahlen  $\alpha_{ij}$ , mit  $i, j = 0, 1$  und  $2$ , für Federkräfte  $C_1$  und  $C_2$  bzw. Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{Q_i Q_j}{GA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds$$



Aufgrund der Antimetrie und Symmetrie in den verschiedenen Systemen heben sich die Schnittgrößen der Integranden teilweise auf. Aus diesem Grund erfolgt, soweit möglich, vorab eine symbolische Berechnung der Integrale mit den entsprechenden Vorzeichen für die einzelnen Schnittgrößen infolge Antimetrie und Symmetrie. Erst im Anschluss werden die tatsächlichen Ausdrücke eingesetzt. Weiterhin ist in den Integralen für die Verbindungsstelle die doppelte Wanddicke zu berücksichtigen.

$$\alpha_{10} = \int_0^h \frac{\widehat{N}_0^c \bar{N}_1^c}{EA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{Q_0^c \bar{Q}_1^c}{GA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{M_0^c \bar{M}_1^c}{EI_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^a \bar{N}_1^a}{EA_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^a \bar{Q}_1^a}{GA_{cw}} d\xi_2$$

$$+ \int_0^{l/2} \frac{M_0^a \bar{M}_1^a}{EI_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^b \bar{N}_1^b}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^b \bar{Q}_1^b}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{M_0^b \bar{M}_1^b}{EI_{cw}} d\xi_3$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{N_0^a \bar{N}_1^a}{EA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{N_0^a \bar{N}_1^a l}{2EA_{cw}} = \frac{l}{2EA_{cw}} (-N_0^b) (-\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b) \\ \int_0^{l/2} \frac{N_0^b \bar{N}_1^b}{EA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{N_0^b \bar{N}_1^b l}{2EA_{cw}} = \frac{l}{2EA_{cw}} N_0^b (\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b) \end{aligned} \right\} \frac{N_0^b \bar{N}_{1,Anti}^b l}{EA_{cw}}$$

$$\text{mit: } N_0^a = -N_0^b, \bar{N}_{1,Anti}^a = -\bar{N}_{1,Anti}^b, \bar{N}_{1,Sym}^a = \bar{N}_{1,Sym}^b$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{Q_0^a \bar{Q}_1^a}{GA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{Q_0^a \bar{Q}_1^a l}{2GA_{cw}} = \frac{l}{2GA_{cw}} Q_0^b (\bar{Q}_{1,Anti}^b - \bar{Q}_{1,Sym}^b) \\ \int_0^{l/2} \frac{Q_0^b \bar{Q}_1^b}{GA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{Q_0^b \bar{Q}_1^b l}{2GA_{cw}} = \frac{l}{2GA_{cw}} Q_0^b (\bar{Q}_{1,Anti}^b + \bar{Q}_{1,Sym}^b) \end{aligned} \right\} \frac{Q_0^b \bar{Q}_{1,Anti}^b l}{GA_{cw}}$$

$$\text{mit: } Q_0^a = Q_0^b, \bar{Q}_{1,Anti}^a = Q_{1,Anti}^b, \bar{Q}_{1,Sym}^a = -\bar{Q}_{1,Sym}^b$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{M_0^a \bar{M}_1^a}{EI_{cw}} d\xi_2 &= -\frac{T_1^{III} lh}{12EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} - X_{11} \right) \\ \int_0^{l/2} \frac{M_0^b \bar{M}_1^b}{EI_{cw}} d\xi_3 &= -\frac{T_1^{III} lh}{12EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} + X_{11} \right) \end{aligned} \right\} -\frac{T_1^{III} lh^2 \sin \alpha_c}{12EI_{cw}}$$

$$\alpha_{10} = -T_1^{III} \sin \alpha_c \left[ \frac{h}{GA_{2cw}} + \frac{h^3}{3EI_{2cw}} + \frac{l}{4EA_{cw}} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{l}{4GA_{cw}} \left( \frac{\sin \theta}{\tan \alpha_g} - \cos \theta \right)^2 + \frac{lh^2}{12EI_{cw}} \right]$$

$$\begin{aligned}\alpha_{11} = & \int_0^h \frac{\bar{N}_1^c \bar{N}_1^c}{EA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{Q}_1^c \bar{Q}_1^c}{GA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{M}_1^c \bar{M}_1^c}{EI_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^a \bar{N}_1^a}{EA_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^a \bar{Q}_1^a}{GA_{cw}} d\xi_2 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^a \bar{M}_1^a}{EI_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^b \bar{N}_1^b}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^b \bar{Q}_1^b}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^b \bar{M}_1^b}{EI_{cw}} d\xi_3\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^a \bar{N}_1^a}{EA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{N}_{1,Anti}^a + \bar{N}_{1,Sym}^a)^2}{2EA_{cw}} = \frac{l(-\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b)^2}{2EA_{cw}} \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^b \bar{N}_1^b}{EA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l(\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b)^2}{2EA_{cw}}\end{aligned}\right\} \frac{(\bar{N}_{1,Anti}^b{}^2 + \bar{N}_{1,Sym}^b{}^2)l}{EA_{cw}}$$

mit:  $\bar{N}_{1,Anti}^a = -\bar{N}_{1,Anti}^b, \bar{N}_{1,Sym}^a = \bar{N}_{1,Sym}^b$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^a \bar{Q}_1^a}{GA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^a + \bar{Q}_{1,Sym}^a)^2}{2GA_{cw}} = \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^b - \bar{Q}_{1,Sym}^b)^2}{2GA_{cw}} \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^b \bar{Q}_1^b}{GA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^b + \bar{Q}_{1,Sym}^b)^2}{2GA_{cw}}\end{aligned}\right\} \frac{(\bar{Q}_{1,Anti}^b{}^2 + \bar{Q}_{1,Sym}^b{}^2)l}{GA_{cw}}$$

mit:  $\bar{Q}_{1,Anti}^a = \bar{Q}_{1,Anti}^b, \bar{Q}_{1,Sym}^a = -\bar{Q}_{1,Sym}^b$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^a \bar{M}_1^a}{EI_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l}{6EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} - X_{11} \right)^2 \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^b \bar{M}_1^b}{EI_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l}{6EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} + X_{11} \right)^2\end{aligned}\right\} \frac{\left( \frac{\sin^2 \alpha_c h^2}{4} + X_{11}^2 \right) l}{3EI_{cw}}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{11} = & h \left( \frac{\sin^2 \alpha_c}{EA_{2cw}} + \frac{\sin^2 \alpha_c}{GA_{2cw}} + \frac{\sin^2 \alpha_c h^2}{3EI_{2cw}} \right) \\ & + \frac{l}{EA_{cw}} \left[ \frac{\sin^2 \alpha_c}{4} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right)^2 + \left( \frac{\cos \alpha_c}{2 \cos \theta} + X_{11} \frac{2 \tan \theta}{l} \right)^2 \right] \\ & + \frac{l}{GA_{cw}} \left[ \frac{\sin^2 \alpha_c}{4} \left( \frac{\sin \theta}{\tan \alpha_g} - \cos \theta \right)^2 + \frac{4X_{11}^2}{l^2} \right] + \frac{l \left( \frac{\sin^2 \alpha_c h^2}{4} + X_{11}^2 \right)}{3EI_{cw}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_{20} = & \int_0^h \frac{\overset{0}{\widehat{N}}_0^c \overset{0}{\widehat{N}}_2^c}{EA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{Q_0^c \overset{0}{\widehat{Q}}_2^c}{GA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{M_0^c \overset{0}{\widehat{M}}_2^c}{EI_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{M_0^a \bar{M}_2^a}{EI_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{M_0^b \bar{M}_2^b}{EI_{cw}} d\xi_3\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{N_0^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{N_0^a \bar{N}_2^a l}{2EA_{cw}} = \frac{l}{2EA_{cw}} (-N_0^b) (-\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b) \\ \int_0^{l/2} \frac{N_0^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{N_0^b \bar{N}_2^b l}{2EA_{cw}} = \frac{l}{2EA_{cw}} N_0^b (\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b)\end{aligned}\right\} \frac{N_0^b \bar{N}_{2,Anti}^b l}{EA_{cw}}$$

$$\text{mit: } N_0^a = -N_0^b, \bar{N}_{2,Anti}^a = -\bar{N}_{2,Anti}^b, \bar{N}_{2,Sym}^a = \bar{N}_{2,Sym}^b$$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{Q_0^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{Q_0^a \bar{Q}_2^a l}{2GA_{cw}} = \frac{l}{2GA_{cw}} Q_0^b (\bar{Q}_{2,Anti}^b - \bar{Q}_{2,Sym}^b) \\ \int_0^{l/2} \frac{Q_0^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{Q_0^b \bar{Q}_2^b l}{2GA_{cw}} = \frac{l}{2GA_{cw}} Q_0^b (\bar{Q}_{2,Anti}^b + \bar{Q}_{2,Sym}^b)\end{aligned}\right\} \frac{Q_0^b \bar{Q}_{2,Anti}^b l}{GA_{cw}} = 0$$

$$\text{mit: } Q_0^a = Q_0^b, \bar{Q}_{2,Anti}^a = \bar{Q}_{2,Anti}^b, \bar{Q}_{2,Sym}^a = -\bar{Q}_{2,Sym}^b$$

$$\left. \begin{aligned}\int_0^{l/2} \frac{M_0^a \bar{M}_1^a}{EI_{cw}} d\xi_2 &= \frac{T_1^{III} l h}{12EI_{cw}} X_{21} \\ \int_0^{l/2} \frac{M_0^b \bar{M}_1^b}{EI_{cw}} d\xi_3 &= -\frac{T_1^{III} l h}{12EI_{cw}} X_{21}\end{aligned}\right\} 0$$

$$\alpha_{20} = \frac{N_0^b \bar{N}_{2,Anti}^b l}{EA_{cw}} = \frac{T_1^{III} \sin \alpha_c l}{4EA_{cw} \sin \theta} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right)$$

$$\begin{aligned}\alpha_{12} = & \int_0^h \frac{\overset{0}{\widehat{N}}_1^c \overset{0}{\widehat{N}}_2^c}{EA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{Q}_1^c \overset{0}{\widehat{Q}}_2^c}{GA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{M}_1^c \overset{0}{\widehat{M}}_2^c}{EI_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^a \bar{M}_2^a}{EI_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^b \bar{M}_2^b}{EI_{cw}} d\xi_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{N}_{1,Anti}^a + \bar{N}_{1,Sym}^a)(\bar{N}_{2,Anti}^a + \bar{N}_{2,Sym}^a)}{2EA_{cw}} = \\
\int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_1^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l(\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b)(\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b)}{2EA_{cw}} = \\
&\left\{ \frac{l(-\bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b)(-\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b)}{2EA_{cw}} \right\} \frac{(\bar{N}_{1,Anti}^b \bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{1,Sym}^b \bar{N}_{2,Sym}^b)l}{EA_{cw}}
\end{aligned}$$

mit:  $\bar{N}_{1,Anti}^a = -\bar{N}_{1,Anti}^b$ ,  $\bar{N}_{1,Sym}^a = \bar{N}_{1,Sym}^b$ ,  $\bar{N}_{2,Anti}^a = -\bar{N}_{2,Anti}^b$ ,  $\bar{N}_{2,Sym}^a = \bar{N}_{2,Sym}^b$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^a + \bar{Q}_{1,Sym}^a)(\bar{Q}_{2,Anti}^a + \bar{Q}_{2,Sym}^a)}{2GA_{cw}} = \\
\int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_1^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^b + \bar{Q}_{1,Sym}^b)(\bar{Q}_{2,Anti}^b + \bar{Q}_{2,Sym}^b)}{2GA_{cw}} = \\
&\left\{ \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^b - \bar{Q}_{1,Sym}^b)(\bar{Q}_{2,Anti}^b - \bar{Q}_{2,Sym}^b)}{2GA_{cw}} \right\} \frac{\bar{Q}_{1,Sym}^b \bar{Q}_{2,Sym}^b l}{GA_{cw}} \\
&\left\{ \frac{l(\bar{Q}_{1,Anti}^b + \bar{Q}_{1,Sym}^b)(\bar{Q}_{2,Anti}^b + \bar{Q}_{2,Sym}^b)}{2GA_{cw}} \right\}
\end{aligned}$$

mit:  $\bar{Q}_{1,Anti}^a = \bar{Q}_{1,Anti}^b$ ,  $\bar{Q}_{1,Sym}^a = -\bar{Q}_{1,Sym}^b$ ,  $\bar{Q}_{2,Anti}^a = \bar{Q}_{2,Anti}^b$ ,  $\bar{Q}_{2,Sym}^a = -\bar{Q}_{2,Sym}^b$

$$\begin{aligned}
\int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^a \bar{M}_2^a}{EI_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l}{6EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} - X_{11} \right) (-X_{21}) \\
\int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_1^b \bar{M}_2^b}{EI_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l}{6EI_{cw}} \left( \frac{\sin \alpha_c h}{2} + X_{11} \right) (X_{21})
\end{aligned}
\left\{ \frac{X_{11} X_{21} l}{3EI_{cw}} = -\frac{X_{11}^2 l}{3EI_{cw}} \right.$$

mit:  $X_{21} = -X_{11}$

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -\frac{l}{EA_{cw}} \left[ \frac{\sin^2 \alpha_c}{4 \sin \theta} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right) + \left( \frac{\cos \alpha_c}{2 \cos \theta} + X_{11} \frac{2 \tan \theta}{l} \right)^2 \right] - \frac{4 X_{11}^2}{GA_{cw} l} - \frac{X_{11}^2 l}{3EI_{cw}}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{22} &= \int_0^h \frac{\bar{N}_2^c \bar{N}_2^c}{EA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{Q}_2^c \bar{Q}_2^c}{GA_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{\bar{M}_2^c \bar{M}_2^c}{EI_{2cw}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_2^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_2^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 \\
&+ \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_2^a \bar{M}_2^a}{EI_{cw}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_2^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_2^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_2^b \bar{M}_2^b}{EI_{cw}} d\xi_3
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_2^a \bar{N}_2^a}{EA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{N}_{2,Anti}^a + \bar{N}_{2,Sym}^a)^2}{2EA_{cw}} = \frac{l(-\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b)^2}{2EA_{cw}} \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{N}_2^b \bar{N}_2^b}{EA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l(\bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{2,Sym}^b)^2}{2EA_{cw}} \end{aligned} \right\} \frac{(\bar{N}_{2,Anti}^b)^2 + (\bar{N}_{2,Sym}^b)^2}{EA_{cw}} l$$

mit:  $\bar{N}_{2,Anti}^a = -\bar{N}_{2,Anti}^b, \bar{N}_{2,Sym}^a = \bar{N}_{2,Sym}^b$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_2^a \bar{Q}_2^a}{GA_{cw}} d\xi_2 &= \frac{l(\bar{Q}_{2,Anti}^a + \bar{Q}_{2,Sym}^a)^2}{2GA_{cw}} = \frac{l\left(\overbrace{\bar{Q}_{2,Anti}^b}^0 - \bar{Q}_{2,Sym}^b\right)^2}{2GA_{cw}} \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{Q}_2^b \bar{Q}_2^b}{GA_{cw}} d\xi_3 &= \frac{l\left(\overbrace{\bar{Q}_{2,Anti}^b}^0 + \bar{Q}_{2,Sym}^b\right)^2}{2GA_{cw}} \end{aligned} \right\} \frac{\bar{Q}_{2,Sym}^b{}^2 l}{GA_{cw}}$$

mit:  $\bar{Q}_{2,Anti}^a = \bar{Q}_{2,Anti}^b, \bar{Q}_{2,Sym}^a = -\bar{Q}_{2,Sym}^b$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_2^a \bar{M}_2^a}{EI_{cw}} d\xi_2 &= \frac{lX_{21}^2}{6EI_{cw}} \\ \int_0^{l/2} \frac{\bar{M}_2^b \bar{M}_2^b}{EI_{cw}} d\xi_3 &= \frac{lX_{21}^2}{6EI_{cw}} \end{aligned} \right\} \frac{X_{21}^2 l}{3EI_{cw}} = \frac{X_{11}^2 l}{3EI_{cw}}$$

mit:  $X_{21} = -X_{11}$

$$\alpha_{22} = \frac{l}{EA_{cw}} \left[ \frac{\sin^2 \alpha_c}{4} + \left( \frac{\cos \alpha_c}{2 \cos \theta} + X_{11} \frac{2 \tan \theta}{l} \right)^2 \right] + \frac{4X_{11}^2}{GA_{cw} l} + \frac{X_{11}^2 l}{3EI_{cw}}$$

Gleichungssystem zur Ermittlung von  $X_1$  und  $X_2$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2 = -\frac{X_1}{c_{f,III}} = u_{X_1}^M$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{12}X_1 + \alpha_{22}X_2 = -\frac{X_2}{c_{f,III}} = u_{X_2}^E$$

Lösung von Gleichungssystem für  $X_1$  und  $X_2$

$$C_{1,III} = X_1 = \frac{-\alpha_{10} \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) + \alpha_{20} \alpha_{12}}{\left( \alpha_{11} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) - \alpha_{12}^2}$$

$$C_{2,III} = X_2 = -\frac{\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1}{\alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}}}$$

Lösung für allgemeinen Fall mit Komponenten von  $EA_{cw}$ ,  $GA_{cw}$  und  $EI_{cw}$  durch Matlab; nachfolgende Betrachtung nur für die beiden Grenzfälle  $c_f \rightarrow 0$  und  $t \rightarrow 0$

Grenzwertbetrachtung für  $c_f \rightarrow 0$  für statisch Überzählige  $X_1$  und  $X_2$

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} X_1 = \lim_{c_f \rightarrow 0} \frac{-\alpha_{10} \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) + \alpha_{20} \alpha_{12}}{\left( \alpha_{11} + \frac{1}{c_f} \right) \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) - \alpha_{12}^2} = 0$$

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} X_2 = \lim_{c_f \rightarrow 0} -\frac{\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1}{\alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}}} = 0$$

Da Federkräfte Null werden, wird folglich der Grenzfall  $c_f \rightarrow 0$  korrekt abgebildet. Die Grenzwertbetrachtung  $t \rightarrow 0$  für statisch Überzählige  $X_{11}$ ,  $X_{21}$ ,  $X_1$  und  $X_2$  liefert:

$$\lim_{t \rightarrow 0} X_{11} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\frac{\cos \alpha_c \tan \theta}{2 \cos \theta EA_{cw}}}{\frac{2 \tan^2 \theta}{l EA_{cw}} + \frac{2}{l GA_{cw}} + \frac{l}{6 EI_{cw}}} = 0 = \lim_{t \rightarrow 0} X_{21}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} X_1 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\alpha_{10} \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) + \alpha_{20} \alpha_{12}}{\left( \alpha_{11} + \frac{1}{c_{f,III}} \right) \left( \alpha_{22} + \frac{1}{c_f} \right) - \alpha_{12}^2} = \frac{T_1^{III}}{\sin \alpha_c}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} X_2 = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\alpha_{20} + \alpha_{12} X_1}{\alpha_{22} + \frac{1}{c_{f,III}}} = \frac{T_1^{III}}{\sin \alpha_c} \frac{\cos^2 \alpha_c \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c}$$

mit  $EA_{cw} = E_{cw} t H_c$  und  $GA_{cw} = 5 E_{cw} t H_c / 12$  und  $EI_{cw} = E_{cw} t^3 H_c / 12$   
 $EA_{2cw} = E_{cw} 2 t H_c = 2 EA_{cw}$  und  $GA_{2cw} = G_{cw} 2 t H_c = 2 GA_{cw}$   
 $EI_{2cw} = E_{cw} (2t)^3 H_c / 12 = 8 EI_{cw}$   
 $\tan \alpha_g = l \sin \theta / (2h + l \cos \theta)$   
 $\tan \alpha_c = l \sin \theta / (4h + l \cos \theta)$

Demnach verschwinden für den Grenzfall  $t \rightarrow 0$  die beiden statisch Überzähligen  $X_{11}$  und  $X_{21}$ , womit auch die Momenten- und Querkraftschnittgrößen im symmetrischen Anteil des 1- und 2-Systems Null werden. Als Schnittgrößen treten somit nur noch die Komponenten aus dem antisymmetrischen Anteil und den Normalkräften aus dem symmetrischen Anteil des 10- und 20-System auf. Die Schnittgrößen im 0-System bleiben hingegen unverändert.

Schnittgrößen im 1- und 2-System für  $t \rightarrow 0$

$$\bar{N}_1^c = \bar{N}_{10,Sym}^c = \cos\alpha_c$$

$$\bar{Q}_1^c = \bar{Q}_{1,Anti}^c = \sin\alpha_c$$

$$\bar{M}_1^c = \bar{M}_{1,Anti}^c = -\sin\alpha_c(h - \xi_1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_1^a = \bar{N}_{1,Anti}^a + \bar{N}_{10,Sym}^a = \frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right) + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_1^a = \bar{Q}_{1,Anti}^a = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_1^a = \bar{M}_{1,Anti}^a = \frac{\sin\alpha_c h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_1^b = \bar{N}_{1,Anti}^b + \bar{N}_{10,Sym}^b = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right) + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_1^b = \bar{Q}_{1,Anti}^b = -\frac{\sin\alpha_c}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_1^b = \bar{M}_{1,Anti}^b = \frac{\sin\alpha_c h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right)$$

$$\text{mit: } \tan\alpha_g = \frac{l\sin\theta}{2h + l\cos\theta} \text{ und } \tan\alpha_c = \frac{l\sin\theta}{4h + l\cos\theta}$$

$$\bar{N}_2^c = 0$$

$$\bar{Q}_2^c = 0$$

$$\bar{M}_2^c = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_2^a = \bar{N}_{2,Anti}^a + \bar{N}_{20,Sym}^a = -\left( \frac{\sin\alpha_c}{2\sin\theta} + \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_2^a = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_2^a = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_2^b = \bar{N}_{2,Anti}^b + \bar{N}_{20,Sym}^b = \frac{\sin\alpha_c}{2\sin\theta} - \frac{\cos\alpha_c}{2\cos\theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_2^b = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_2^b = 0$$

Die resultierenden Schnittgrößen für  $c_f \rightarrow 0$  ergeben sich direkt aus dem 0-System und lauten:

$$N_0^c = 0$$

$$Q_0^c = -T_1^{III}$$

$$M_0^c = T_1^{III}(h - \xi_1)$$

$$N_0^a = -N_0^b = -\frac{T_1^{III}}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right)$$

$$Q_0^a = Q_0^b = \frac{T_1^{III}}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)$$

$$M_0^a = -\frac{T_1^{III}h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_2}{l} \right)$$

$$N_0^b = \frac{T_1^{III}}{2} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right)$$

$$Q_0^b = \frac{T_1^{III}}{2} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)$$

$$M_0^b = -\frac{T_1^{III}h}{2} \left( 1 - \frac{2\xi_3}{l} \right)$$

$$\text{mit: } \tan\alpha_g = \frac{l\sin\theta}{2h + l\cos\theta} \text{ und } \tan\alpha_c = \frac{l\sin\theta}{4h + l\cos\theta}$$

Allgemein lassen sich die resultierenden Schnittgrößen beim PvK folgendermaßen ermitteln.

$$S^k = S_0^k + X_1 S_1^k + X_2 S_2^k, \text{ mit: } k = a, b, c$$

Für den Grenzfall  $t \rightarrow 0$  lauten diese

$$\lim_{t \rightarrow 0} N^c = N_0^c + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \bar{N}_{10, Sym}^c = \frac{T_1^{III}}{\tan\alpha_c}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q^c = Q_0^c + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \bar{Q}_{1, Anti}^c = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} M^c = M_0^c + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \bar{M}_{1, Anti}^c = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} N^a = N_0^a + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_1^a + \lim_{t \rightarrow 0} X_2 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_2^a = \frac{T_1^{III}}{4} \frac{\sin(2\alpha_c - \theta) - \sin\theta}{\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q^a = Q_0^a + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_1^a = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} M^a = M_0^a + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_1^a = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} N^b = N_0^b + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_1^b + \lim_{t \rightarrow 0} X_2 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{N}_2^b = \frac{T_1^{III}}{4} \frac{\sin(2\alpha_c + \theta) + \sin\theta}{\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q^b = Q_0^b + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{Q}_1^b = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} M^b = M_0^b + \lim_{t \rightarrow 0} X_1 \lim_{t \rightarrow 0} \bar{M}_1^b = 0$$

Dementsprechend treten für  $t \rightarrow 0$  nur Normalkräfte als Schnittgrößen in den Wänden auf.



Verschiebung am Punkt M in y-Richtung mittels Satz von Castigliano (Dankert & Dankert 2006)

$$u = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial F} ds + \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F} ds + \int \frac{Q}{GA} \frac{\partial Q}{\partial F} ds + \frac{C}{c} \frac{\partial C}{\partial F}$$

Für die allgemeine Näherungslösung ergibt sich diese aus

$$\begin{aligned} u_y^M = & \int_0^h \frac{N^c}{EA_{2cw}} \frac{\partial N^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{Q^c}{GA_{2cw}} \frac{\partial Q^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{M^c}{EI_{2cw}} \frac{\partial M^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{N^a}{EA_{cw}} \frac{\partial N^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{Q^a}{GA_{cw}} \frac{\partial Q^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{M^a}{EI_{cw}} \frac{\partial M^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{N^b}{EA_{cw}} \frac{\partial N^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{Q^b}{GA_{cw}} \frac{\partial Q^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{M^b}{EI_{cw}} \frac{\partial M^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 + \frac{X_1}{c_{f,III}} \frac{\partial X_1}{\partial T_1^{III}} + \frac{X_2}{c_{f,III}} \frac{\partial X_2}{\partial T_1^{III}}. \end{aligned}$$

Keine praktikable Lösung von Hand mehr möglich, weshalb diese als Matlab-Skript programmiert wird.

Für die Grenzwertbetrachtung  $c_f \rightarrow 0$  folgt

$$\begin{aligned} \lim_{c_f \rightarrow 0} u_y^M = & \int_0^h \frac{Q_0^c}{GA_{2cw}} \frac{\partial Q_0^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^h \frac{M_0^c}{EI_{2cw}} \frac{\partial M_0^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^a}{EA_{cw}} \frac{\partial N_0^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^a}{GA_{cw}} \frac{\partial Q_0^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 \\ & + \int_0^{l/2} \frac{M_0^a}{EI_{cw}} \frac{\partial M_0^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \frac{N_0^b}{EA_{cw}} \frac{\partial N_0^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{Q_0^b}{GA_{cw}} \frac{\partial Q_0^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 + \int_0^{l/2} \frac{M_0^b}{EI_{cw}} \frac{\partial M_0^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 \\ = & T_1^{III} \left[ h \left( \frac{h}{GA_{2cw}} + \frac{h^2}{3EI_{2cw}} \right) + \frac{l}{4EA_{cw}} \left( \frac{\cos\theta}{\tan\alpha_g} + \sin\theta \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{l}{4GA_{cw}} \left( \frac{\sin\theta}{\tan\alpha_g} - \cos\theta \right)^2 + \frac{h^2 l}{12EI_{cw}} \right]. \end{aligned}$$

Für den Fall  $t \rightarrow 0$  lässt sich die Verschiebung  $u_y^M$  folgendermaßen bestimmen.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} u_y^M = & \int_0^h \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N^c}{EA_{2cw}} \frac{\partial \lim_{t \rightarrow 0} N^c}{\partial T_1^{III}} d\xi_1 + \int_0^{l/2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N^a}{EA_{cw}} \frac{\partial \lim_{t \rightarrow 0} N^a}{\partial T_1^{III}} d\xi_2 + \int_0^{l/2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{N^b}{EA_{cw}} \frac{\partial \lim_{t \rightarrow 0} N^b}{\partial T_1^{III}} d\xi_3 \\ & + \frac{\lim_{t \rightarrow 0} X_1}{c_f} \frac{\partial \lim_{t \rightarrow 0} X_1}{\partial T_1^{III}} + \frac{\lim_{t \rightarrow 0} X_2}{c_f} \frac{\partial \lim_{t \rightarrow 0} X_2}{\partial T_1^{III}} \\ = & T_1^{III} \left\{ \frac{h}{\tan^2 \alpha_c EA_{2cw}} + \frac{l \{ [\sin(2\alpha_c - \theta) - \sin\theta]^2 + [\sin(2\alpha_c + \theta) + \sin\theta]^2 \}}{32EA_{cw}(\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c)^2} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sin^2 \alpha_c c_{f,III}} \left[ 1 + \frac{\sin^4 \theta \cos^4 \alpha_c}{(\cos^2\theta - 2\cos^2\theta\cos^2\alpha_c + \cos^2\alpha_c)^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

## Matlab Skript

```

1  %% Statically indeterminate calculation for basci loading III shear
2  clear all; close all; format LongE;
3  % Variables
4  syms l e h theta alpg alpcl alp2; % Geometry
5  syms zeta1 zeta2 zeta3; % Local coordinates
6  syms F; % Load
7  syms EI EA GA c1 c2 c3 t Ecw; % Material properties
8  syms a10 a11 a12 a20 a22; % for solution of matrix
9  % Scalars
10 Lch0=0.259/2; h0=0.002; Wch0=0.224/2; Linc0=Lch0+2*h0; le0=(Linc0^2+Wch0^2)^0.5; theta0=atan(Wch0/Linc0); t0=0.0017; Ecw0=150000; Hc0=1; Ef0=30000; F0=Wch0+2*13;
11 alpg0=atan(Wch0/Lch0); alpcl0=atan(Wch0/(Lch0+2*h0)); % different angles alpha
12 EA0=Ecw0*t0/Hc0; GA0=5/12*EA0; EI0=Ecw0*Hc0*t0^3/12; % Flaxis definition for GA0 = 5/12*EA0/(1+nu0); here: nu0=0;
13 lref0=((Lch0^2+Wch0^2)^(1/2))/2; EAf0=EI0*Hc0*lref0; % reference length for spring stiffness and spring's compressive stiffness
14 c10=EAf0/((Lch0+2*h0)^2+Wch0^2)^(1/2))/2; % spring stiffness
15 alp=alpcl;
16 c=c1;
17 % 0-System
18 M0h=0; Q0h=-F; M0h=F*(h-zeta1);
19 M0a=-F/2*(cos(theta)/tan(alpg)+sin(theta)); Q0a=F/2*(sin(theta)/tan(alpg)-cos(theta)); M0a=-F/2*h*(1-2*zeta2/le);
20 M0b=-M0a; Q0b=Q0a; M0b=subs(M0a,zeta2,zeta3); % Antimetry conditions according to chosen positive line for stress resultants
21
22 %% 1-System
23 % Antimetric part of 1-system
24 N1hAnti=0; Q1hAnti=sin(alpg); M1hAnti=-sin(alpg)*(h-zeta1);
25 N1aAnti=sin(alpg)/2*(cos(theta)/tan(alpg)+sin(theta)); Q1aAnti=sin(alpg)/2*(-sin(theta)/tan(alpg)+cos(theta)); M1aAnti=sin(alpg)/2*h*(1-2*zeta2/le);
26 N1bAnti=-N1aAnti; Q1bAnti=Q1aAnti; M1bAnti=subs(M1aAnti,zeta2,zeta3); % Antimetry conditions according to chosen positive line for stress resultants
27
28 % Symmetric part of 1-system
29 %%% 10-System
30 N10bSym=cos(alpg)/(2*cos(theta)); Q10bSym=0; M10bSym=0; % applying symmetry reduces the problem to 1 x static indeterminated system, solution of lower 1-wall (b-wall);
31 % horizontal wall in plane of symmetry irrelevant for solution (added later)
32 %%% 11-System
33 N11bSym=2*tan(theta)/le; Q11bSym=-2/le; M11bSym=(1-2*zeta3/le);
34
35 %%% Influence numbers alphasjSym
36 alpha10bSym=int(N10bSym*N11bSym/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q10bSym*Q11bSym/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M10bSym*M11bSym/(EI),zeta3,[0 le/2]);
37 alpha11bSym=int(N11bSym*N11bSym/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q11bSym*Q11bSym/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M11bSym*M11bSym/(EI),zeta3,[0 le/2]);
38
39 %%% Indeterminate X11
40 X11=-alpha10bSym/alpha11bSym;
41 X11val=double(subs(X11,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI c1],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 c10]));
42
43 %%% Symmetric stress resultants
44 N1bSym=cos(alpg); Q1bSym=0; M1bSym=0;
45 N1bSym=M10bSym*X11+N11bSym; Q1bSym=Q10bSym*X11+Q11bSym; M1bSym=M10bSym*X11+M11bSym;
46 N1aSym=N1bSym; Q1aSym=-Q1bSym; M1aSym=-subs(M1bSym,zeta3,zeta2); % Symmetry conditions according to chosen positive line for stress resultants
47
48 % Stress resultants for 1-system
49 N1h=N1hAnti+N1bSym; Q1h=Q1hAnti+Q1bSym; M1h=M1hAnti+M1bSym;
50 N1a=N1aAnti+N1aSym; Q1a=Q1aAnti+Q1aSym; M1a=M1aAnti+M1aSym;
51 N1b=N1bAnti+N1bSym; Q1b=Q1bAnti+Q1bSym; M1b=M1bAnti+M1bSym;
52
53 %% 2-System (no impact on h-wall)
54 % Antimetric part of 2-system
55 N2hAnti=0; Q2hAnti=0; M2hAnti=0;
56 N2aAnti=-sin(alpg)/(2*sin(theta)); Q2aAnti=0; M2aAnti=0;
57 N2bAnti=-N2aAnti; Q2bAnti=0; M2bAnti=0; % Antimetry conditions according to chosen positive line for stress resultants
58
59 % Symmetric part of 2-system
60 %%% 20-System
61 N20bSym=-cos(alpg)/(2*cos(theta)); Q20bSym=0; M20bSym=0;
62
63 %%% 21-System
64 N21bSym=2*tan(theta)/le; Q21bSym=-2/le; M21bSym=(1-2*zeta3/le);
65
66 %%% Influence numbers alphasjSym
67 alpha210Sym=int(N20bSym*N21bSym/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q20bSym*Q21bSym/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M20bSym*M21bSym/(EI),zeta3,[0 le/2]);
68 alpha211Sym=int(N21bSym*N21bSym/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q21bSym*Q21bSym/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M21bSym*M21bSym/(EI),zeta3,[0 le/2]);
69
70 %%% Indeterminate X11Sym
71 X21=-alpha210Sym/alpha211Sym;
72 X21val=double(subs(X21,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI c1],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 c10])); % X21 identical to X11 but with opposite sign
73
74 %%% Symmetric stress resultants
75 N2hSym=0; Q2hSym=0; M2hSym=0;
76 N2bSym=N20bSym*X21+N21bSym; Q2bSym=Q20bSym*X21+Q21bSym; M2bSym=M20bSym*X21+M21bSym;
77 N2aSym=N2bSym; Q2aSym=-Q2bSym; M2aSym=-subs(M2bSym,zeta3,zeta2); % Symmetry conditions according to chosen positive line for stress resultants
78
79 % Stress resultants for 2-system
80 N2h=0; Q2h=0; M2h=0;
81 N2a=N2aAnti+N2aSym; Q2a=Q2aAnti+Q2aSym; M2a=M2aAnti+M2aSym;
82 N2b=N2bAnti+N2bSym; Q2b=Q2bAnti+Q2bSym; M2b=M2bAnti+M2bSym;
83
84 %%% Influence numbers alphasj
85 alpha10=int(N0h*N1h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q0h*Q1h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M0h*M1h/(8*EI),zeta1,[0 h])...
86 +int(N0a*N1a/(EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q0a*Q1a/(GA),zeta2,[0 le/2])+int(M0a*M1a/(EI),zeta2,[0 le/2])...
87 +int(N0b*N1b/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q0b*Q1b/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M0b*M1b/(EI),zeta3,[0 le/2]);
88 alpha11=int(N1h*N1h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q1h*Q1h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M1h*M1h/(8*EI),zeta1,[0 h])...
89 +int(N1a*N1a/(EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q1a*Q1a/(GA),zeta2,[0 le/2])+int(M1a*M1a/(EI),zeta2,[0 le/2])...
90 +int(N1b*N1b/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q1b*Q1b/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M1b*M1b/(EI),zeta3,[0 le/2]);
91 alpha20=int(N0h*N2h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q0h*Q2h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M0h*M2h/(8*EI),zeta1,[0 h])...
92 +int(N0a*N2a/(EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q0a*Q2a/(GA),zeta2,[0 le/2])+int(M0a*M2a/(EI),zeta2,[0 le/2])...
93 +int(N0b*N2b/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q0b*Q2b/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M0b*M2b/(EI),zeta3,[0 le/2]);
94 alpha21=int(N1h*N2h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q1h*Q2h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M1h*M2h/(8*EI),zeta1,[0 h])...
95 +int(N1a*N2a/(EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q1a*Q2a/(GA),zeta2,[0 le/2])+int(M1a*M2a/(EI),zeta2,[0 le/2])...
96 +int(N1b*N2b/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q1b*Q2b/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M1b*M2b/(EI),zeta3,[0 le/2]);
97 alpha22=int(N2h*N2h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q2h*Q2h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M2h*M2h/(8*EI),zeta1,[0 h])...
98 +int(N2a*N2a/(EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q2a*Q2a/(GA),zeta2,[0 le/2])+int(M2a*M2a/(EI),zeta2,[0 le/2])...
99 +int(N2b*N2b/(EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q2b*Q2b/(GA),zeta3,[0 le/2])+int(M2b*M2b/(EI),zeta3,[0 le/2]);
100

```

```

101 %% Determination of spring force X1
102 A=[a11+1/c a12 ; a12 a22+1/c] ; b=[-a10; -a20]; solu=linsolve(A,b); X1a=solu(1,1); X2a=solu(2,1);
103 X1=subs(X1a,[a10 a11 a12 a20 a22],[alpha10 alpha11 alpha12 alpha20 alpha22]); % upper axial spring
104 X2=subs(X2a,[a10 a11 a12 a20 a22],[alpha10 alpha11 alpha12 alpha20 alpha22]); % lower axial spring
105
106 X1val=double(subs(X1,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
107 X2val=double(subs(X2,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
108
109 %% Final stress resultants
110 Nh=N0h+X1*N1h+X2*N2h; Na=N0a+X1*N1a+X2*N2a; Nb=N0b+X1*N1b+X2*N2b;
111 Qh=Q0h+X1*Q1h+X2*Q2h; Qa=Q0a+X1*Q1a+X2*Q2a; Qb=Q0b+X1*Q1b+X2*Q2b;
112 Mh=M0h+X1*M1h+X2*M2h; Ma=M0a+X1*M1a+X2*M2a; Mb=M0b+X1*M1b+X2*M2b;
113
114 Nhval=double(subs(Nh,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
115 Qhval=double(subs(Qh,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
116 Mhval=double(subs(Mh,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl zeta1],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0 0]));
117 Resh=[Nhval Qhval Mhval];
118 Naval=double(subs(Na,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
119 Qaval=double(subs(Qa,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
120 Maval=double(subs(Ma,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl zeta2],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0 0]));
121 Resa=[Naval Qaval Maval];
122 Nbval=double(subs(Nb,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
123 Qbval=double(subs(Qb,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
124 Mbval=double(subs(Mb,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl zeta3],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0 0]));
125 Resb=[Nbval Qbval Mbval];
126
127 %% uM2 with Castigliano theorem
128 % Just structure
129 Ustru=int(N0h^2/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q0h^2/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M0h^2/(2*EI),zeta1,[0 h])...
130 +int(N0a^2/(2*EA),zeta2,[0 le/2])+int(Q0a^2/(2*GA),zeta2,[0 le/2])+int(M0a^2/(2*EI),zeta2,[0 le/2])...
131 +int(N0b^2/(2*EA),zeta3,[0 le/2])+int(Q0b^2/(2*GA),zeta3,[0 le/2])+int(M0b^2/(2*EI),zeta3,[0 le/2]);
132 u2struCas=diff(Ustru,F);
133 u2struCasval=double(subs(u2struCas,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
134
135 % Fill
136 Ufill=int(Nh^2/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Qh^2/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(Mh^2/(2*EI),zeta1,[0 h])...
137 +int(Na^2/(2*EA),zeta2,[0 le/2])+int(Qa^2/(2*GA),zeta2,[0 le/2])+int(Ma^2/(2*EI),zeta2,[0 le/2])...
138 +int(Nb^2/(2*EA),zeta3,[0 le/2])+int(Qb^2/(2*GA),zeta3,[0 le/2])+int(Mb^2/(2*EI),zeta3,[0 le/2])+X1^2/(2*c)+X2^2/(2*c);
139 u2fillCas=diff(Ufill,F);
140 u2fillCasval=double(subs(u2fillCas,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
141
142 % % % Alternativ version of Castigliano
143 % uyfillCasalt=int(diff(Nh,F)*Nh/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(diff(Qh,F)*Qh/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(diff(Mh,F)*Mh/(2*EI),zeta1,[0 h])...
144 % +int(diff(Na,F)*Na/EA,zeta2,[0 le/2])+int(diff(Qa,F)*Qa/GA,zeta2,[0 le/2])+int(diff(Ma,F)*Ma/EI,zeta2,[0 le/2])...
145 % +int(diff(Nb,F)*Nb/EA,zeta3,[0 le/2])+int(diff(Qb,F)*Qb/GA,zeta3,[0 le/2])+int(diff(Mb,F)*Mb/EI,zeta3,[0 le/2])+diff(X1,F)*X1/c+diff(X2,F)*X2/c;
146 % uyfillCasaltval=double(subs(uyfillCasalt,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
147
148 %% uM1 with Reduction theorem
149 N00h=1; Q00h=0; M00h=0;
150 N00a=cos(theta)/2; Q00a=-sin(theta)/2; M00a=sin(theta)/2*(le/2-zeta2);
151 N00b=M00a; Q00b=-Q00a; M00b=-subs(M00a,zeta2,zeta3);
152
153 % Just structure
154 ulstru=int(N0h*N00h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Q0h*Q00h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(M0h*M00h/(2*EI),zeta1,[0 h])...
155 +int(N0a*N00a/EA,zeta2,[0 le/2])+int(Q0a*Q00a/GA,zeta2,[0 le/2])+int(M0a*M00a/EI,zeta2,[0 le/2])...
156 +int(N0b*N00b/EA,zeta3,[0 le/2])+int(Q0b*Q00b/GA,zeta3,[0 le/2])+int(M0b*M00b/EI,zeta3,[0 le/2]);
157 ulstruval=double(subs(ulstru,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));
158
159 % Fill
160 ulfill=int(Nh*N00h/(2*EA),zeta1,[0 h])+int(Qh*Q00h/(2*GA),zeta1,[0 h])+int(Mh*M00h/(2*EI),zeta1,[0 h])...
161 +int(Na*N00a/EA,zeta2,[0 le/2])+int(Qa*Q00a/GA,zeta2,[0 le/2])+int(Ma*M00a/EI,zeta2,[0 le/2])...
162 +int(Nb*N00b/EA,zeta3,[0 le/2])+int(Qb*Q00b/GA,zeta3,[0 le/2])+int(Mb*M00b/EI,zeta3,[0 le/2]);
163 ulfillval=double(subs(ulfill,[le h theta alpg alpcl F EA GA EI cl],[le0 h0 theta0 alpg0 alpcl0 F0 EA0 GA0 EI0 cl0]));

```

Abb. C.25: Matlab Skript für Grundzustand III

### Anhang C.3: Übersicht zu den allgemeinen und vereinfachten Bestimmungsgleichungen der äquivalenten Materialkennwerte für die verschiedenen Grundzustände

#### Zellwandsteifigkeiten

$$EA_{cw} = E_{cw}tH_c \text{ und } GA_{cw} = \frac{5E_{cw}tH_c}{12} \text{ und } EI_{cw} = \frac{E_{cw}t^3H_c}{12}$$

$$EA_{2cw} = E_{cw}2tH_c \text{ und } GA_{2cw} = \frac{5E_{cw}tH_c}{6} \text{ und } EI_{cw} = \frac{2E_{cw}t^3H_c}{3}$$

#### Allgemeine Bestimmungsgleichungen

##### *Grundzustand Ia bei Zug in $x_1$ -Richtung*

$$E_{1,t}^* = \frac{1}{Y_{t,l}^I + Y_{t,h}^I + Y_{t,f}^I} \frac{2h + l\cos\theta}{l^2\sin\theta H_c}$$

$$v_{12,t}^* = \frac{Y_t^I}{Y_{t,l}^I + Y_{t,h}^I + Y_{t,cf}^I} \frac{(2h + l\cos\theta)\cos\theta}{c_{f,Ia}l^2}$$

$$\text{mit: Anteil } Y_{t,l}^I = \frac{\cos^2\theta(1-Y_t^I\sin^2\theta)^2}{EA_{cw}} + \left(\frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}}\right)\sin^2\theta(1 + Y_t^I\cos^2\theta)^2$$

$$\text{Anteil } Y_{t,h}^I = \frac{2h}{EA_{cw}l}$$

$$\text{Anteil } Y_{t,f}^I = \frac{Y_t^{I^2}\sin^2\theta\cos^2\theta}{c_{f,Ia}l}$$

$$Y_t^I = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\cos^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,Ia}l}} \quad \text{und } c_{f,Ia} = E_f \frac{(2h+l\cos\theta)H_c}{l\sin\theta}$$

##### *Grundzustand Ib bei Druck in $x_1$ -Richtung*

$$E_{1,c}^* = \frac{c_{f,Ib}}{Y_c^I} \frac{2h + l\cos\theta}{l\sin\theta H_c}$$

$$v_{12,c}^* = -\frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{(2h + l\cos\theta)\cos\theta}{l}$$

$$\text{mit: } Y_c^I = \frac{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2\sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,Ib}l}} \quad \text{und } c_{f,Ib} = E_f \frac{l\sin\theta H_c}{h + l\cos\theta}$$

*Grundzustand IIa bei Zug in  $x_2$ -Richtung*

$$E_{2,t}^* = \frac{1}{Y_{t,l}^{II} + Y_{t,h}^{II} + Y_{t,f}^{II}} \frac{\sin\theta}{(2h + l\cos\theta)H_c}$$

$$v_{21,t}^* = - \frac{Y_t^{II}}{Y_{t,l}^{II} + Y_{t,h}^{II} + Y_{t,f}^{II}} \frac{\sin^2\theta \cos\theta}{c_{f,IIa}(2h + l\cos\theta)}$$

mit: Anteil  $Y_{t,l}^{II} = \frac{\sin^2\theta(1-Y_t^{II}\cos^2\theta)^2}{EA_{cw}} + \left(\frac{1}{GA_{cw}} + \frac{l^2}{12EI_{cw}}\right) \cos^2\theta(1 + Y_t^{II}\sin^2\theta)^2$

Anteil  $Y_{t,h}^{II} = \frac{2h}{EA_{cw}} \frac{Y_t^{II2} \sin^2\theta \cos^2\theta}{l}$

Anteil  $Y_{t,f}^{II} = \frac{Y_t^{II2} \sin^2\theta \cos^2\theta}{c_{f,IIa}l}$

$$Y_t^{II} = \frac{\frac{1}{EA_{cw}} \frac{1}{GA_{cw}} \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIa}l} + \frac{2h}{EA_{cw}l}} \quad \text{und } c_{f,IIa} = E_f \frac{l\sin\theta H_c}{h+l\cos\theta}$$

*Grundzustand IIb bei Druck in  $x_2$ -Richtung*

$$E_{2,c}^* = \frac{c_{f,IIb}}{Y_c^{II}} \frac{l\sin\theta}{(2h + l\cos\theta)H_c}$$

$$v_{21,c}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}}} \frac{l\sin^2\theta \cos\theta}{2h + l\cos\theta}.$$

mit:  $Y_c^{II} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2\theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2\theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2\theta}{12EI_{cw}} + \frac{1}{c_{f,IIb}l}}$  und  $c_{f,IIb} = E_f \frac{(2h + l\cos\theta)H_c}{l\sin\theta}$

*Grundzustand III bei reinem Schub in  $x_1$ - $x_2$ -Ebene (Näherungslösung)*

$$G_{12}^* = \frac{\bar{\tau}_{12}^*}{\bar{\gamma}_{12}^*} = \frac{T_1^{III}}{u_2^{III}} \frac{2h + l\cos\theta}{4l\sin\theta H_c}$$

Lösung über Matlab Skript (s. Anhang C.2)

### Bestimmungsgleichungen für unbefüllte Geozellen ( $c_f \rightarrow 0$ )

#### Grundzustand Ia bei Zug in $x_1$ -Richtung

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{1,t}^* = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2h}{EA_{cw}l}} \frac{2h + l \cos \theta}{l^2 \sin \theta H_c}$$

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} v_{12,t}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}} + \frac{2h}{EA_{cw}l}} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l}$$

#### Grundzustand Ib bei Druck in $x_1$ -Richtung

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{1,c}^* = \frac{1}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{2h + l \cos \theta}{l^2 \sin \theta H_c}$$

$$v_{12,c}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\cos^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \sin^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l}$$

#### Grundzustand IIa bei Zug in $x_2$ -Richtung

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{2,t}^* = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{\sin \theta}{(2h + l \cos \theta) H_c}$$

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} v_{21,t}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{2h + l \cos \theta}$$

#### Grundzustand IIb bei Druck in $x_2$ -Richtung

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} E_{2,c}^* = \frac{1}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{\sin \theta}{(2h + l \cos \theta) H_c}$$

$$v_{21,c}^* = - \frac{\frac{1}{EA_{cw}} - \frac{1}{GA_{cw}} - \frac{l^2}{12EI_{cw}}}{\frac{\sin^2 \theta}{EA_{cw}} + \frac{\cos^2 \theta}{GA_{cw}} + \frac{l^2 \cos^2 \theta}{12EI_{cw}}} \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{2h + l \cos \theta}$$

#### Grundzustand III bei reinem Schub in $x_1$ - $x_2$ -Ebene

$$\lim_{c_f \rightarrow 0} G_{12}^* = \frac{(2h + l \cos \theta)}{4l \sin \theta H_c} \frac{1}{Y_h^{III} + Y_l^{III}}$$

$$\text{mit: Anteil } Y_h^{III} = h \left( \frac{1}{GA_{2cw}} + \frac{h^2}{3EI_{2cw}} \right)$$

$$\text{Anteil } Y_l^{III} = \frac{l}{4EA_{cw}} \left( \frac{\cos \theta}{\tan \alpha_g} + \sin \theta \right)^2 + \frac{l}{4GA_{cw}} \left( \frac{\sin \theta}{\tan \alpha_g} - \cos \theta \right)^2 + \frac{h^2 l}{12EI_{cw}}$$

$$\tan \alpha_g = l \sin \theta / (2h + l \cos \theta)$$

Vereinfachte Bestimmungsgleichungen für befüllte Geozellen (hohe Schlankheit  $t \rightarrow 0$ )**Grundzustand Ia bei Zug in  $x_1$ -Richtung**

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_{1,t}^* = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw}t} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \frac{\sin^3 \theta}{E_f(2h + l \cos \theta)}} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{l^2 \sin \theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_{12,t}^* = \frac{1}{\frac{E_f(2h + l \cos \theta)}{E_{cw}t \sin \theta} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \sin^2 \theta} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l}$$

**Grundzustand Ib bei Druck in  $x_1$ -Richtung**

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_{1,c}^* = E_f \frac{2h + l \cos \theta}{h + l \cos \theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_{12,c}^* = \frac{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}{l \sin^2 \theta}$$

**Grundzustand IIa bei Zug in  $x_2$ -Richtung**

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_{2,t}^* = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw}t} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \frac{(h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{E_f l^2 \sin \theta}} \frac{\sin^3 \theta}{2h + l \cos \theta}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_{21,t}^* = \frac{1}{\frac{E_f l^2 \sin \theta}{E_{cw}t(h + l \cos \theta)} \left(1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l}\right) + \cos^2 \theta} \frac{l \sin^2 \cos \theta}{2h + l \cos \theta}$$

**Grundzustand IIb bei Druck in  $x_2$ -Richtung**

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_{2,c}^* = E_f$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} v_{21,c}^* = \frac{l \sin^2 \theta}{(2h + l \cos \theta) \cos \theta}$$

**Grundzustand III bei reinem Schub in  $x_1$ - $x_2$ -Ebene (Näherungslösung)**

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_{12}^* = \frac{(2h + l \cos \theta)}{4l \sin \theta H_c} \frac{1}{Y_h^{III} + Y_l^{III} + Y_c^{III}}$$

$$\text{mit: Anteil } Y_h^{III} = \frac{h}{\tan^2 \alpha_c E A_{2cw}}$$

$$\text{Anteil } Y_l^{III} = \frac{l \{ [\sin(2\alpha_c - \theta) - \sin \theta]^2 + [\sin(2\alpha_c + \theta) + \sin \theta]^2 \}}{32 E A_{cw} (\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c)^2}$$

$$\text{Anteil } Y_c^{III} = \frac{1}{\sin^2 \alpha_c c_{f,III}} \left[ 1 + \frac{\sin^4 \theta \cos^4 \alpha_c}{(\cos^2 \theta - 2 \cos^2 \theta \cos^2 \alpha_c + \cos^2 \alpha_c)^2} \right]$$

$$\tan \alpha_c = l \sin \theta / (4h + l \cos \theta)$$





## Anhang D

Anhang D.1: Anwendungsgrenzen zu den äquivalenten Materialkennwerten bei schlanken Zellwänden mit  $t \rightarrow 0$  im Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in  $x_1$ -Richtung

Hooke'sche Gesetz für ESZ und EVZ bezogen auf ein kartesisches Koordinatensystem

ESZ

$$\sigma_x = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_x + \nu_f \varepsilon_y); \sigma_y = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x)$$

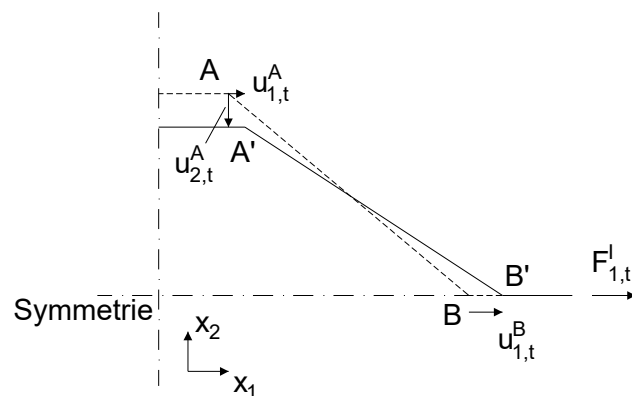
$$\sigma_z = 0; \tau_{xy} = G_f \gamma_{xy}$$

EVZ

$$\sigma_x = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_x + \nu_f \varepsilon_y]; \sigma_y = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x]$$

$$\sigma_z = \nu_f (\sigma_x + \sigma_y); \tau_{xy} = G_f \gamma_{xy}$$

Verformungsbild im Grundzustand Ia



**Abb. D.1:** Zellverformung bei  $t \rightarrow 0$  für den Grundzustand Ia

ESZ

$x$ -Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist minimal Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und  $y$ -Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_x = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_x + \nu_f \varepsilon_y) = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1) = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \underbrace{\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right) \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Hauptdehnungen bezogen auf Abmessung des Füllmaterials

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{2,t}^A}{l \sin \theta} \text{ und } \varepsilon_3 = \frac{u_{1,t}^B}{h + l \cos \theta}$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{u_{1,t}^B}{u_{2,t}^A} \frac{l \sin \theta}{h + l \cos \theta}$$

Relevante Verschiebungen gemäß Anhang B.9

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_{1,t}^B = \frac{F_{1,t}^I l}{\cos^2 \theta} \left( \frac{1}{EA_{cw}} + \frac{\sin^2 \theta}{c_{f,la} l} \right) \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} u_{2,t}^A = -\frac{F_{1,t}^I \tan \theta}{c_{f,la}}$$

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} &= \left[ \frac{c_{f,la}}{EA_{cw}} \left( \frac{l}{\cos^2 \theta} + h \right) + \tan^2 \theta \right] \frac{l \cos \theta}{h + l \cos \theta} \\ &= \frac{E_f}{E_{cw} t} \frac{\left( \frac{l}{\cos^2 \theta} + h \right)}{\tan \theta} \frac{2h + l \cos \theta}{h + l \cos \theta} + \frac{l \sin \theta \tan \theta}{h + l \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{mit: } EA_{cw} = E_{cw} t H_c \text{ und } c_{f,la} = E_f \frac{(2h + l \cos \theta) H_c}{l \sin \theta}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$\nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{E_f}{E_{cw} t} \frac{l}{\tan \theta \cos^2 \theta} + \tan^2 \theta$$

Vereinfachte Anwendungsgrenze für  $h = 0$  und  $E_{cw} \rightarrow \infty$

$$\nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \tan^2 \theta$$

EVZ

x-Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist minimal Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und y-Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_x = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_x + \nu_f\varepsilon_y] = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1] = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} \left[ \underbrace{(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1}_{\geq 0} \right] \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 - \frac{u_{2,t}^A}{u_{1,t}^B} \frac{h + l\cos\theta}{l\sin\theta}}$$

Term mit Quotient der Dehnungen im Nenner ist Kehrwert von Anwendungsgrenze für ESZ. Hieraus folgt direkt die Anwendungsgrenze für EVZ.

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$\nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{h + l\cos\theta}{\left[ \frac{E_f}{E_{cw}t} \frac{\left( \frac{l}{\cos^2\theta} + h \right) (2h + l\cos\theta)}{\tan\theta} + l\sin\theta\tan\theta \right]}}$$

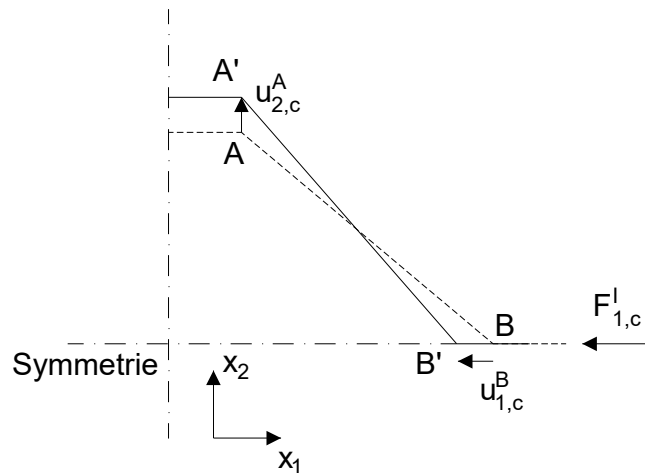
Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$\nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{E_f}{E_{cw}t} \frac{l}{\tan\theta\cos^2\theta} + \tan^2\theta}}$$

Vereinfachte Anwendungsgrenze für  $h = 0$  und  $E_{cw} \rightarrow \infty$

$$\nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2\theta}} = \sin^2\theta$$

Anhang D.2: Anwendungsgrenzen zu den äquivalenten Materialkennwerten bei schlanken Zellwänden mit  $t \rightarrow 0$  im Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in  $x_1$ -Richtung



**Abb. D.2:** Zellverformung bei  $t \rightarrow 0$  für den Grundzustand Ib

### ESZ

$x$ -Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und  $y$ -Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_y = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x) = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1) = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \underbrace{\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right) \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Hauptdehnungen bezogen auf Abmessung des Füllmaterials

$$\varepsilon_3 = \frac{u_{2,c}^A}{l \sin \theta} \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{u_{1,c}^B}{h + l \cos \theta}$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{u_{2,c}^A}{u_{1,c}^B} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta}$$

Relevante Verschiebungen gemäß Anhang B.9

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_1^B = -\frac{F_{1,c}^I}{c_{f,Ib}} \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} u_2^A = \frac{F_{1,c}^I}{c_{f,Ib} \tan \theta}$$

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$v_f \leq \frac{1}{\tan\theta} \frac{h + l \cos\theta}{l \sin\theta}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$v_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\tan^2\theta}$$

### EVZ

x-Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und y-Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_y = \frac{E_f}{(1 + v_f)(1 - 2v_f)} [(1 - v_f)\varepsilon_y + v_f\varepsilon_x] = \frac{E_f}{(1 + v_f)(1 - 2v_f)} [(1 - v_f)\varepsilon_3 + v_f\varepsilon_1] = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{(1 + v_f)(1 - 2v_f)} \left[ \underbrace{(1 - v_f)\varepsilon_3 + v_f\varepsilon_1}_{\geq 0} \right] \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$(1 - v_f)\varepsilon_3 + v_f\varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 - \frac{u_{1,c}^B}{u_{2,c}^A} \frac{l \sin\theta}{h + l \cos\theta}}$$

Term mit Quotient der Dehnungen im Nenner ist Kehrwert von Anwendungsgrenze für ESZ. Hieraus folgt direkt die Anwendungsgrenze für EVZ.

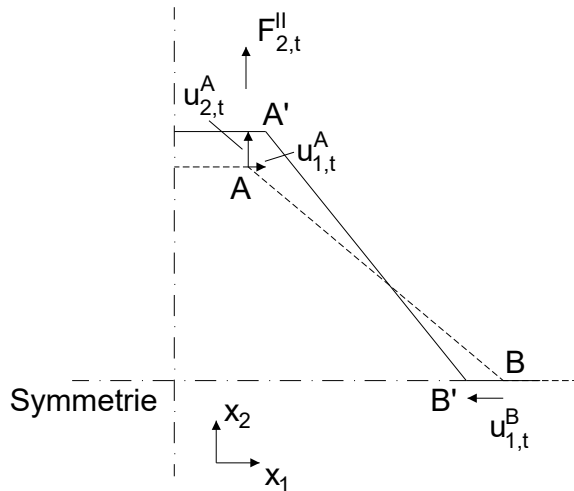
Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{l \sin\theta \tan\theta}{h + l \cos\theta}}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \tan^2\theta} = \cos^2\theta$$

Anhang D.3: Anwendungsgrenzen zu den äquivalenten Materialkennwerten bei schlanken Zellwänden mit  $t \rightarrow 0$  im Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in  $x_2$ -Richtung



**Abb. D.3:** Zellverformung bei  $t \rightarrow 0$  für den Grundzustand IIa

### ESZ

$x$ -Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und  $y$ -Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_y = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x) = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1) = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \underbrace{\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right) \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Hauptdehnungen bezogen auf Abmessung des Füllmaterials

$$\varepsilon_3 = \frac{u_{2,t}^A}{l \sin \theta} \text{ und } \varepsilon_1 = \frac{u_{1,t}^B}{h + l \cos \theta}$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{u_{2,t}^A}{u_{1,t}^B} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta}$$

Relevante Verschiebungen gemäß Anhang B.9

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_1^B = -\frac{F_{2,t}^{II}}{c_{n,IIa} \tan \theta} \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} u_2^A = \frac{F_{2,t}^{II}}{\sin^2 \theta} \left( \frac{l}{EA_{cw}} + \cos^2 \theta \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right) \right)$$

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$v_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{\left( \frac{l}{EA_{cw}} + \cos^2 \theta \left( \frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{2}{c_h} \right) \right) h + l \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \frac{1}{l \sin \theta}$$

$$= \left( \frac{l + h \cos^2 \theta}{\frac{E_{cw} t}{E_f} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta} + h} + \cos^2 \theta \right) \frac{h + l \cos \theta}{l \sin^2 \theta \cos \theta}$$

mit:  $EA_{cw} = E_{cw} t H_c$  und  $c_{n,IIa} = \frac{1}{\frac{1}{c_{f,IIa}} + \frac{1}{c_h}}$  und  $c_{f,IIa} = E_f H_c \frac{l \sin \theta}{h + l \cos \theta}$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$v_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{E_f}{E_{cw} t} \frac{l}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

Vereinfachte Anwendungsgrenze für  $h = 0$  und  $E_{cw} \rightarrow \infty$

$$v_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{1}{\tan^2 \theta}$$

## EVZ

x-Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und y-Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_y = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_y + \nu_f \varepsilon_x] = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1] = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} \left[ \underbrace{(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right] \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 - \frac{u_{1,t}^B}{u_{2,t}^A} \frac{l \sin \theta}{h + l \cos \theta}}$$

Term mit Quotient der Dehnungen im Nenner ist Kehrwert von Anwendungsgrenze für ESZ. Hieraus folgt direkt die Anwendungsgrenze für EVZ.

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{l \sin^2 \theta \cos \theta}{\left( \frac{l + h \cos^2 \theta}{\frac{E_{cw} t}{E_f} \frac{h + l \cos \theta}{l \sin \theta} + h} + \cos^2 \theta \right) (h + l \cos \theta)}}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

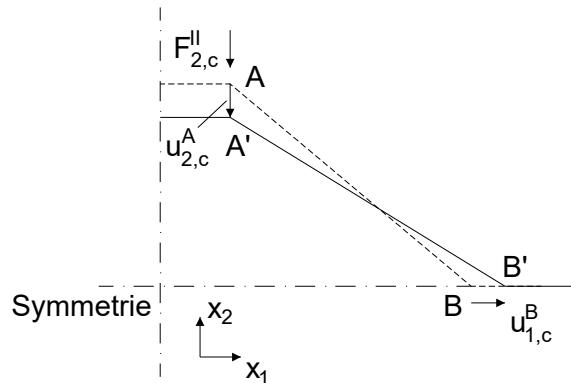
$$v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{E_f}{E_{cw}} \frac{l}{t \sin \theta \cos \theta} + \frac{1}{\tan^2 \theta}}}$$

Vereinfachte Anwendungsgrenze für  $h = 0$  und  $E_{cw} \rightarrow \infty$

$$v_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} = \cos^2 \theta$$



Anhang D.4: Anwendungsgrenzen zu den äquivalenten Materialkennwerten bei schlanken Zellwänden mit  $t \rightarrow 0$  im Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in  $x_2$ -Richtung



**Abb. D.4:** Zellverformung bei  $t \rightarrow 0$  für den Grundzustand IIb

### ESZ

$x$ -Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und  $y$ -Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_x = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_x + \nu_f \varepsilon_y) = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} (\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1) = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{1 - \nu_f^2} \left( \underbrace{\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1}_{\geq 0} \right) \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Hauptdehnungen bezogen auf Abmessung des Füllmaterials

$$\varepsilon_1 = \frac{u_{2,c}^A}{l \sin \theta} \text{ und } \varepsilon_3 = \frac{u_{1,c}^B}{h + l \cos \theta}$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$\varepsilon_3 + \nu_f \varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{u_{1,c}^B}{u_{2,c}^A} \frac{l \sin \theta}{h + l \cos \theta}$$

Relevante Verschiebungen gemäß Anhang B.9

$$\lim_{t \rightarrow 0} u_1^B = \frac{F_{2,c}^{II} \tan \theta}{c_{f,IIb}} \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} u_2^A = \frac{F_{2,c}^{II}}{c_{f,IIb}}$$

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

$$\nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \frac{l \sin \theta \tan \theta}{h + l \cos \theta}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

$$\nu_f \leq -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = \tan^2 \theta$$

EVZ

x-Richtung bzw.  $x_1$ -Richtung ist minimale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung und y-Richtung bzw.  $x_2$ -Richtung ist maximale Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung

$$\sigma_x = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_x + \nu_f\varepsilon_y] = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} [(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1] = \sigma_3$$

Bedingung für Zugspannung

$$\text{Für } \sigma_3 = \frac{E_f}{(1 + \nu_f)(1 - 2\nu_f)} \left[ \underbrace{(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1}_{\geq 0} \right] \text{ ist } \sigma_3 \geq 0$$

Maßgebende Gleichung für Anwendungsgrenze

$$(1 - \nu_f)\varepsilon_3 + \nu_f\varepsilon_1 \geq 0 \Leftrightarrow \nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 - \frac{u_{2,c}^A}{u_{1,c}^B} \frac{h + l\cos\theta}{l\sin\theta}}$$

Term mit Quotient der Dehnungen im Nenner ist Kehrwert von Anwendungsgrenze für ESZ.

Hieraus folgt direkt die Anwendungsgrenze für EVZ.

Anwendungsgrenze für  $t \rightarrow 0$

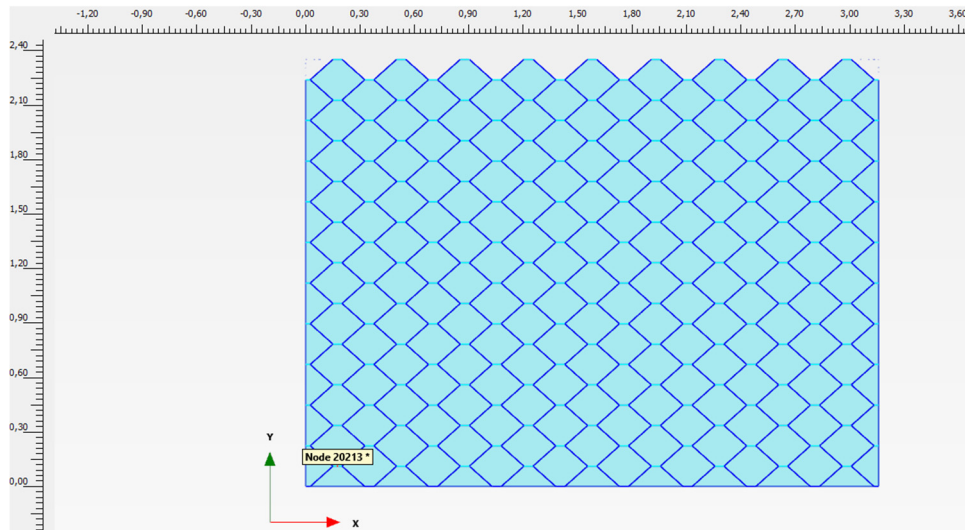
$$\nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{h + l\cos\theta}{l\sin\theta\tan\theta}}$$

Anwendungsgrenze mit zusätzlich  $h = 0$

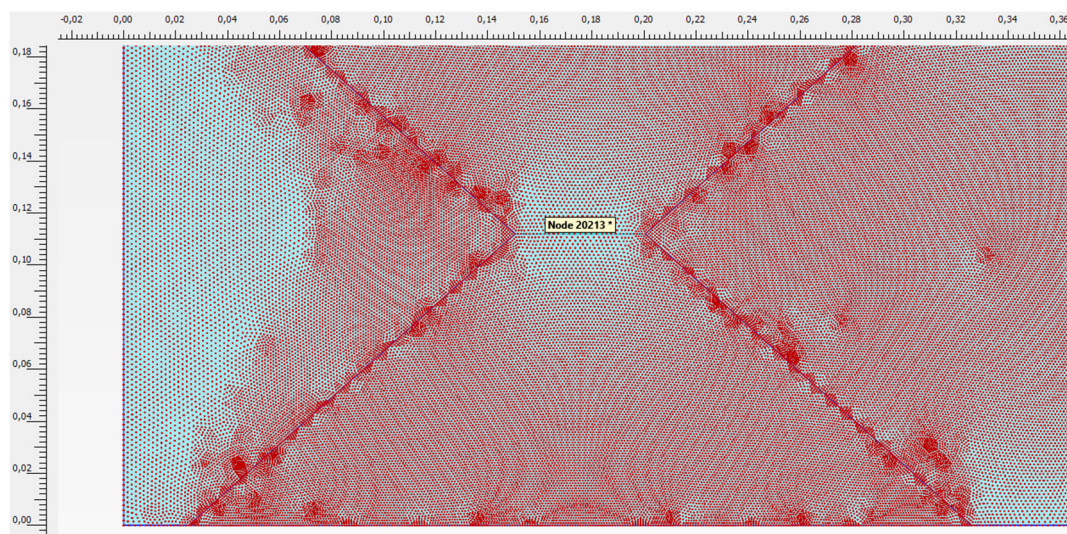
$$\nu_f \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\tan^2\theta}} = \sin^2\theta$$

## Anhang E

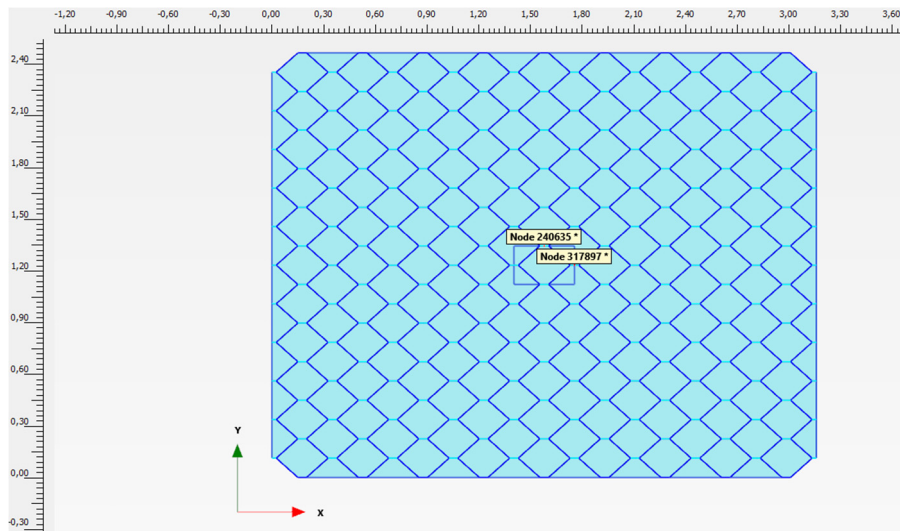
### Anhang E.1: Knotenposition für die Verschiebungen zum Nachweis des linearen Materialverhaltens



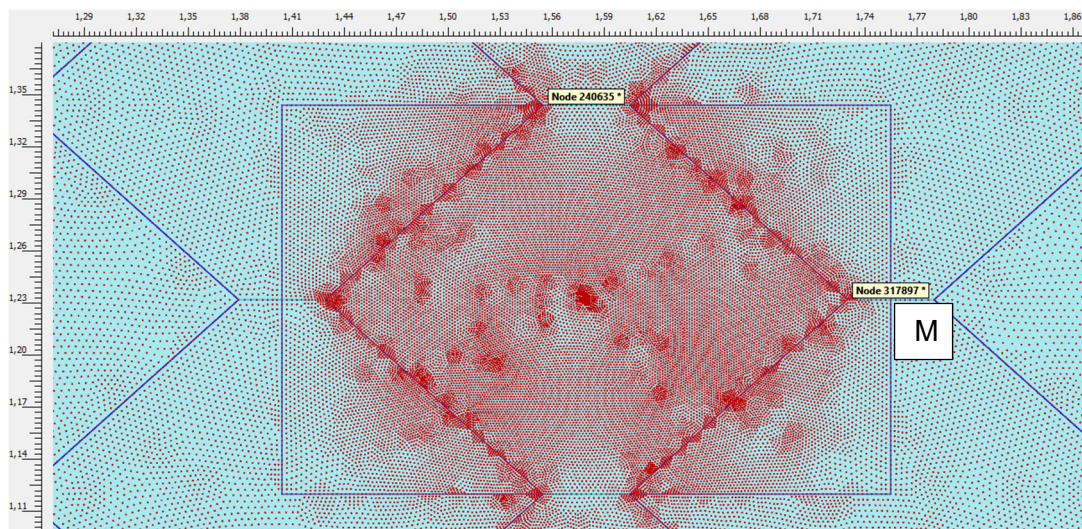
**Abb. E.1:** Knotenposition in den Grundzuständen I und II am Gesamtmodell



**Abb. E.2:** Knotenposition in den Grundzuständen I und II am Modellausschnitt



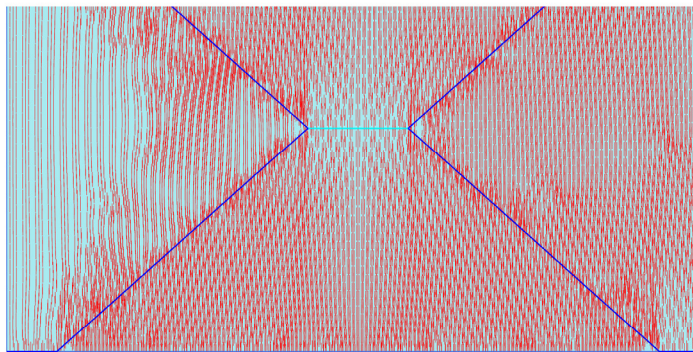
**Abb. E.3:** Knotenposition im Grundzustand III am Gesamtmodell



**Abb. E.4:** Knotenposition im Grundzustand III am Modellausschnitt



## Anhang E.2: Ergänzende Darstellungen zur Richtungsänderung der maximalen Hauptspannung bei Erst- und Entlastung

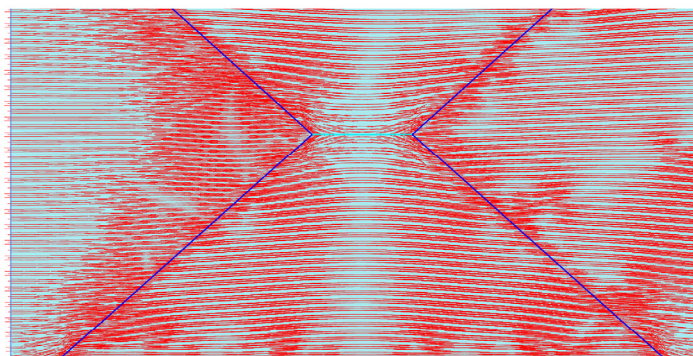


**Principal total stress  $\sigma_1$  (scaled up  $0,625 \cdot 10^{-3}$  times)**

Maximum value =  $0,8882 \cdot 10^{-15}$  kN/m<sup>2</sup> (Element 51290 at Stress point 615470)

Minimum value = -22,56 kN/m<sup>2</sup> (Element 50803 at Stress point 609632)

**Abb. E.5:** Maximale Hauptspannungstrajektorien bei Belastung



**Principal total stress  $\sigma_1$  (scaled up  $0,625 \cdot 10^{-3}$  times)**

Maximum value = -12,54 kN/m<sup>2</sup> (Element 63597 at Stress point 763153)

Minimum value = -22,82 kN/m<sup>2</sup> (Element 50803 at Stress point 609632)

**Abb. E.6:** Maximale Hauptspannungstrajektorien bei Entlastung



## Anhang F

Anhang F.1: Ergebnisvergleichs der analytischen Lösung und der Finite-Elemente-Berechnung für die Grundzustände I und II

**Tab. F.1:** Tabellarischer Ergebnisvergleich der analytischen Lösung und den Finite-Elemente-Berechnungen in den Grundzuständen I und II für befüllte Geozellen (Abweichung bezogen auf Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen)

Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}; E_f$	Maßgebende Verschiebungen [mm]				Abweichung		Äquivalente Materialkennwerte				Abweichung	
				Analytisch		FE-Berechnung		$\Delta u_1$	$\Delta u_2$	Analytisch		FE-Berechnung		$\Delta E^*$	$\Delta v^*$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	[%]	[%]	$E^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$v^*$ [-]	$E^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$v^*$ [-]	[%]	[%]
Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung mit $W = 2 \cdot F_{1,t} = 3,5 \text{ kN/m}$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	2,141	-0,0450	2,157	-0,0446	0,73	-0,93	945,0	0,0243	938,1	0,0240	0,74	1,67
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 30	0,5759	-0,0450	0,5833	-0,0443	1,26	-1,33	3.513,3	0,0904	3.469,1	0,0881	1,28	2,62
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	1,740	-1,349	1,614	-1,203	-7,78	-12,2	1.163,2	0,8968	1.253,7	0,8618	-7,22	4,05
4	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	3,731	-0,0113	3,742	-0,0120	0,29	6,03	542,3	0,0035	540,8	0,0037	0,29	-5,76
Zellgeometrie B															
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	2,446	-0,0332	2,455	-0,0330	0,35	-0,65	1.120,9	0,0213	1.117,0	0,0211	0,35	1,00
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	1,505	-0,9958	1,483	-0,9622	-1,46	-3,49	1.822,3	1,0370	1.848,9	1,0165	-1,44	2,01
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	4,287	-0,0083	4,291	-0,0105	0,09	20,6	639,6	0,0030	639,0	0,0038	0,09	-20,5
Zellgeometrie C															
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150; 30	2,091	-0,0189	2,100	-0,0192	0,45	1,54	1.487,3	0,0160	1.480,7	0,0162	0,45	-1,10
9	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 1	0,8551	-0,5655	0,8430	-0,5212	-1,44	-8,50	3.636,1	1,1751	3.688,5	1,0986	-1,42	6,96
10	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288; 120	3,686	-0,0047	3,693	-0,0076	0,20	37,7	843,6	0,0023	842,0	0,0036	0,20	-37,5
Zellgeometrie D															
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 30	2,404	-0,0153	2,408	-0,0161	0,16	4,99	1.592,2	0,0139	1.589,8	0,0146	0,16	-4,84
12	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 30	0,6196	-0,0153	0,6226	-0,0153	0,48	-0,05	6.178,0	0,0541	6.148,3	0,0538	0,48	0,54
13	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 120	2,398	-0,0038	2,398	-0,0058	0,01	33,8	1.596,6	0,0034	1.596,4	0,0053	0,01	-33,8
14	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 1	0,8747	-0,4594	0,8764	-0,4478	0,20	-2,58	4.376,6	1,1489	4.367,8	1,1177	0,20	2,79
15	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	4,244	-0,0038	4,244	-0,0074	-0,01	48,5	902,0	0,0020	902,0	0,0038	-0,01	-48,5



(Fortsetzung)

Zellgeometrie E															
16	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	0,6732	-0,0376	0,6739	-0,0368	0,11	-2,04	4.017,7	0,0863	4.013,2	0,0845	0,11	2,16
17	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	1,219	-1,061	1,175	-1,015	-3,57	-4,57	2.218,5	1,3451	2.301,6	1,3345	-3,61	0,79
18	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	1,137	-0,0094	1,139	-0,0093	0,16	-0,99	2.379,0	0,0013	2.375,2	0,0127	0,16	1,15
Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in x <sub>1</sub> -Richtung mit $\sigma_{1,c}^I = -15,625 \text{ kN/m}^2$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	-0,0664	0,0744	-0,0674	0,0746	1,47	0,34	30.471	1,295	30.024	1,281	1,49	1,14
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 30	-0,0664	0,0744	-0,0673	0,0749	1,38	0,67	30.472	1,295	30.052	1,286	1,40	0,72
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	-1,989	2,228	-2,003	2,241	0,71	0,54	1.017	1,295	1.010	1,293	0,71	0,17
4	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	-0,0166	0,0186	-0,0169	0,0194	1,57	4,07	121.882	1,295	119.969	1,329	1,60	-2,54
Zellgeometrie B															
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	-0,0783	0,0878	-0,0905	0,0894	13,4	1,79	34.984	1,755	30.288	1,548	15,50	13,44
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	-2,347	2,630	-2,626	2,927	10,6	10,1	1.168	1,755	1.044	1,746	11,88	0,53
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	-0,0196	0,0220	-0,0228	0,0200	14,1	-9,99	139.934	1,756	120.254	1,371	16,37	27,99
Zellgeometrie C															
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150; 30	-0,1026	0,1786	-0,1036	0,1792	0,96	0,35	30.305	3,093	30.015	3,074	0,97	0,61
9	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 1	-3,073	5,348	-3,079	5,352	0,21	0,07	1.012	3,093	1.010	3,088	0,21	0,14
10	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288; 120	-0,0257	0,0447	-0,0260	0,0487	1,23	8,24	121.218	3,093	119.725	3,330	1,25	-7,10
Zellgeometrie D															
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 30	-0,1146	0,1995	-0,1268	0,2028	9,63	1,63	33.410	3,808	30.194	3,498	10,65	8,85
12	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 30	-0,1146	0,1994	-0,1262	0,2118	9,22	5,83	33.411	3,808	30.330	3,671	10,16	3,73
13	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 120	-0,0286	0,0499	-0,0318	0,0476	9,98	-4,67	133.637	3,808	120.302	3,275	11,08	16,27
14	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 1	-3,431	5,972	-3,707	6,428	7,46	7,10	1.116	3,808	1.033	3,793	8,06	0,37
15	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	-0,0286	0,0500	-0,0319	0,0474	10,1	-5,37	133.637	3,817	120.147	3,257	11,23	17,20

(Fortsetzung)

Zellgeometrie E															
16	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	-0,0182	0,0181	-0,0213	0,0188	14,7	3,52	36.467	1,540	31.093	1,361	17,28	13,16
17	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	-0,4860	0,4846	-0,5230	0,5178	6,92	6,41	1.365	1,540	1.271	1,531	7,43	0,54
18	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	-0,0046	0,0046	-0,0055	0,0044	16,9	-4,52	145.716	1,545	121.113	1,229	20,31	25,75
Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in x <sub>2</sub> -Richtung mit $P = 2 \cdot F_{2,t}^{\parallel} = 3,5 \text{ kN/m}$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	-0,0744	2,721	-0,0742	2,755	-0,21	1,22	556,2	0,0236	549,4	0,0233	1,23	1,44
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	-2,228	3,169	-2,211	3,218	-0,77	1,51	477,6	0,608	470,4	0,5944	1,53	2,31
3	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	-0,0186	4,693	-0,0168	4,733	-10,7	0,85	322,5	0,0034	319,8	0,0031	0,86	11,7
Zellgeometrie B															
4	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	-0,0878	3,132	-0,0841	3,063	-9,20	-2,26	356,5	0,0179	364,6	0,0168	-2,21	6,79
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 30	-0,0878	0,8721	-0,0935	0,8725	6,14	0,05	1.280,7	0,0643	1.280,1	0,0684	0,05	-6,09
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	-2,629	3,719	-2,764	3,863	4,88	3,72	300,3	0,4512	289,1	0,4567	3,87	-1,20
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	-0,0220	5,398	-0,0053	5,413	-313	0,27	206,9	0,0026	206,3	0,0006	0,27	314
8	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 60	-0,0439	5,423	-0,0270	5,253	-62,8	-3,24	205,9	0,0052	212,6	0,0033	-3,13	57,7
9	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 30	-0,0878	5,472	-0,0763	5,368	-15,2	-1,94	204,1	0,0102	208,0	0,0091	-1,90	12,99
Zellgeometrie C															
10	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150; 30	-0,1786	6,641	-0,1794	6,718	0,44	1,14	148,3	0,0151	146,6	0,0150	1,15	0,71
11	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 30	-1,786	1,918	-0,1814	1,976	1,57	2,94	513,4	0,0524	498,3	0,0517	3,03	1,42
12	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 1	-5,348	10,92	-5,310	11,04	-0,73	1,10	90,22	0,2757	89,22	0,2707	1,12	1,85
13	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288; 120	-0,0446	11,24	-0,0414	11,35	-7,86	0,97	87,61	0,0022	86,76	0,0021	0,98	8,91

(Fortsetzung)

Zellgeometrie D															
14	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 30	-0,1994	7,607	-0,1886	7,486	-5,76	-1,62	105,2	0,0120	106,9	0,0115	-1,59	4,07
15	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 30	-0,1994	2,198	-0,2085	2,211	4,36	0,56	363,9	0,0415	361,9	0,0431	0,56	-3,82
16	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 1	-5,971	1,225	-6,098	1,248	2,08	1,90	65,33	0,2229	64,09	0,2233	1,94	-0,19
17	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	-0,0499	1,295	-0,0209	1,245	-139	-3,95	61,80	0,0018	64,23	0,0008	-3,80	130
Zellgeometrie E															
18	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	-0,0738	0,7082	-0,0725	0,6811	-1,79	-3,98	1.599,0	0,0674	1.662,6	0,0689	-3,83	-2,11
19	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	-1,971	2,123	-1,998	2,143	1,36	0,96	533,5	0,6009	582,3	0,6033	0,97	-0,40
20	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	-0,0186	1,146	-0,0123	1,094	-50,3	-4,78	988,3	0,0105	1.035,5	0,0073	-4,56	43,4
Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in x <sub>2</sub> -Richtung mit $\sigma_{2,c}^0 = -15,625 \text{ kN/m}^2$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	0,0521	-0,0583	0,0520	-0,0583	-0,04	-0,01	30.000	0,7717	30.003	0,7715	-0,01	0,03
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	1,560	-1,748	1,554	-1,743	-0,42	-0,33	1.000,9	0,7717	1.004,3	0,7710	-0,33	0,08
2a	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 0,1	15,47	-17,34	15,29	-17,14	-1,14	-1,12	100,94	0,7717	102,08	0,7715	-1,11	0,02
2b	50; 0,2; 16,82	41,75	200; 0,1	0,2117	-0,2707	0,2181	-0,2785	2,92	2,77	6.463,8	0,6763	6.284,7	0,6773	2,85	-0,15
3	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	0,0130	-0,0146	0,0143	-0,0146	9,26	0,03	120.000	0,7718	119.968	0,8504	0,03	-9,23
Zellgeometrie B															
4	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	0,0520	-0,0583	0,0519	-0,0583	-0,29	-0,01	30.000	0,5694	30.004	0,5678	-0,01	0,28
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 30	0,0520	-0,0583	0,0519	-0,0583	-0,34	-0,05	30.001	0,5694	30.015	0,5678	-0,05	0,29
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	1,560	-1,749	1,555	-1,744	-0,37	-0,3	1.000,7	0,5694	1.003,7	0,5690	-0,30	0,07
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	0,0130	-0,0145	0,0133	-0,0146	1,81	0,09	120.000	0,5695	119.891	0,5795	0,09	-1,72
8	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 60	0,0260	-0,0292	0,0263	-0,0292	1,00	0,01	60.000	0,5695	59.999	0,5753	0,01	-1,00
9	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 30	0,0521	-0,0583	0,0521	-0,0583	-0,23	0,01	30.000	0,5695	30.001	0,5682	0,01	0,23

(Fortsetzung)

Zellgeometrie C															
10	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150; 30	0,0350	-0,0583	0,0344	-0,0583	2,57	0,01	30.000	0,3232	29.998	0,3317	0,01	-2,57
11	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 30	0,0350	-0,0583	0,0343	-0,0583	-0,23	-0,02	30.000	0,3232	30.005	0,3226	-0,02	0,21
12	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2; 1	1,005	-1,750	1,003	-1,747	-0,19	-0,15	1.000,2	0,3232	1.001,7	0,3231	-0,15	0,03
13	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288; 120	0,0084	-0,0146	0,0083	-0,0146	-1,04	-0,02	120.000	0,3233	120.027	0,3201	-0,02	1,01
Zellgeometrie D															
14	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150; 30	0,0350	-0,0583	0,0335	-0,0583	-0,08	-0,01	30.000	0,2625	30.001	0,2623	-0,01	0,08
15	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 30	0,0350	-0,0583	0,0335	-0,0583	-0,12	-0,01	30.000	0,2625	30.004	0,2623	-0,01	0,11
16	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2; 1	1,005	-1,750	1,003	-1,748	-0,19	-0,10	1.000,2	0,2625	1.001,1	0,263	-0,10	0,09
17	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288; 120	0,0084	-0,0148	0,0093	-0,0148	10,0	0,01	120.000	0,2626	119.994	0,2918	0,01	-10,0
Zellgeometrie E															
18	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	0,0143	-0,0143	0,0141	-0,0143	-1,40	-0,21	30.016	0,6446	30.079	0,6370	-0,21	1,19
19	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	0,4026	-0,4042	0,3950	-0,3969	-1,94	-1,83	1063,2	0,6446	1.082,6	0,6440	-1,79	0,11
20	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	0,0036	-0,0036	0,0036	-0,0036	-0,05	-0,01	120.000	0,6469	120.016	0,6437	-0,01	0,49

**Tab. F.2:** Tabellarischer Ergebnisvergleich der analytischen Lösung und den Finite-Elemente-Berechnungen in den Grundzuständen I und II für unbefüllte Geozellen (Abweichung bezogen auf Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen)

Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}$	Maßgebende Verschiebungen [mm]				Abweichung		Äquivalente Materialkennwerte				Abweichung	
				Analytisch		FE-Berechnung		$\Delta u_2$	$\Delta u_1$	Analytisch		FE-Berechnung		$\Delta E^*$	$\Delta v^*$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	$u_1$	$u_2$	$u_1$	$u_2$	[%]	[%]	$E^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$v^*$ [-]	$E^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]	$v^*$ [-]	[%]	[%]
Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung mit $W = 2 \cdot F_{1,t} = 0,01$ kN/m															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150	14,32	-16,04	14,31	-16,03	-0,06	-0,05	0,4037	1,30	0,4039	1,30	-0,05	0,0
2	10; 0,2; 16,82	41,75	120	0,0891	-0,0990	0,0890	-0,0990	-0,05	-0,05	64,91	1,29	64,94	1,29	-0,05	0,0
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2	3,652	-4,091	3,650	-4,089	-0,05	-0,05	1,583	1,30	1,584	1,30	-0,05	-0,05
4	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288	293,1	-328,4	292,9	-328,2	-0,06	-0,01	0,0197	1,30	0,0197	1,30	-0,06	-0,01
Zellgeometrie B															
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150	14,32	-16,04	14,26	-15,97	-0,46	-0,45	0,5470	1,76	0,5496	1,76	-0,46	0,0
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2	3,652	-4,091	3,635	-4,072	-0,46	-0,46	2,145	1,76	2,155	1,76	-0,46	0,0
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288	293,1	-328,4	291,7	-328,2	-0,46	-0,46	0,0267	1,76	0,0269	1,76	-0,46	0,0
Zellgeometrie C															
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150	19,14	-33,32	19,14	-33,31	-0,04	-0,04	0,4640	3,09	0,4642	3,09	-0,04	0,0
9	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2	4,882	-8,498	4,880	-8,494	-0,04	-0,04	1,820	3,09	1,821	3,09	-0,04	0,0
10	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288	391,8	-682,1	391,6	-681,8	-0,04	-0,04	0,0227	3,09	0,0227	3,09	-0,04	0,0
Zellgeometrie D															
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150	19,15	-33,32	19,06	-33,18	-0,44	-0,44	0,5713	3,81	0,5738	3,81	-0,44	0,0
12	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2	4,882	-8,498	4,861	-8,461	-0,44	-0,44	2,240	3,81	2,250	3,81	-0,44	0,0
13	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288	391,8	-682,1	390,1	-679,1	-0,44	-0,44	0,0279	3,81	0,0280	3,81	-0,44	0,0

(Fortsetzung)

Zellgeometrie E															
14	0,17; 0,75; 3,89	45	150	0,2011	-0,2001	0,2003	-0,1992	-0,42	-0,43	38,42	1,54	38,58	1,54	-0,42	0,01
15	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2	0,0513	-0,0510	0,0511	-0,0508	-0,42	-0,43	150,7	1,54	151,3	1,54	-0,42	0,01
16	0,05; 0,75; 3,89	45	288	4,0878	-4,086	4,070	-4,068	-0,43	-0,44	1,890	1,54	1,899	1,54	-0,43	0,0
Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in x <sub>1</sub> -Richtung mit $W = 2 \cdot F_{1,c}^I = -0,01 \text{ kN/m}$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150	-14,32	16,04	-14,31	16,04	-0,05	-0,05	0,4037	1,30	0,4039	1,30	-0,05	0,0
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2	-3,652	4,091	-3,650	4,089	-0,05	-0,05	1,583	1,30	1,584	1,30	-0,05	0,0
3	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288	-293,1	328,4	-292,9	328,2	-0,06	-0,05	0,0197	1,30	0,0197	1,30	-0,06	0,0
Zellgeometrie B															
4	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150	-14,32	16,04	-14,26	15,97	-0,46	-0,46	0,5471	1,76	0,5496	1,76	-0,45	0,01
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2	-3,652	4,091	-3,635	4,072	-0,46	-0,46	2,145	1,76	2,155	1,76	-0,45	0,01
6	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288	-293,1	328,4	-291,7	326,9	-0,46	-0,46	0,0267	1,76	0,0269	1,76	-0,46	0,0
Zellgeometrie C															
7	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150	-19,15	33,32	-19,14	33,31	-0,04	-0,04	0,4641	3,09	0,4642	3,09	-0,04	0,0
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2	-4,882	8,498	-4,880	8,494	-0,04	-0,04	1,8198	3,09	1,820	3,09	-0,04	0,01
9	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288	-391,8	682,1	-391,6	681,8	-0,04	-0,04	0,0227	3,09	0,0227	3,09	-0,04	0,0
Zellgeometrie D															
10	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150	-19,15	33,32	-19,06	33,18	-0,44	-0,44	0,5713	3,81	0,5738	3,81	-0,44	0,0
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2	-4,882	8,498	-4,861	8,461	-0,43	-0,43	2,240	3,81	2,250	3,81	-0,43	0,01
12	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288	-391,8	68,21	-390,1	679,1	-0,44	-0,44	0,0279	3,81	0,0280	3,81	-0,44	0,0

(Fortsetzung)

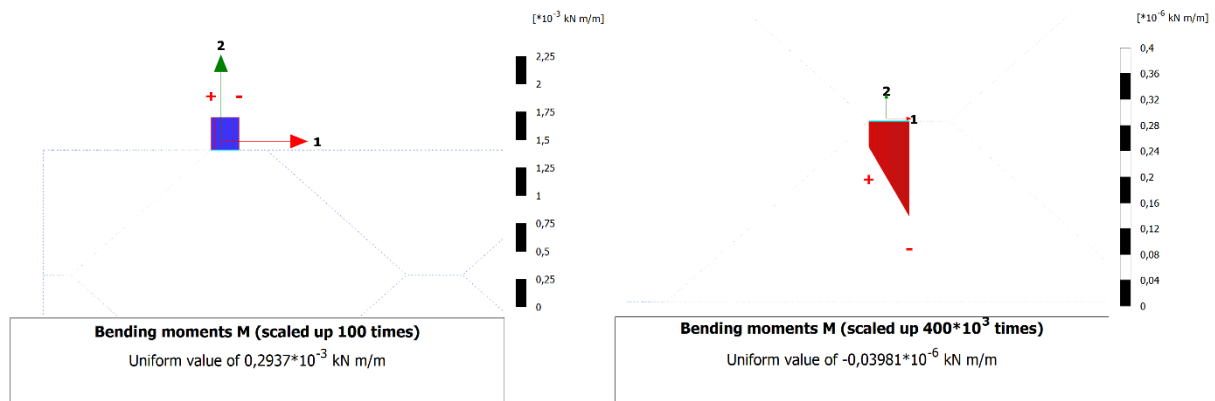
Zellgeometrie E															
13	0,05; 0,75; 3,89	45	150	-0,2008	0,2001	-0,2003	0,1992	-0,27	-0,43	38,47	1,54	38,58	1,54	-0,27	0,16
14	0,05; 0,75; 3,89	45	588,2	-0,0512	0,0510	-0,0511	0,0509	-0,27	-0,43	150,9	1,54	151,3	1,54	-0,27	0,16
15	0,05; 0,75; 3,89	45	288	-4,087	4,086	-4,070	4,068	-0,42	-0,44	1,891	1,54	1,899	1,54	-0,42	0,02
Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in x <sub>2</sub> -Richtung mit $P = 2 \cdot F_{2,t}^{\parallel} = 0,01 \text{ kN/m}$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150	-16,04	17,98	-16,04	17,97	-0,06	-0,05	0,2405	0,77	0,2406	0,77	-0,05	0,0
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2	-4,091	4,585	-4,089	4,583	-0,06	-0,05	0,9431	0,77	0,9436	0,77	-0,05	0,0
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	288	-328,4	368,0	-328,2	367,8	-0,06	-0,05	0,0118	0,77	0,0118	0,77	-0,05	0,0
Zellgeometrie B															
4	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150	-16,04	17,98	-15,97	17,90	-0,46	-0,46	0,1775	0,57	0,1783	0,57	-0,46	0,0
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2	-4,091	4,585	-4,072	4,564	-0,46	-0,46	0,6959	0,57	0,6991	0,57	-0,46	0,0
6	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288	-328,4	368,0	-326,9	366,3	-0,46	-0,46	0,0087	0,57	0,0087	0,57	-0,46	0,0
Zellgeometrie C															
7	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150	-33,32	58,02	-33,31	58,00	-0,04	-0,04	0,0485	0,32	0,0485	0,32	-0,04	0,0
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2	-8,498	14,80	-8,494	14,79	-0,04	-0,04	0,1902	0,32	0,1903	0,32	-0,04	0,0
9	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288	-682,1	1187,6	-681,9	1187,2	-0,04	-0,04	0,0024	0,32	0,0024	0,32	-0,04	0,0
Zellgeometrie D															
10	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150	-33,32	58,02	-33,18	57,77	-0,44	-0,44	0,0394	0,32	0,0396	0,26	-0,44	0,0
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2	-8,498	14,80	-8,460	14,73	-0,44	-0,44	0,1545	0,26	0,1552	0,26	-0,44	0,0
12	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288	-682,1	1187,6	-679,1	1182,4	-0,44	-0,44	0,0019	0,26	0,0019	0,26	-0,43	0,01
Zellgeometrie E															
13	0,17; 0,75; 3,89	45	150	-0,2001	0,2008	-1,992	0,2000	-0,42	-0,43	16,11	0,64	16,18	0,64	-0,43	-0,01
14	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2	-0,0510	0,0512	-0,0508	0,0510	-0,42	-0,43	63,17	0,64	63,44	0,64	-0,43	-0,01

(Fortsetzung)

15	0,05; 0,75; 3,89	45	288	-4,086	4,087	-4,068	4,069	-0,43	-0,44	0,7916	0,65	0,7950	0,65	-0,44	0,0
Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in x <sub>2</sub> -Richtung mit $P = 2 \cdot F_{2,c}^{\text{II}} = -0,01 \text{ kN/m}$															
Zellgeometrie A															
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150	16,04	-17,98	16,04	-17,97	-0,06	-0,05	0,2405	0,77	0,2406	0,77	-0,05	0,0
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2	4,091	-4,585	4,089	-4,583	-0,06	-0,05	0,9431	0,77	0,9436	0,77	-0,05	0,0
3	50; 0,2; 16,82	41,75	200	5,3E-4	-6,8E-4	5,3E-4	-6,8E-4	-0,03	-0,03	6.363,8	0,68	6.365,8	0,68	-0,03	0,0
4	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288	328,3	-368,0	328,2	-367,8	-0,04	-0,06	0,0118	0,77	0,0118	0,77	-0,06	-0,01
Zellgeometrie B															
5	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150	16,04	-17,98	15,97	-17,90	-0,46	-0,46	0,1775	0,57	0,1783	0,57	-0,46	0,0
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2	4,091	-4,585	4,072	-4,564	-0,46	-0,46	0,6959	0,57	0,6991	0,57	-0,46	0,0
7	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288	328,4	-368,0	326,9	-366,3	-0,46	-0,46	0,0087	0,57	0,0087	0,57	-0,46	0,0
Zellgeometrie C															
8	0,17; 0,2; 22,49	29,87	150	33,32	-58,02	33,31	-58,00	-0,04	-0,04	0,0485	0,32	0,0485	0,32	-0,04	0,0
9	0,17; 0,2; 22,49	29,87	588,2	8,498	-14,80	8,494	-14,79	-0,04	-0,04	0,1902	0,32	0,1903	0,32	-0,04	0,0
10	0,05; 0,2; 22,49	29,87	288	682,1	-1188	681,8	-1187	-0,04	-0,05	0,0024	0,32	0,0024	0,32	-0,05	-0,01
Zellgeometrie D															
11	0,17; 2,5; 22,49	29,87	150	333,2	-58,02	33,18	-57,77	-0,44	-0,44	0,0394	0,26	0,0396	0,26	-0,44	0,01
12	0,17; 2,5; 22,49	29,87	588,2	8,498	-14,80	8,460	-14,73	-0,45	-0,44	0,1545	0,26	0,1552	0,26	-0,43	0,01
13	0,05; 2,5; 22,49	29,87	288	682,1	-1188	679,1	-1182	-0,44	-0,48	0,0019	0,26	0,0019	0,26	-0,47	-0,03
Zellgeometrie E															
14	0,17; 0,75; 3,89	45	150	0,2001	-0,2008	0,1992	-0,2000	-0,42	-0,41	16,11	0,64	16,18	0,64	-0,41	0,01
15	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2	0,0510	-0,0512	0,0508	-0,0510	-0,42	-0,43	63,17	0,64	63,44	0,64	-0,43	-0,01
16	0,05; 0,75; 3,89	45	288	4,086	-4,087	4,068	-4,069	-0,43	-0,44	0,7916	0,65	0,7950	0,65	-0,44	0,0

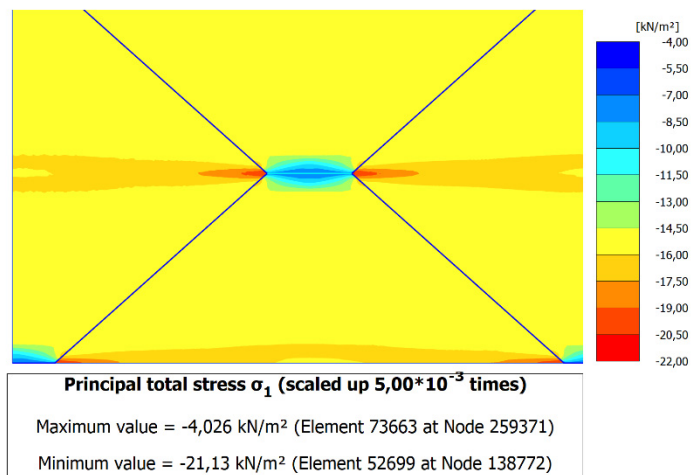


## Anhang F.2: Ergänzende Darstellungen zur Erläuterung der Abweichungen für unbefüllte Geozellen (nur Zellstruktur)

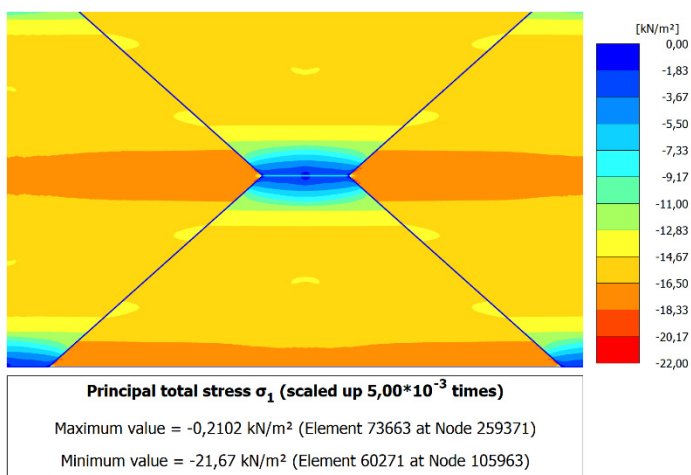


**Abb. F.1:** Schnittmomente in den horizontalen Wänden an der Stelle der Lasteinleitung (links) und im maßgebenden Modellausschnitt (rechts) für die Vergleichsberechnung 5 des Grundzustand IIa (gegenüber gängiger Definition in der Technischen Mechanik entgegengesetzte Definition des positiven Drehsinns)

Anhang F.3: Ergänzende Darstellungen zur Erläuterung der Abweichungen für Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in  $x_1$ -Richtung

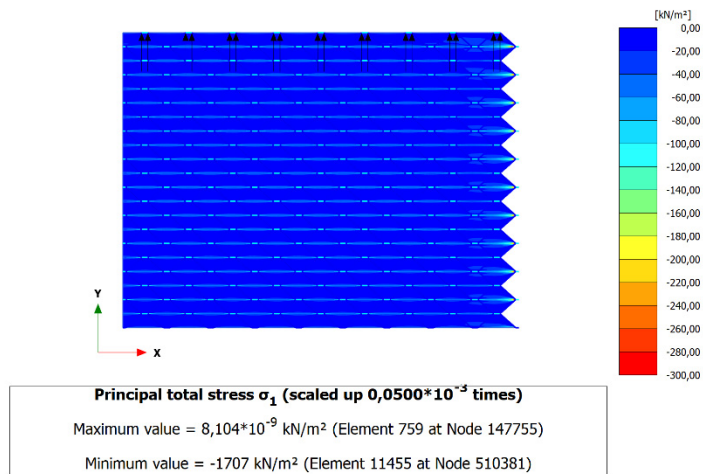


**Abb. F.2:** Maximale Hauptspannungsverteilung am maßgebenden Modellausschnitt für Vergleichsberechnung 5 des Grundzustandes Ib

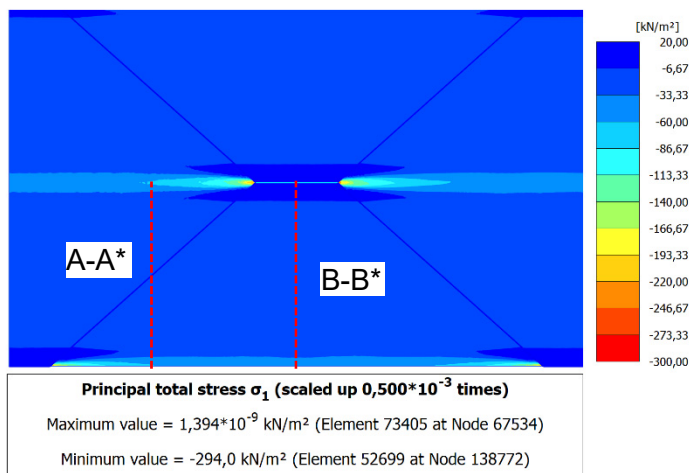


**Abb. F.3:** Maximale Hauptspannungsverteilung am maßgebenden Modellausschnitt für Vergleichsberechnung 6 des Grundzustandes Ib

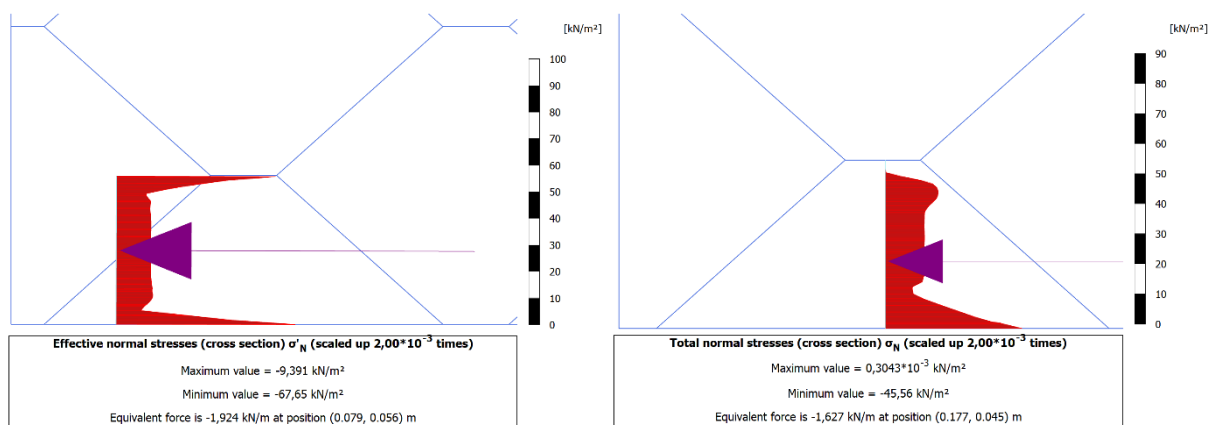
#### Anhang F.4: Ergänzende Darstellungen zur Erläuterung der Abweichungen für Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung



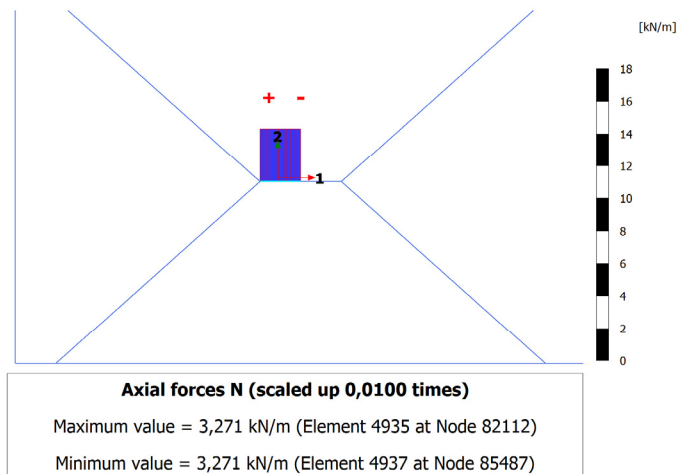
**Abb. F.4:** Maximale Hauptspannungsverteilung für Vergleichsberechnung 8 des Grundzustandes IIa (Skala angepasst)



**Abb. F.5:** Maximale Hauptspannungsverteilung im maßgebenden Modellausschnitt für die Vergleichsberechnung 8 des Grundzustandes IIa



**Abb. F.6:** Normalspannungsverteilung für die Vergleichsberechnung 8 im Schnitt A-A\* (links) und Schnitt B-B\* des Grundzustandes IIa



**Abb. F.7:** Normalkraftverteilung der horizontalen Wand im maßgebenden Modellausschnitt für Vergleichsberechnung 8 des Grundzustandes IIa

## Anhang F.5: Ergebnisvergleichs der analytischen Lösung und der Finite-Elemente-Berechnung für den Grundzustand III

**Tab. F.3:** Tabellarischer Ergebnisvergleich der analytischen Lösung und den Finite-Elemente-Berechnungen im Grundzustand III für befüllte Geozellen (Abweichung bezogen auf Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen)

Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}; E_f$	Maßgebende Verschiebungen $u_{M,2}^{III}$ [mm]		Äquivalenter Schubmodul $G_{12}^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]		Abweichung $\Delta G_{12}^*$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	Analytisch	FE-Berechnung	Analytisch	FE-Berechnung	[%]
Zellgeometrie A								
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 30	0,8504	0,6698	989,83	1.306,06	-24,21
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150; 120	0,6641	0,6261	1.267,47	1.382,73	-8,34
3	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 1	0,8570	0,5316	982,15	2.061,69	-52,36
4	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2; 0,1	0,9612	1,306	875,74	1.374,04	-36,27
5	0,05; 0,2; 16,82	41,75	288; 120	1,123	1,147	749,42	765,22	-2,06
Zellgeometrie B								
6	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 30	2,301	1,859	495,84	733,24	-32,38
7	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150; 120	1,637	1,631	696,96	827,95	-15,82
8	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 30	1,172	0,5960	973,20	2.236,11	-56,48
9	0,17; 2,5; 16,82	41,75	588,2; 1	16,15	4,435	70,66	288,76	-75,53
10	8,0; 2,5; 16,82	41,75	375; 0,1	0,0192	0,01914	59.316,7	59.328,93	-0,02
10a	0,05; 2,5; 16,82	41,75	288; 120	2,722	2,844	419,03	474,27	-11,65
Zellgeometrie C								
11	0,17; 0,2; 22,49	30	150; 30	1,819	1,515	711,24	876,78	-18,88
12	8,0; 0,2; 22,49	30	375; 0,1	0,0229	0,02294	56.421,9	56.428,33	-0,01
12a	0,17; 0,2; 22,49	30	588,2; 0,1	1,408	0,9990	918,66	1616,29	-43,1625
12b	0,05; 0,2; 22,49	30	288; 120	2,583	2,645	500,70	501,27	-0,1136

(Fortsetzung)

Zellgeometrie D								
13	0,17; 2,5; 22,49	30	150; 30	4,081	3,874	390,20	488,60	-20,14
14	0,17; 2,5; 22,49	30	150; 120	3,122	3,346	510,14	557,73	-8,53
15	8,0; 2,5; 22,49	30	375; 0,1	0,0371	0,03493	42.922,6	42.951,34	-0,07
15a	0,17; 2,5; 22,49	30	588,2; 0,1	24,16	8,788	65,92	220,07	-70,31
15b	0,05; 2,5; 22,49	30	288; 120	5,276	2,535	319,14	336,30	-5,43
Zellgeometrie E								
16	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 30	0,2903	0,1271	951,54	2.576,23	-63,06
17	0,17; 0,75; 3,89	45	150; 120	0,1497	0,1004	1.845,46	3.255,56	-43,31
18	0,17; 0,75; 3,89	45	588,2; 1	0,5543	0,3993	498,40	835,83	-40,37
19	0,05; 0,75; 3,89	45	288; 120	0,2247	0,1787	1.229,51	1.823,60	-32,58
20	0,05; 0,75; 3,89	45	150; 120	0,3728	0,1956	741,07	990,72	-25,20

**Tab. F.4:** Tabellarischer Ergebnisvergleich der analytischen Lösung und den Finite-Elemente-Berechnungen im Grundzustand III für unbefüllte Geozellen (Abweichung bezogen auf Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnungen)

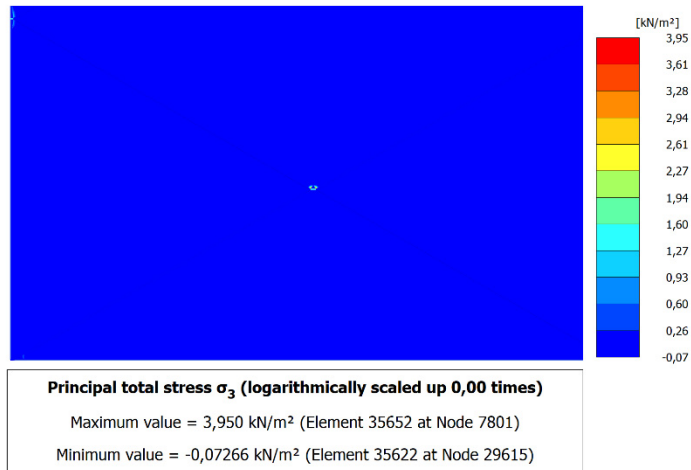
Nr.	t; h; l	$\theta$	$E_{cw}; E_f$	Maßgebende Verschiebungen $u_{M,2}^{III}$ [mm]		Äquivalenter Schubmodul $G_{12}^*$ [kN/m <sup>2</sup> ]		Abweichung $\Delta G_{12}^*$
[-]	[cm]	[°]	[MN/m <sup>2</sup> ]	Analytisch	FE-Berechnung	Analytisch	FE-Berechnung	[%]
Zellgeometrie A								
1	0,17; 0,2; 16,82	41,75	150,0	3,824	7,650	220,10	220,08	0,008
2	0,17; 0,2; 16,82	41,75	588,2	0,9752	1,951	863,12	863,05	0,008
Zellgeometrie B								
3	0,17; 2,5; 16,82	41,75	150,0	448,3	896,7	2,54	2,54	0,0008
4	8,0; 2,5; 16,82	41,75	375,0	0,01923	0,03847	59308,11	59307,49	0,001
Zellgeometrie C								
5	0,17; 0,2; 22,49	30	150,0	6,267	11,25	206,41	206,41	-0,0003
Zellgeometrie D								
6	0,17; 2,5; 22,49	30	150,0	590,3	1181,0	2,70	2,70	-0,0003
Zellgeometrie E								
7	0,17; 0,75; 3,89	45	150,0	2,450	4,901	112,74	112,74	-0,001





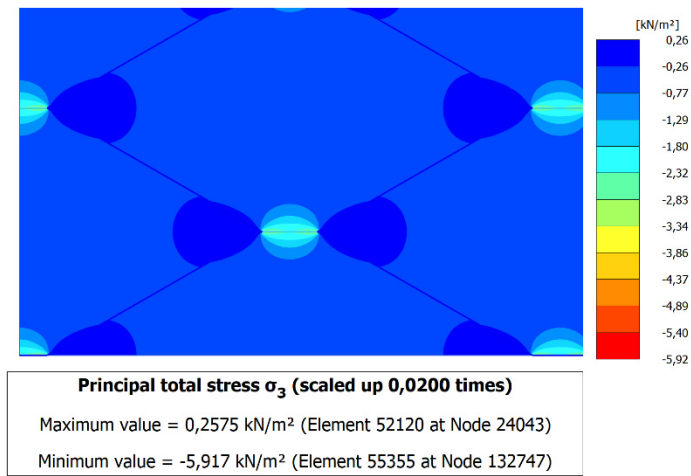
## Anhang G

Anhang G.1: Ergänzende Darstellungen zur Prüfung der Anwendungsgrenze im Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in  $x_1$ -Richtung



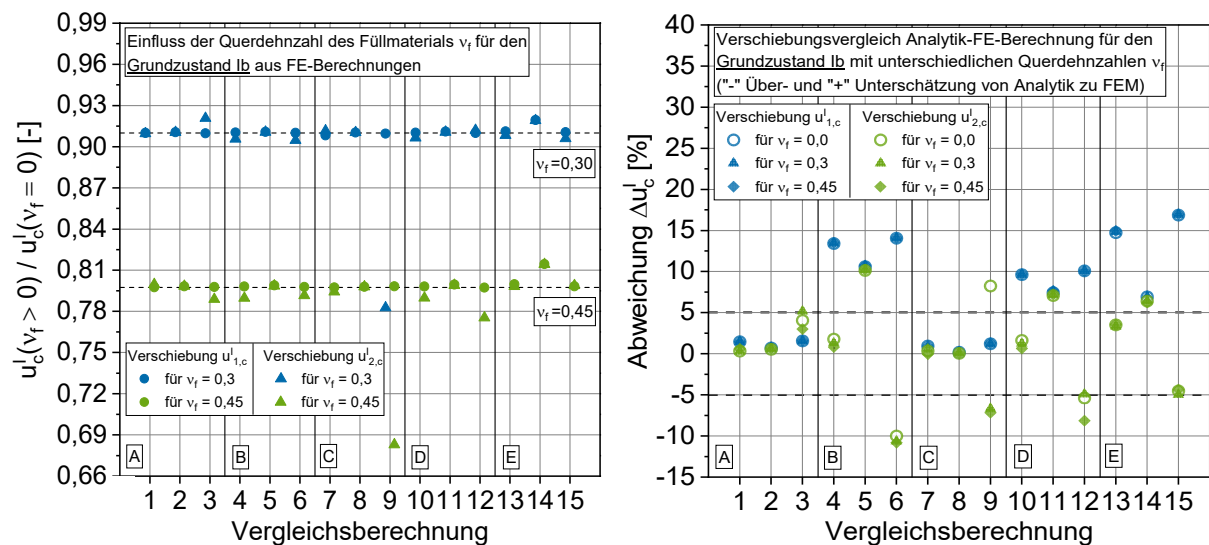
**Abb. G.1:** Minimale Hauptspannungsverteilung im maßgebenden Modellausschnitt für die Vergleichsberechnung 7 des Grundzustand Ia mit  $\nu_f = 0,45$

Anhang G.2: Ergänzende Darstellungen zur Prüfung der Anwendungsgrenze im Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in  $x_2$ -Richtung

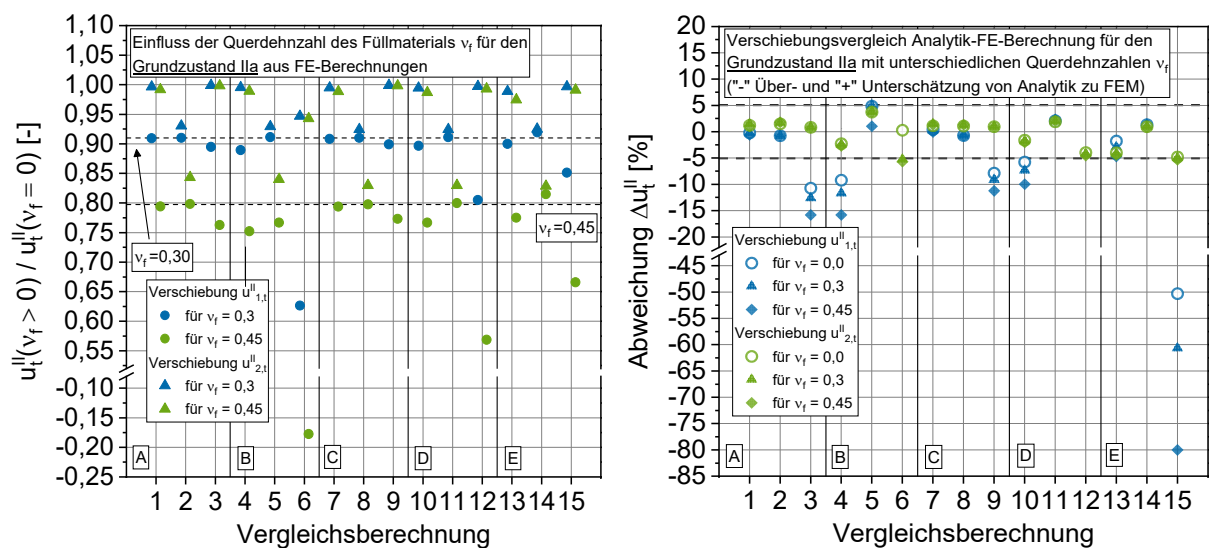


**Abb. G.2:** Minimale Hauptspannungsverteilung im maßgebenden Modellausschnitt für die Vergleichsberechnung 10 des Grundzustand IIb mit  $\nu_f = 0,45$

### Anhang G.3: Ergänzende Darstellungen zur Prüfung der Anwendungsgrenze im Grundzustand Ib und IIa



**Abb. G.3:** Einfluss der Querdehnung auf die Verschiebungen aus den Finite-Elemente-Berechnungen (links); Verschiebungsvergleich von Analytik und FE-Berechnung bei verschiedenen Querdehnzahlen im Grundzustand Ib



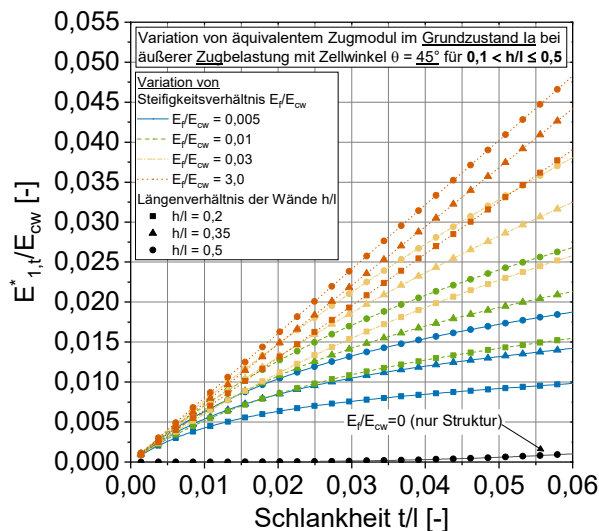
**Abb. G.4:** Einfluss der Querdehnung auf die Verschiebungen aus den Finite-Elemente-Berechnungen (links); Verschiebungsvergleich von Analytik und FE-Berechnung bei verschiedenen Querdehnzahlen im Grundzustand IIa



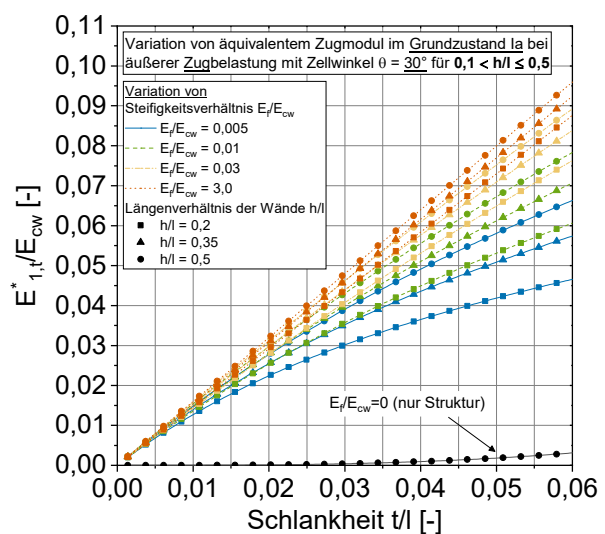
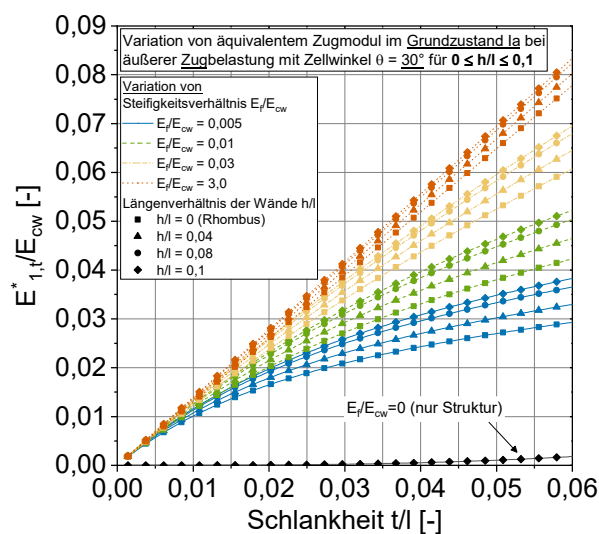
## Anhang H

### Anhang H.1: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für den Grundzustand Ia bei äußerer Zugbelastung in $x_1$ -Richtung

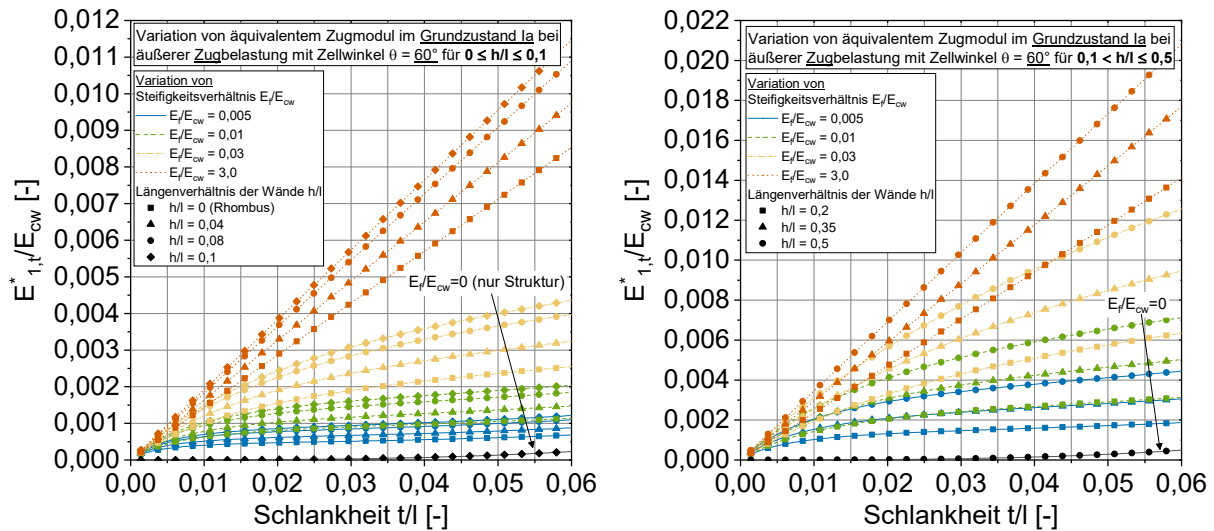
#### Variation des äquivalenten Zugmoduls $E_{1,t}^*$



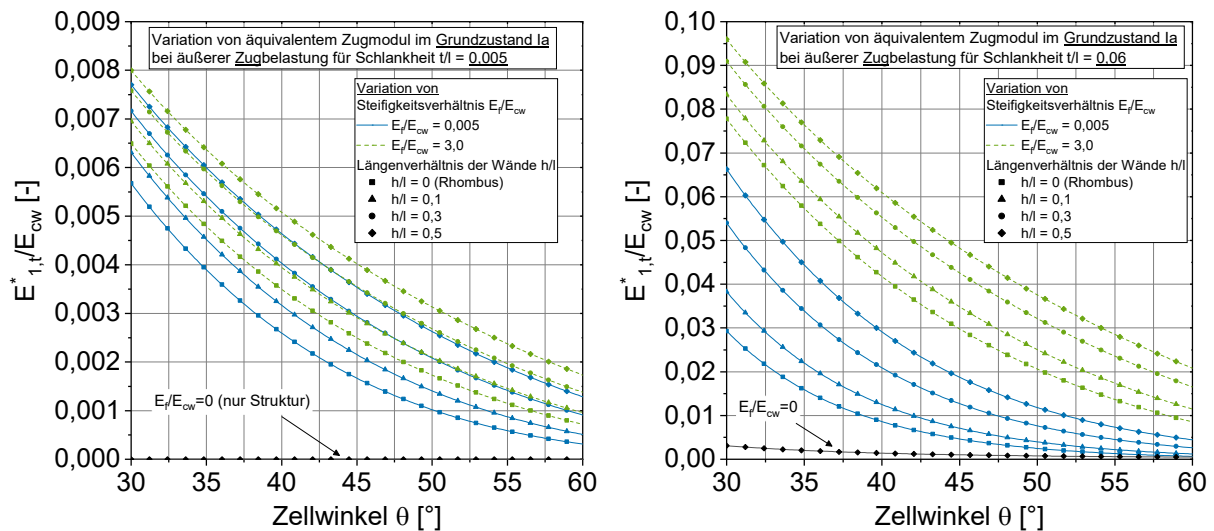
**Abb. H.1:** Variation von  $E_{1,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$



**Abb. H.2:** Variation von  $E_{1,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

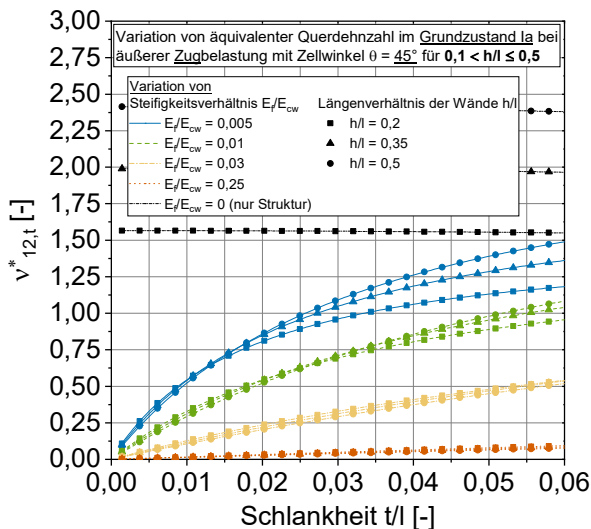


**Abb. H.3:** Variation von  $E^*_{1,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 60^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

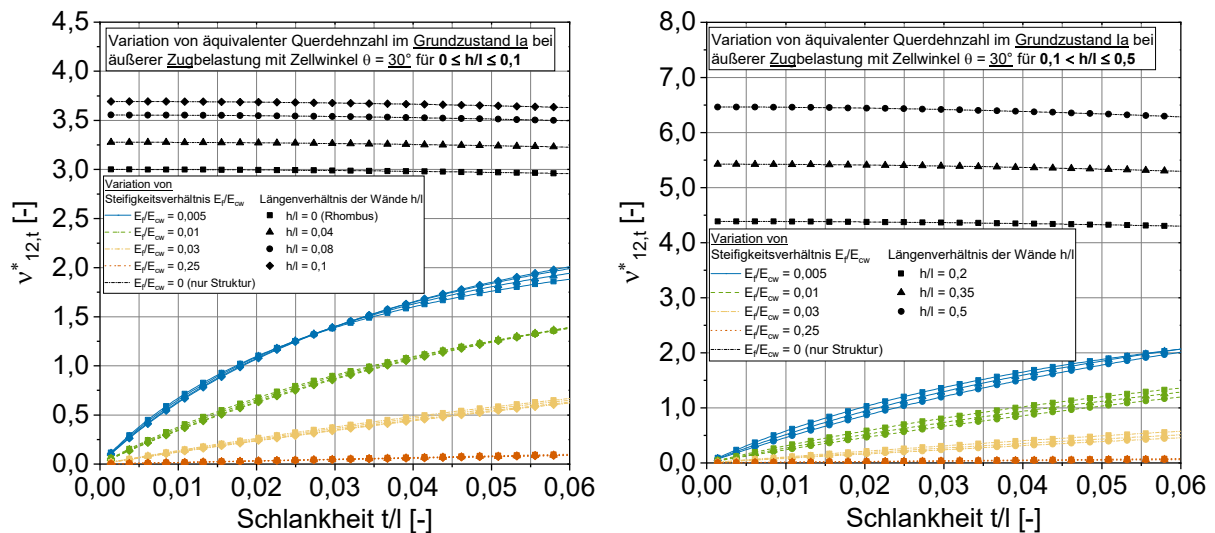


**Abb. H.4:** Variation von  $E^*_{1,t}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,06$  (rechts)

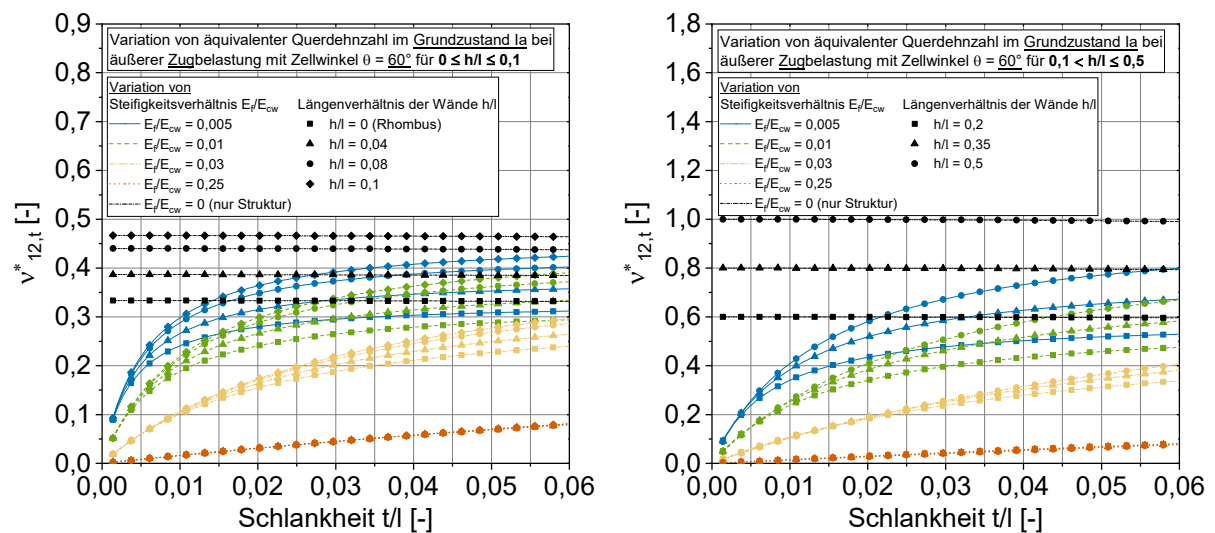
#### Variation der äquivalenten Querdehnzahl $v^*_{12,t}$



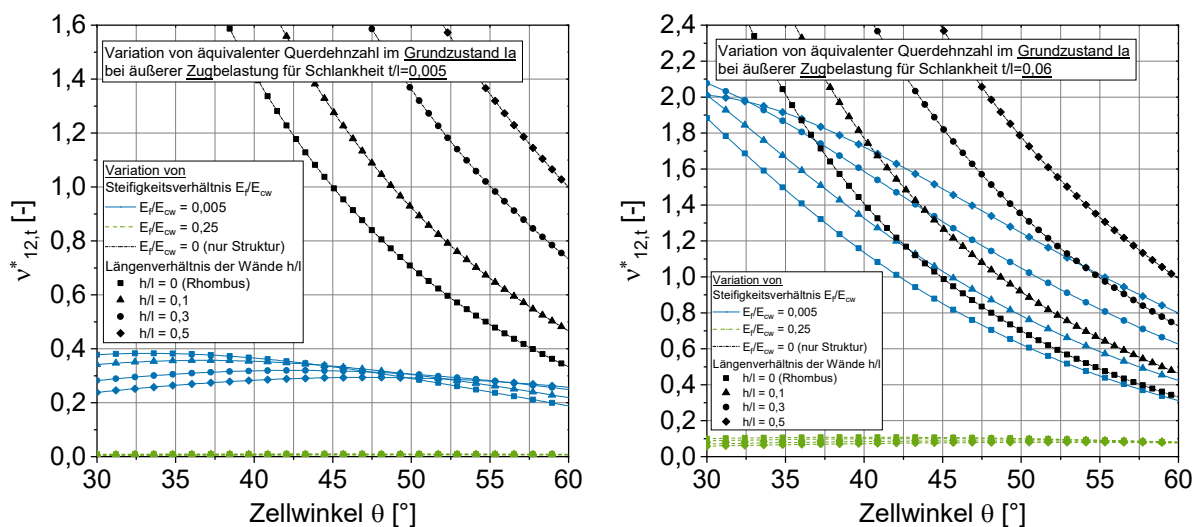
**Abb. H.5:** Variation von  $v^*_{12,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$



**Abb. H.6:** Variation von  $v^*_{12,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



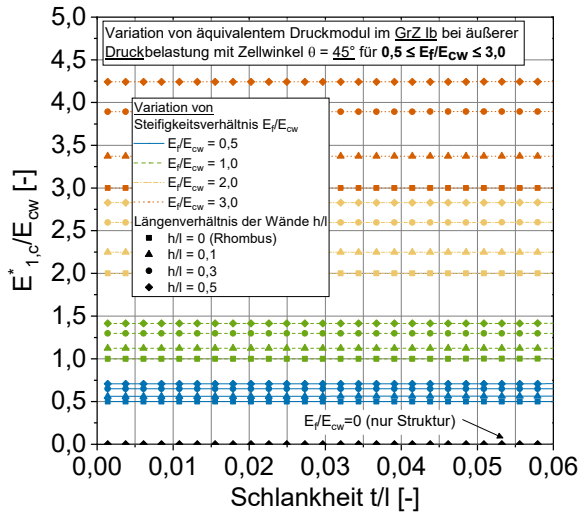
**Abb. H.7:** Variation von  $v^*_{12,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 60^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



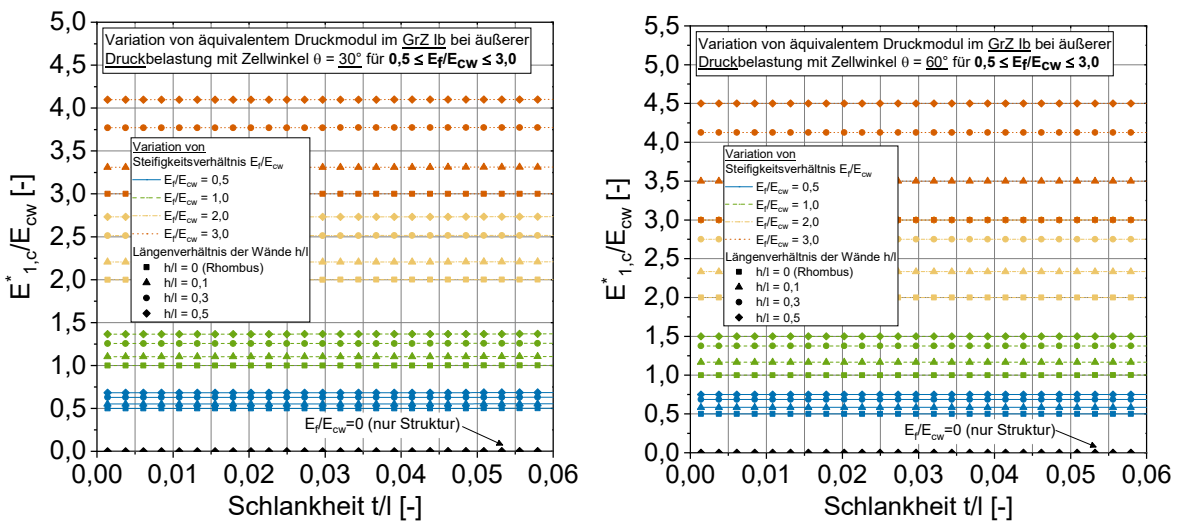
**Abb. H.8:** Variation von  $v^*_{12,t}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,06$  (rechts)

## Anhang H.2: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für den Grundzustand Ib bei äußerer Druckbelastung in $x_1$ -Richtung

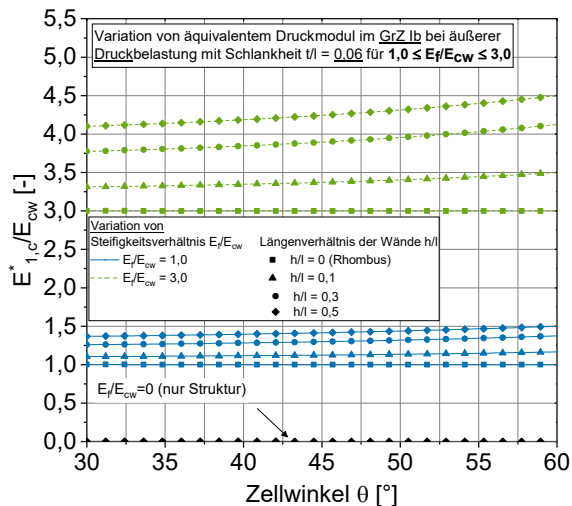
### Variation des äquivalenten Druckmoduls $E_{1,c}^*$



**Abb. H.9:** Variation von  $E_{1,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0.5 \leq E_f/E_{cw} \leq 3.0$



**Abb. H.10:** Variation von  $E_{1,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  (links) und  $\theta = 60^\circ$  (rechts)



**Abb. H.11:** Variation von  $E_{1,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0.06$  und  $1.0 \leq E_f/E_{cw} \leq 3.0$



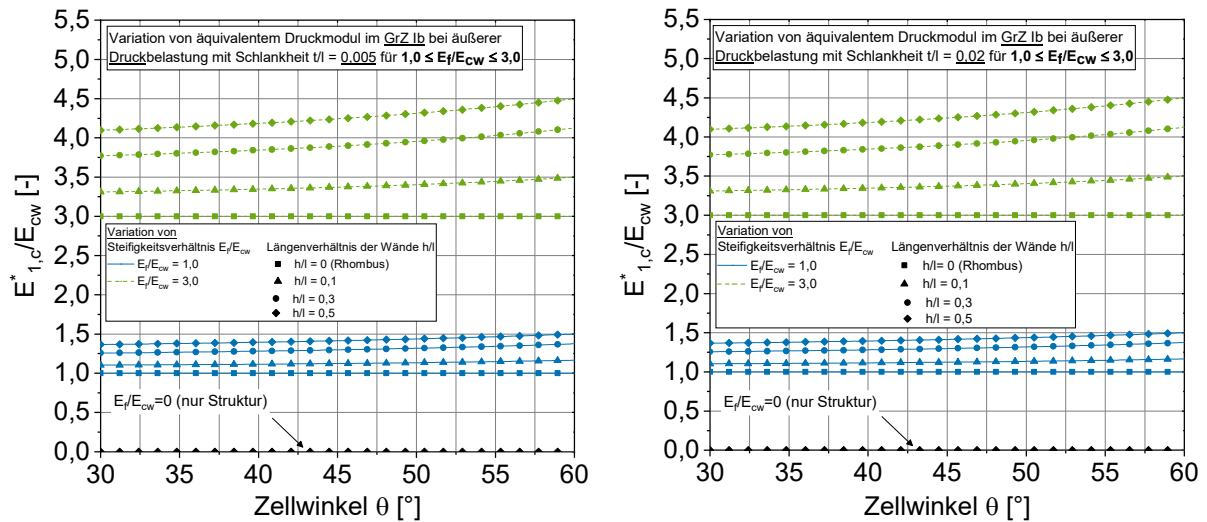


Abb. H.12: Variation von  $E^*_{1,c}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0.005$  (links) und  $t/l = 0.06$  (rechts)

Variation der äquivalenten Querdehnzahl  $v^*_{12,c}$

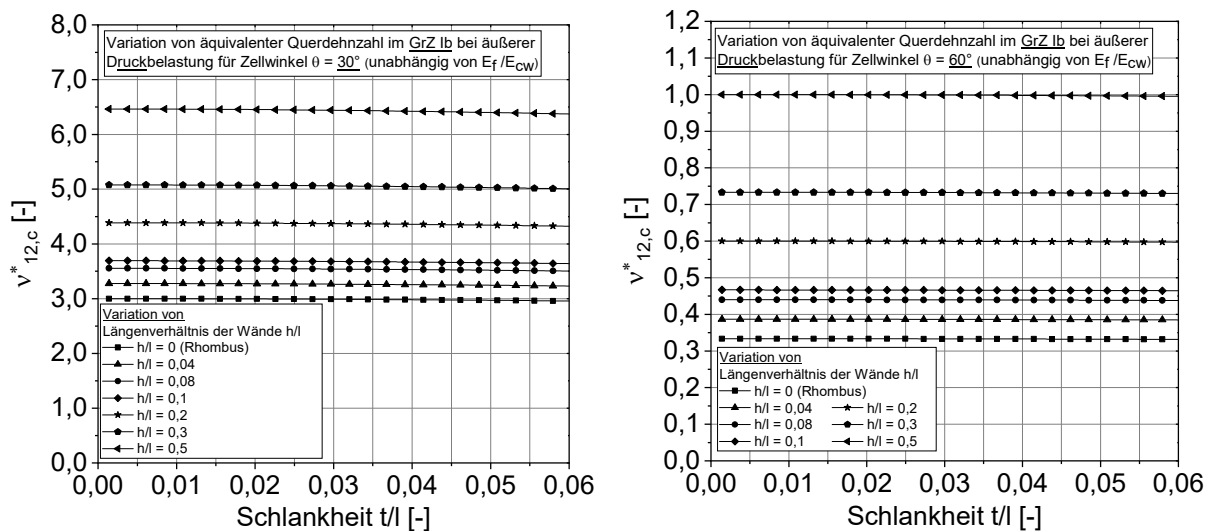


Abb. H.13: Variation von  $v^*_{12,c}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  (links) und  $\theta = 60^\circ$  (rechts)

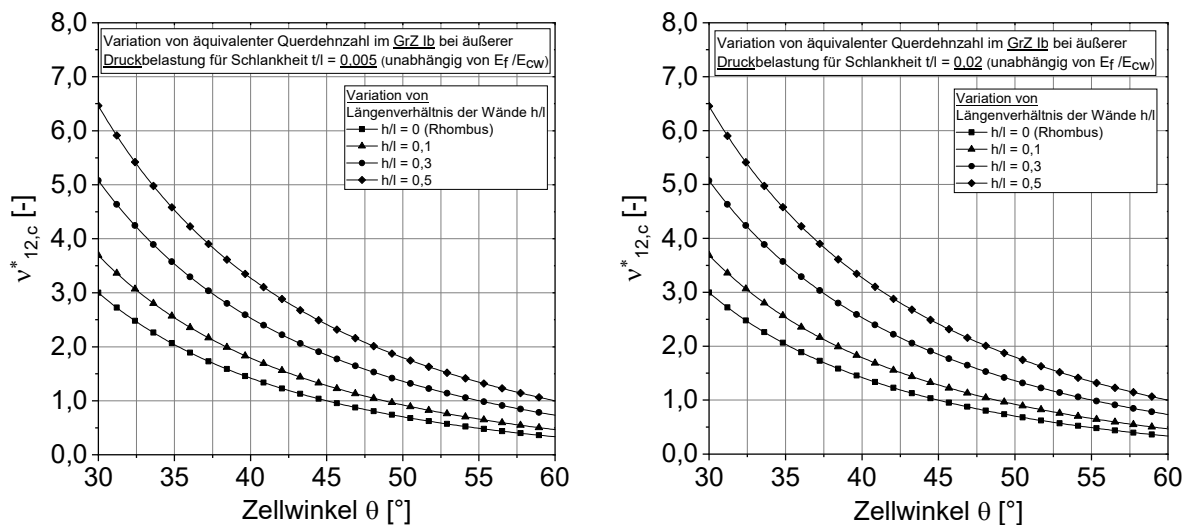
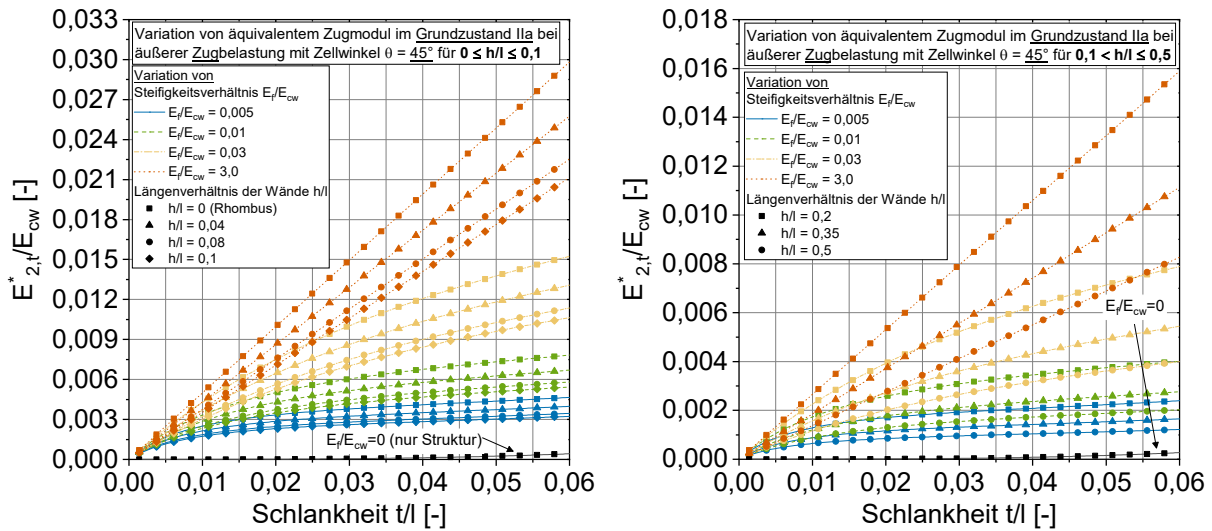


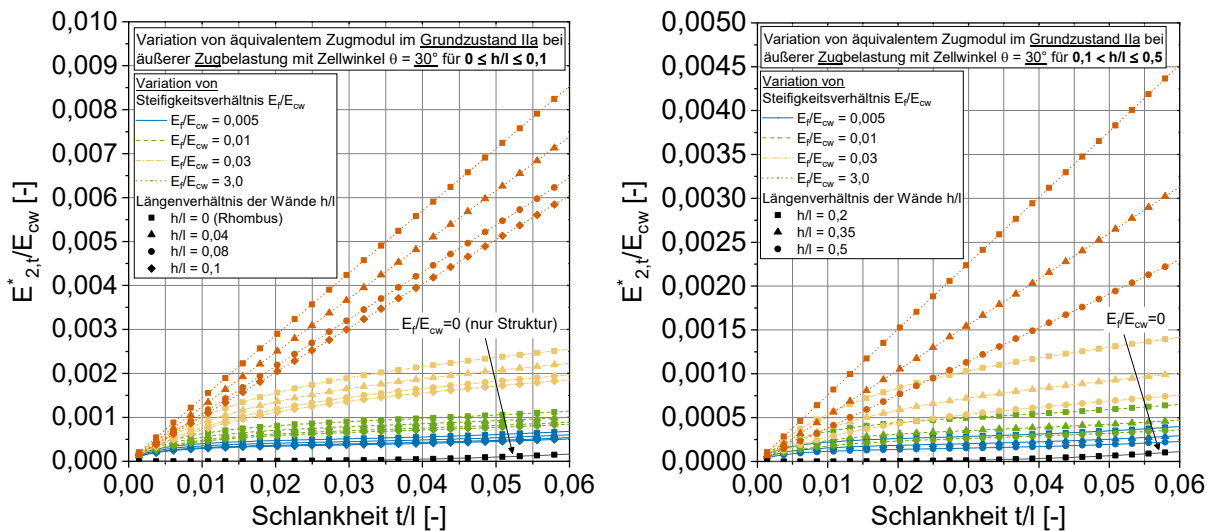
Abb. H.14: Variation von  $v^*_{12,c}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0.005$  (links) und  $t/l = 0.02$  (rechts)

### Anhang H.3: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für den Grundzustand IIa bei äußerer Zugbelastung in $x_2$ -Richtung

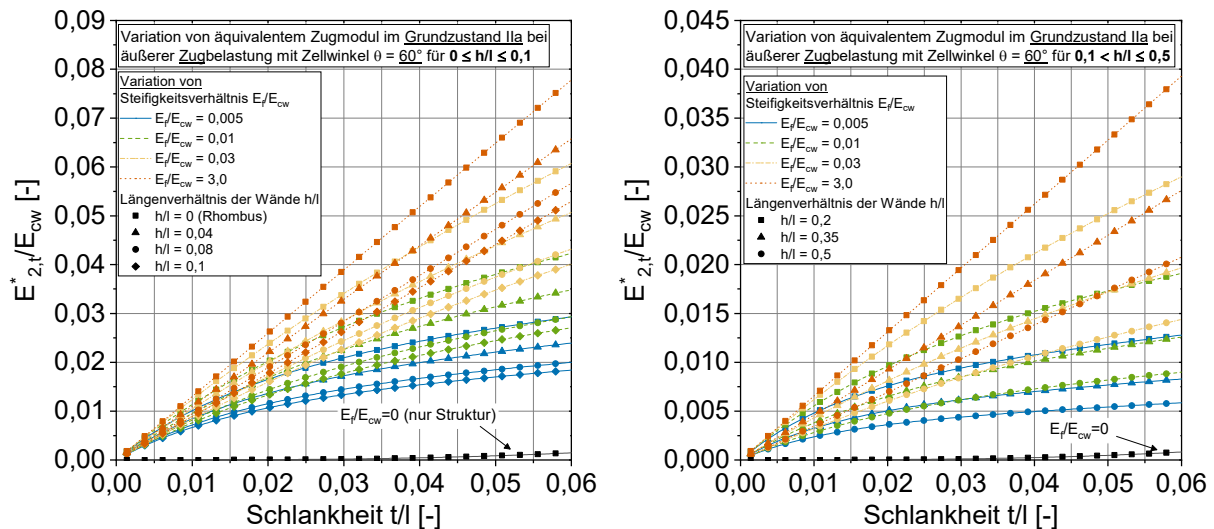
#### Variation des äquivalenten Zugmoduls $E_{2,t}^*$



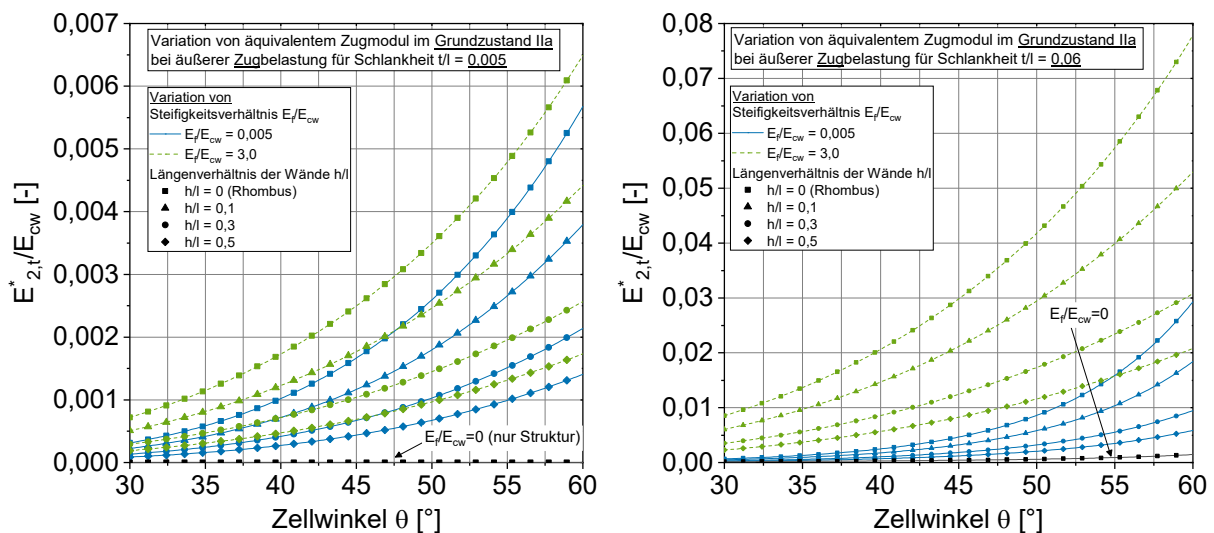
**Abb. H.15:** Variation von  $E_{2,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



**Abb. H.16:** Variation von  $E_{2,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

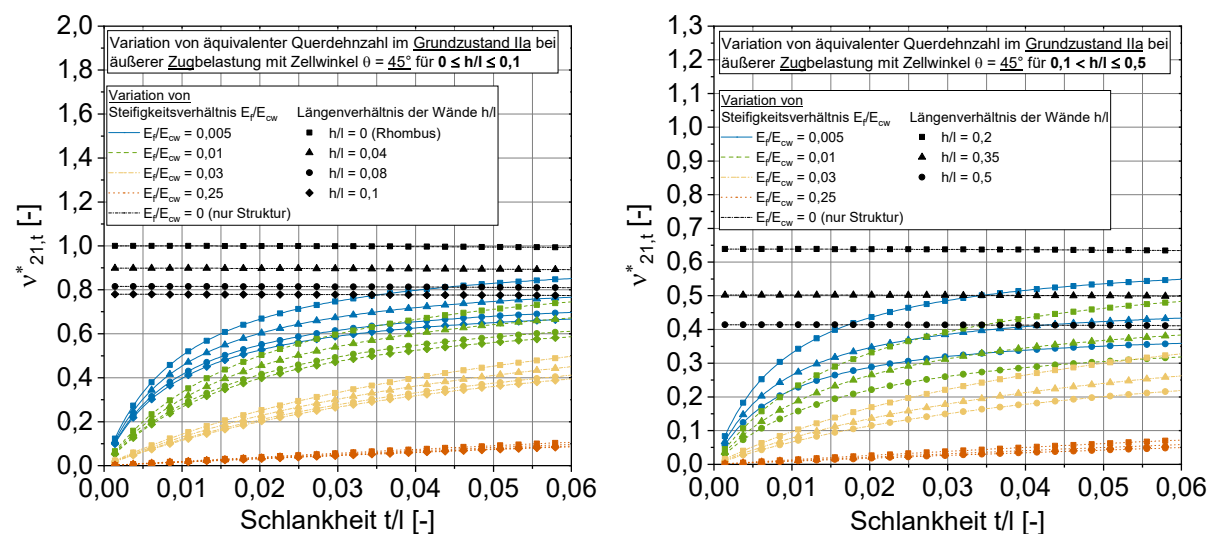


**Abb. H.17:** Variation von  $E^*_{2,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 60^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

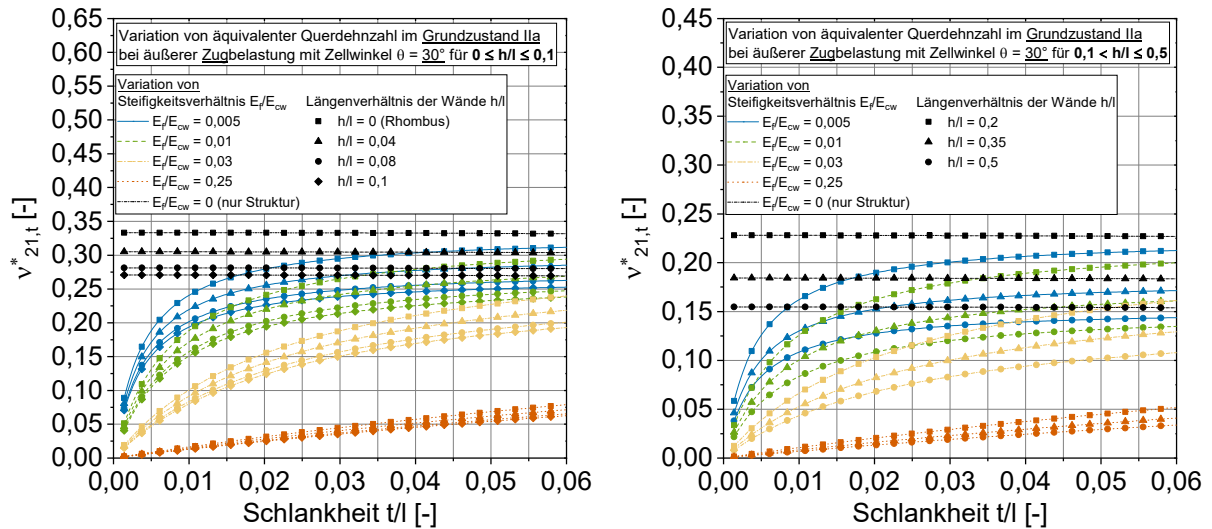


**Abb. H.18:** Variation von  $E^*_{2,t}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,06$  (rechts)

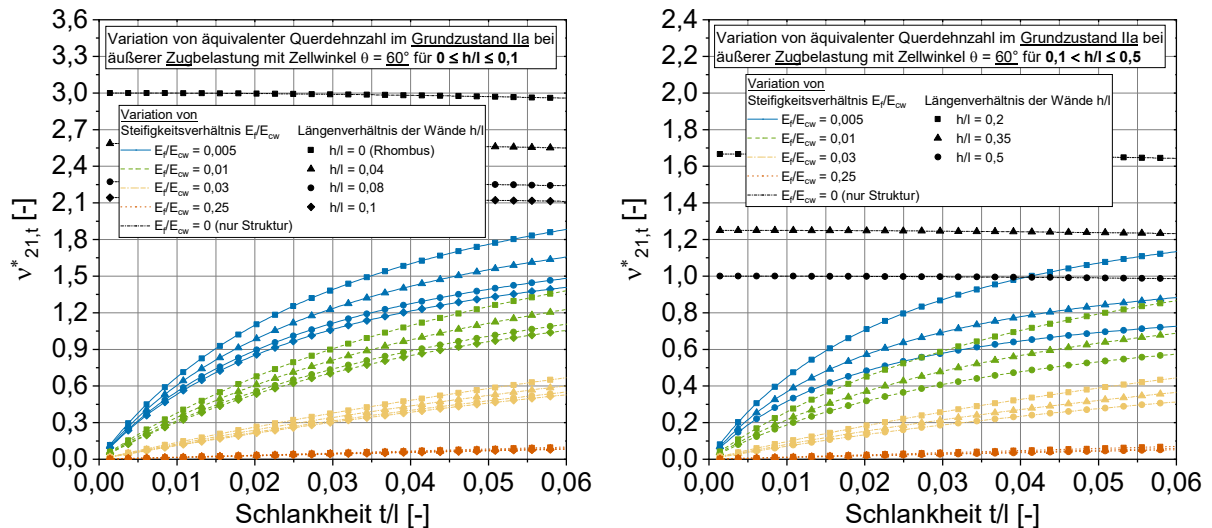
#### Variation der äquivalenten Querdehnzahl $v^*_{21,t}$



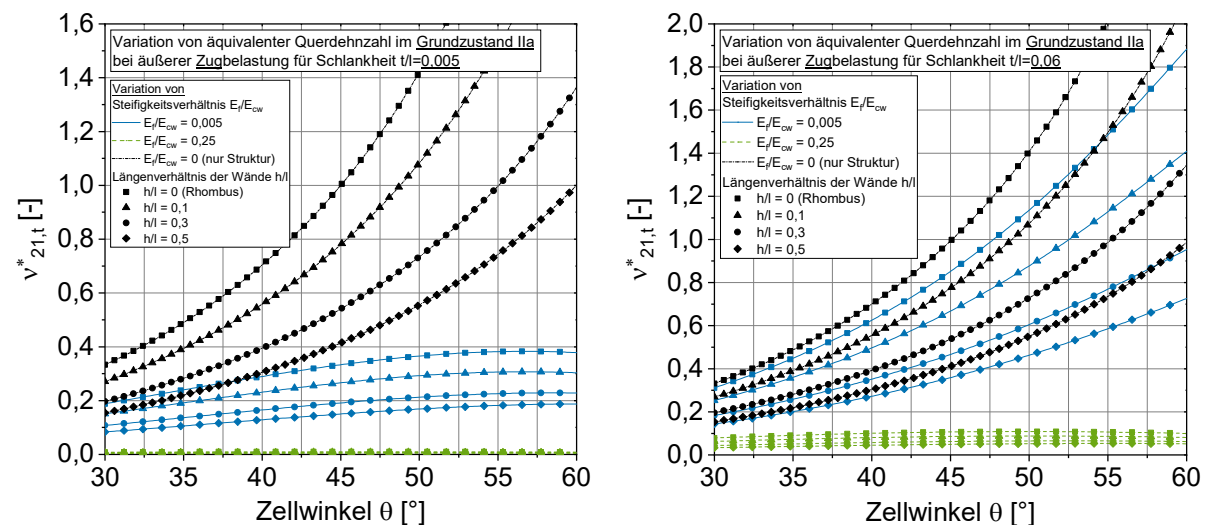
**Abb. H.19:** Variation von  $v^*_{21,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



**Abb. H.20:** Variation von  $v_{21,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



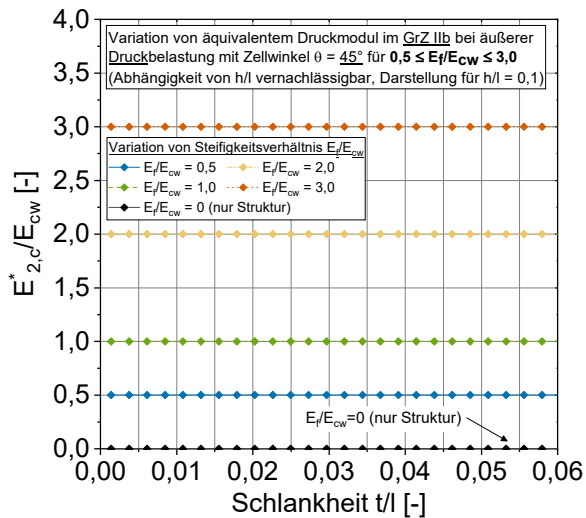
**Abb. H.21:** Variation von  $v_{21,t}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 60^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



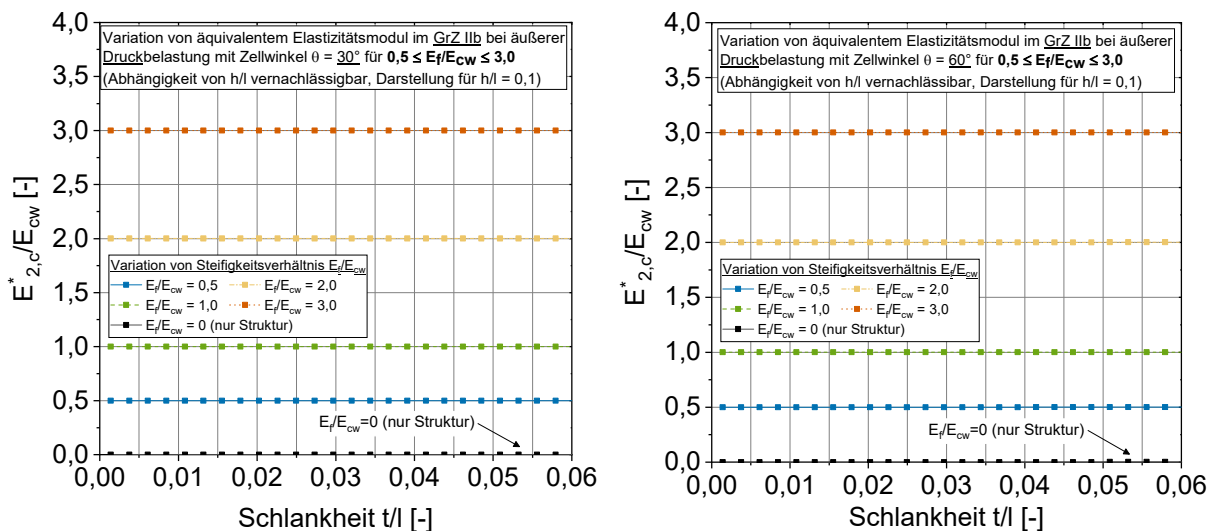
**Abb. H.22:** Variation von  $v_{21,t}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,06$  (rechts)

#### Anhang H.4: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für den Grundzustand IIb bei äußerer Druckbelastung in $x_2$ -Richtung

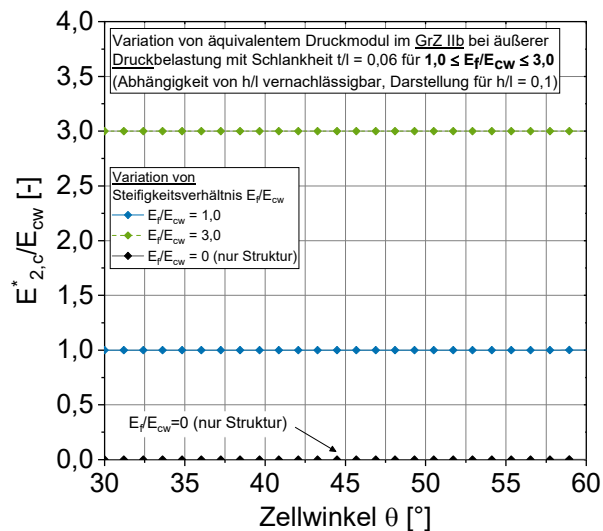
##### Variation des äquivalenten Druckmoduls $E_{2,c}^*$



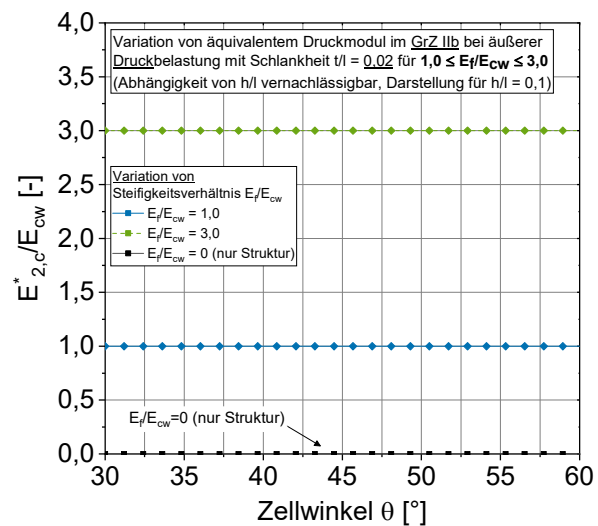
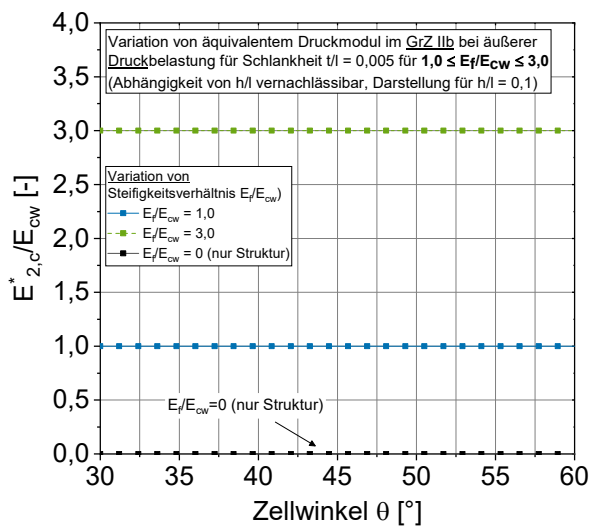
**Abb. H.23:** Variation von  $E_{2,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0,5 \leq E_f/E_{cw} \leq 3,0$



**Abb. H.24:** Variation von  $E_{2,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  (links) und  $\theta = 60^\circ$  (rechts)

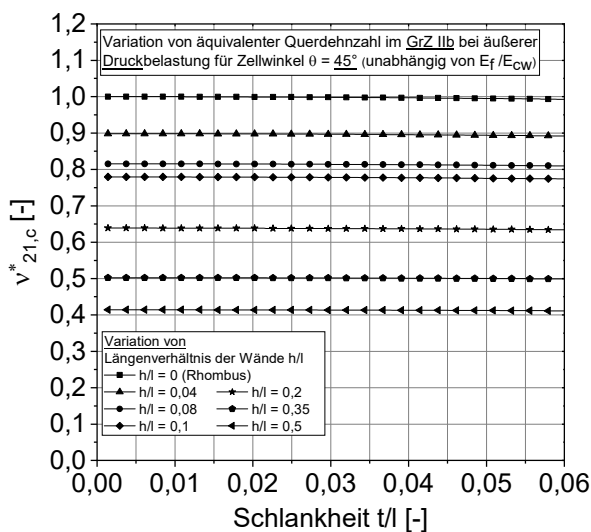


**Abb. H.25:** Variation von  $E^*_{2,c}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,06$  und  $1,0 \leq E_f/E_{cw} \leq 3,0$



**Abb. H.26:** Variation von  $E^*_{1,c}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,02$  (rechts)

#### Variation der äquivalenten Querdehnzahl $v^*_{21,c}$



**Abb. H.27:** Variation von  $v^*_{21,c}$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$

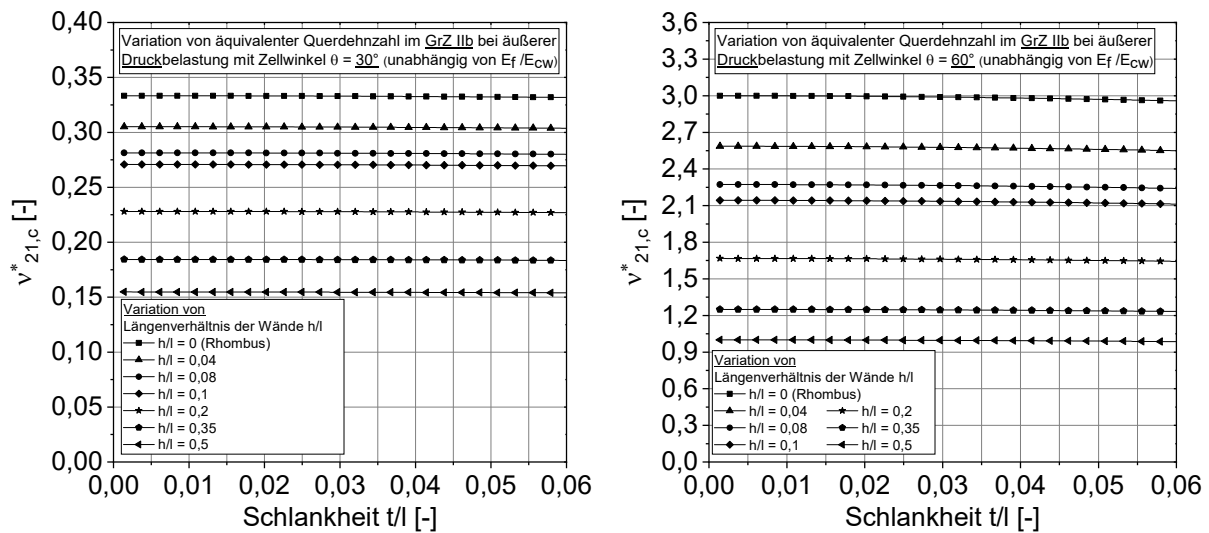


Abb. H.28: Variation von  $v_{21,c}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  (links) und  $\theta = 60^\circ$  (rechts)

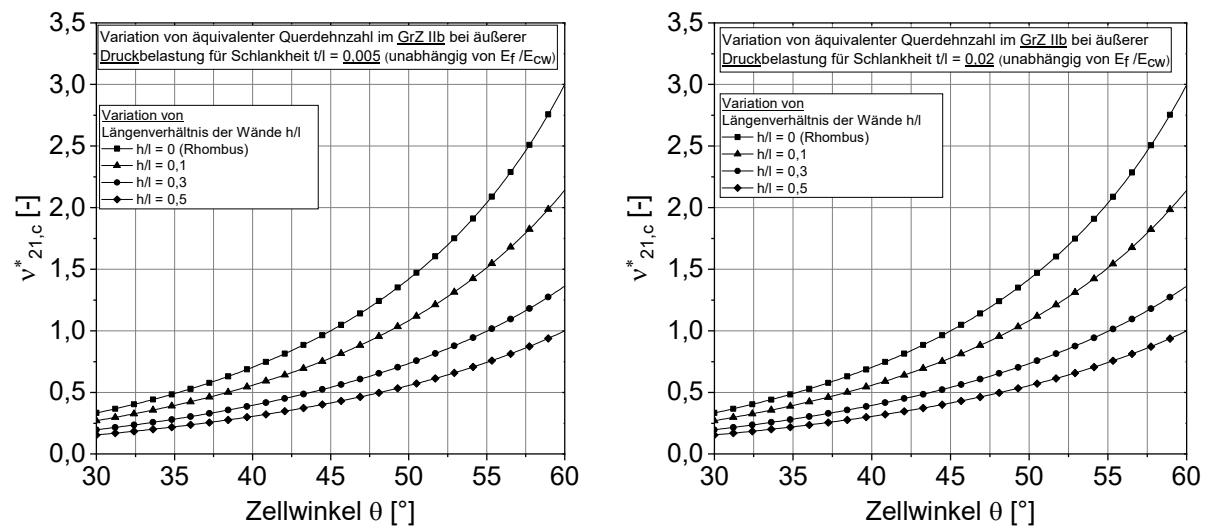
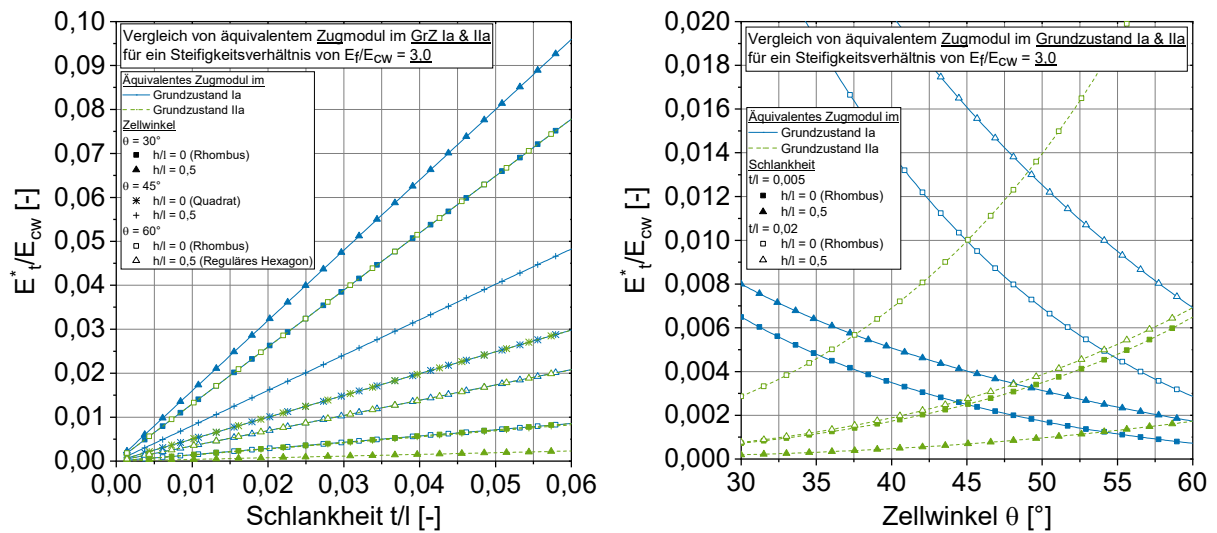


Abb. H.29: Variation von  $v_{21,c}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,005$  (links) und  $t/l = 0,02$  (rechts)

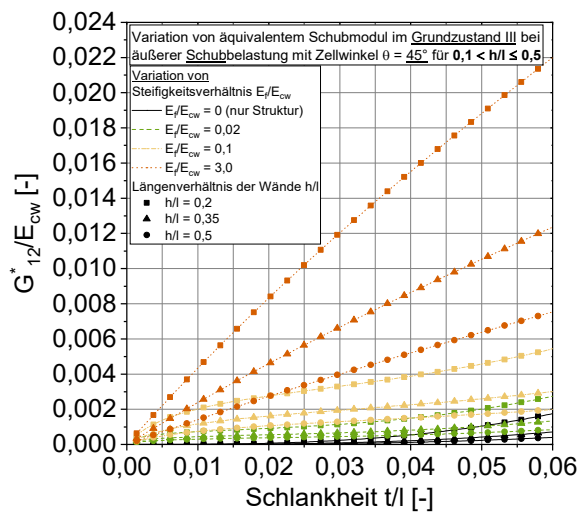
# Anhang H.5: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für die gegenseitige Abbildung von Grundzustand I und II



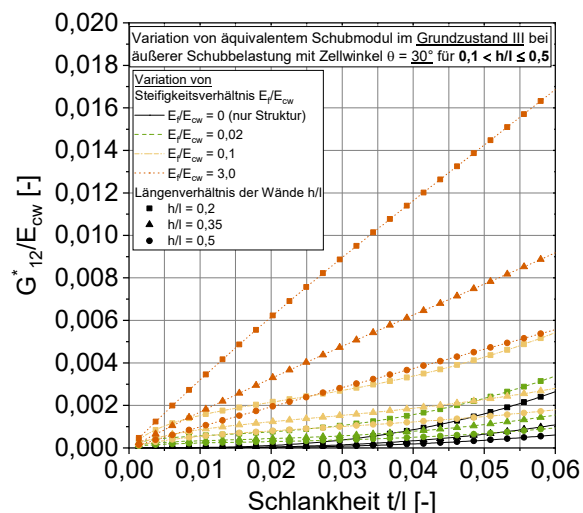
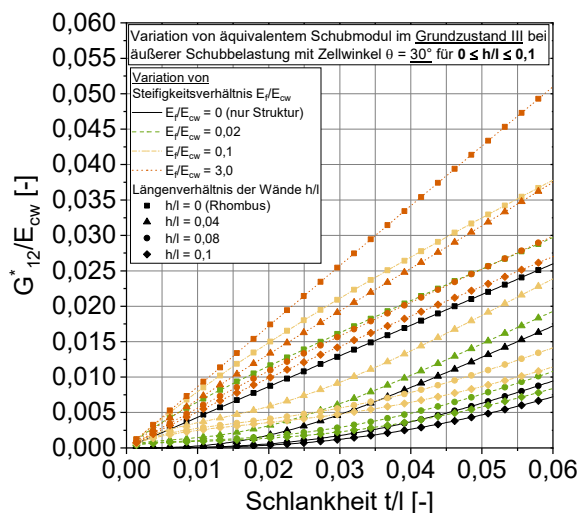
**Abb. H.30:** Variation von  $E^*_{1,t}$  und  $E^*_{2,t}$  über die Schlankheit  $t/l$  (links) und den Zellwinkel  $\theta$  (rechts) bei  $E_f/E_{cw} = 3$



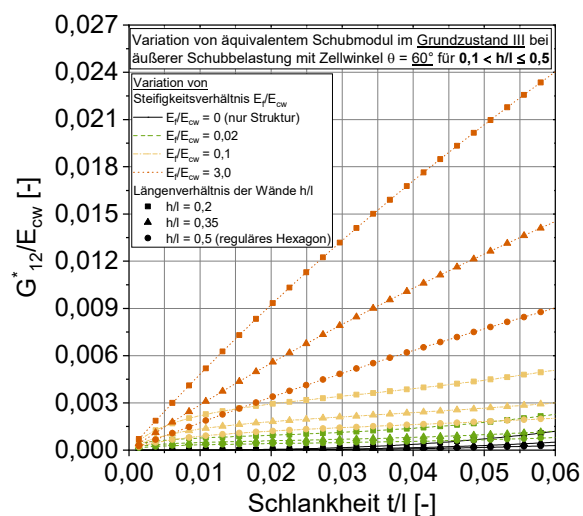
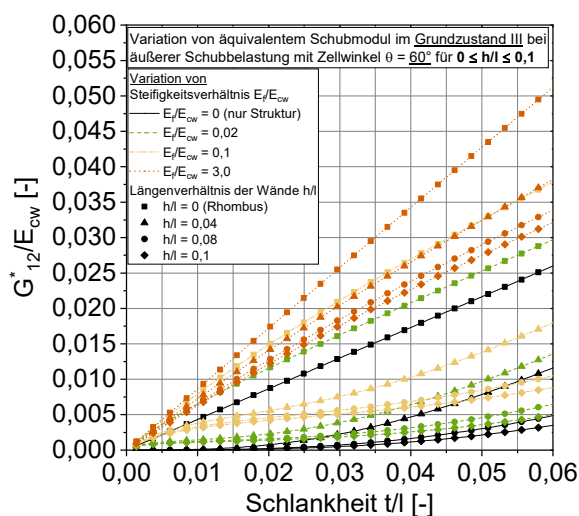
# Anhang H.6: Ergänzende Darstellungen zu den Ergebnissen der Parameterstudie für den Schubmodul im Grundzustand III bei reiner Schubbelastung in der $x_1$ - $x_2$ -Ebene



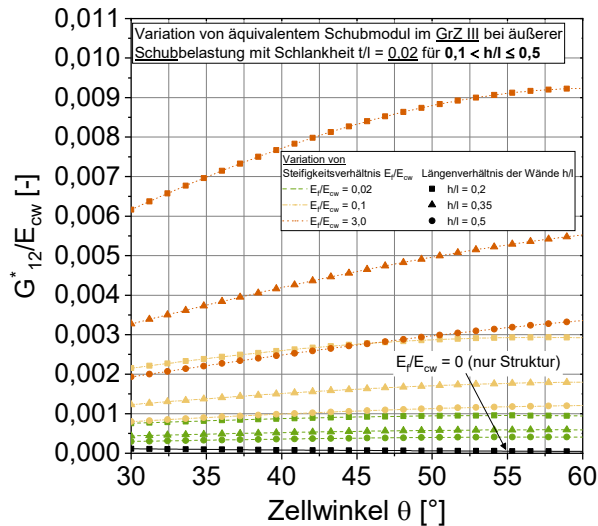
**Abb. H.31:** Variation von  $G_{12}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$



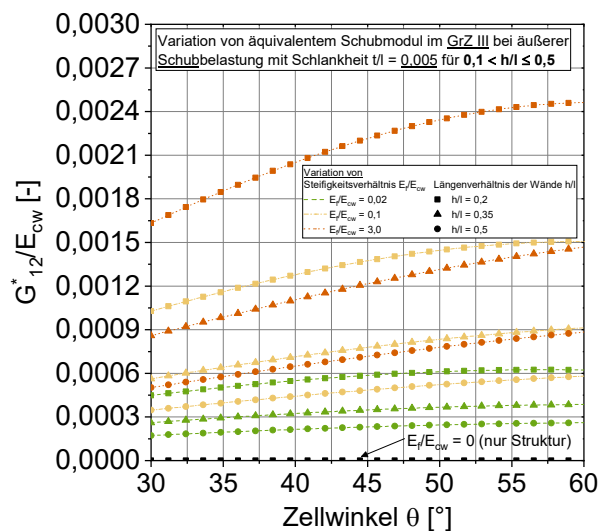
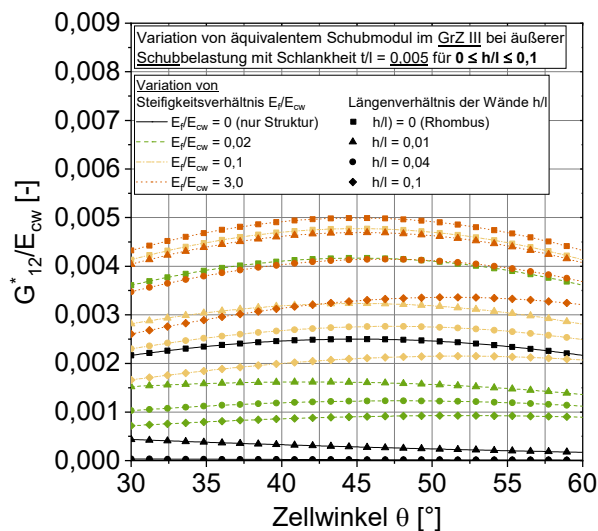
**Abb. H.32:** Variation von  $G_{12}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 30^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



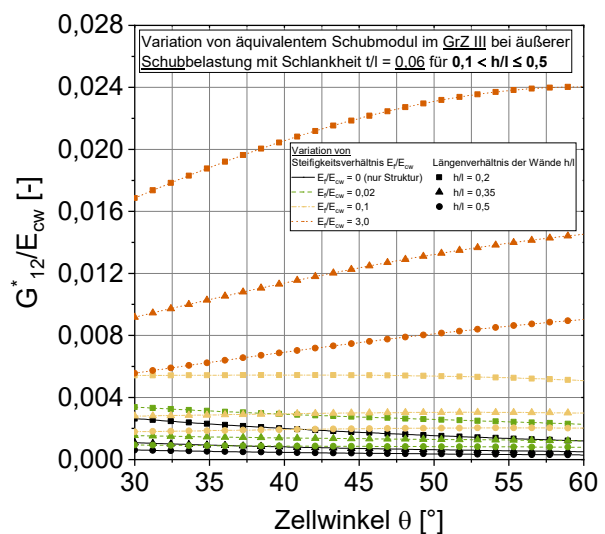
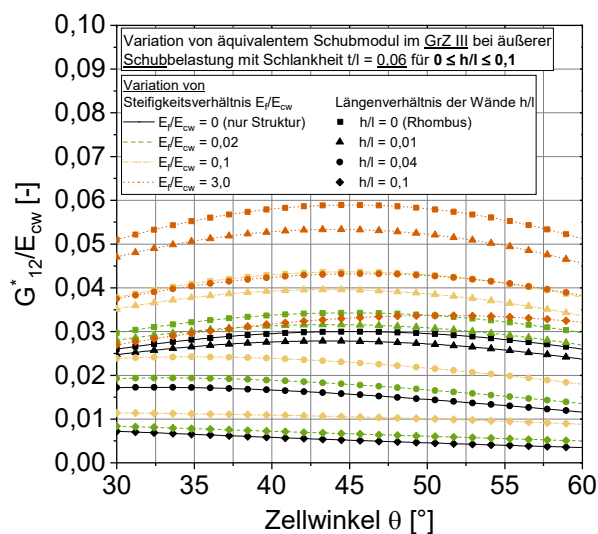
**Abb. H.33:** Variation von  $G_{12}^*$  über die Schlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 60^\circ$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)



**Abb. H.34:** Variation von  $G_{12}^*$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,02$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$



**Abb. H.35:** Variation von  $G_{12}^*$  über den Zellwinkel bei  $t/l = 0,005$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

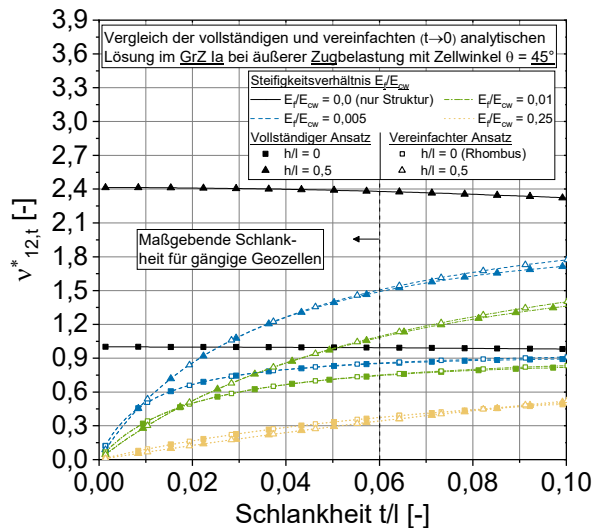


**Abb. H.36:** Variation von  $G_{12}^*$  über den Zellwinkel bei  $t/l = 0,06$  und  $0 \leq h/l \leq 0,1$  (links) sowie  $0,1 < h/l \leq 0,5$  (rechts)

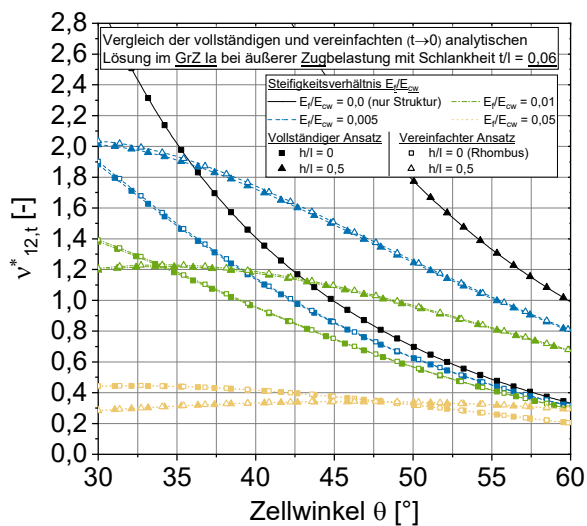
# Anhang I

Anhang I.1: Ergänzende Darstellungen zum Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bestimmungsgleichungen im Grundzustand Ia und IIa bei äußerer Zugbelastung in  $x_1$ - oder  $x_2$ -Richtung

## Grundzustand Ia

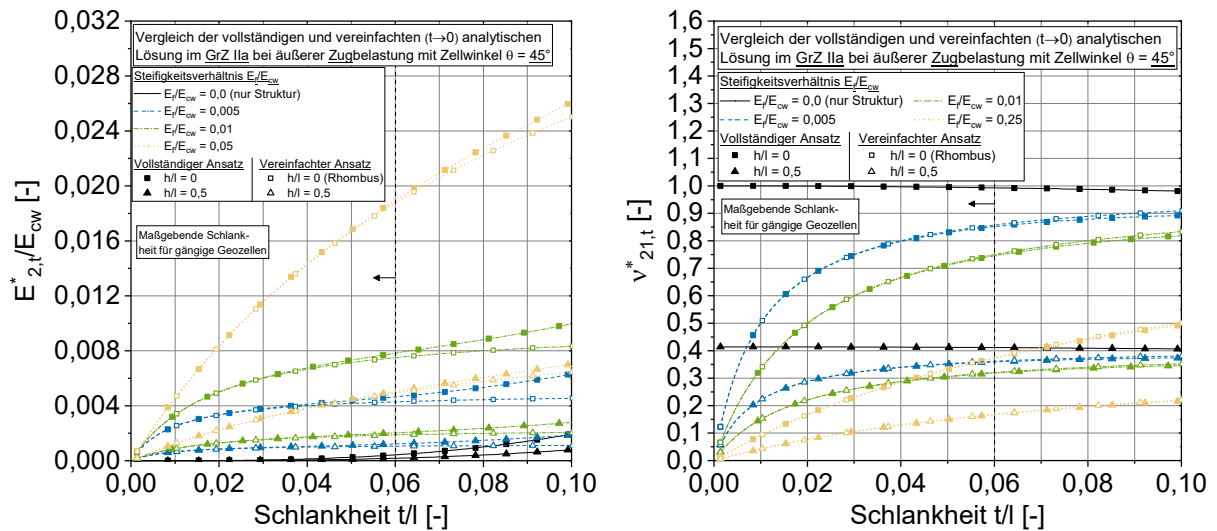


**Abb. I.1:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $v^*_{12,t}$  über die Wandschlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$

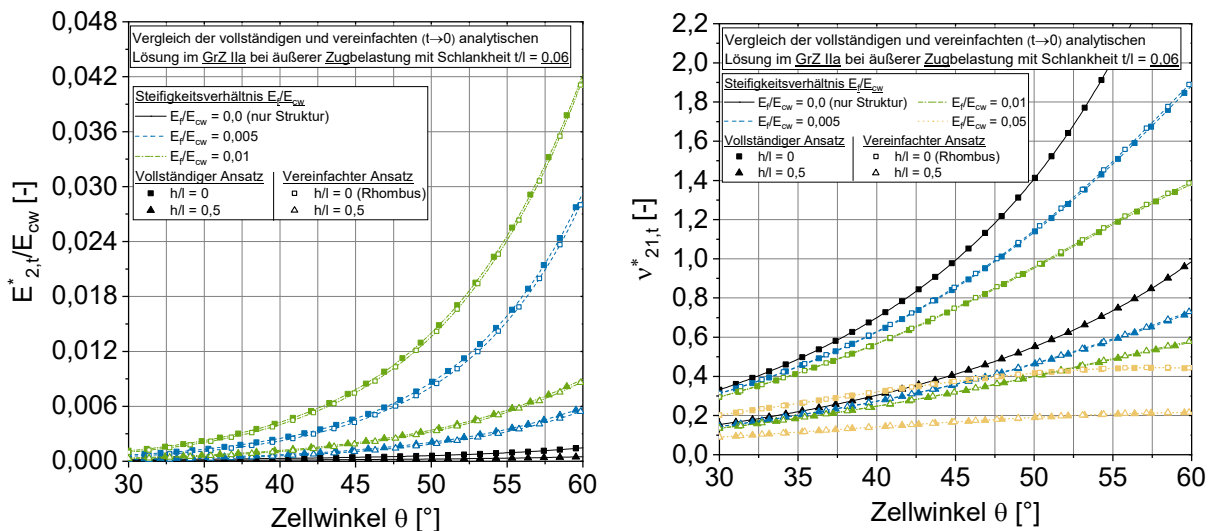


**Abb. I.2:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $v^*_{12,t}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,06$

## Grundzustand IIa

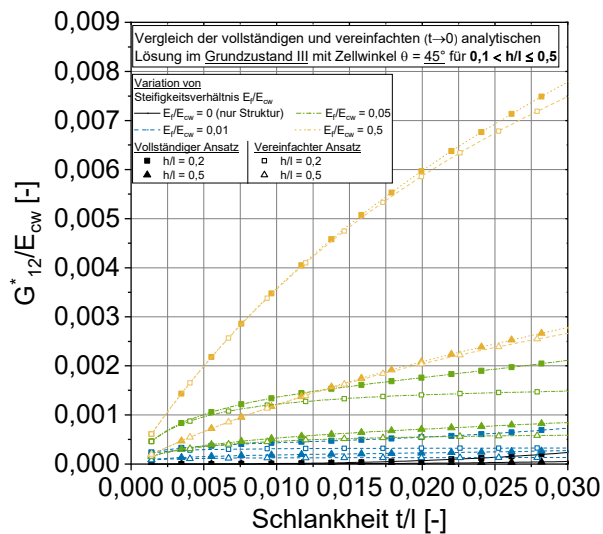


**Abb. I.3:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $E^*_{2,t}$  (links) und für  $v^*_{21,t}$  (rechts) über die Wandschlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$

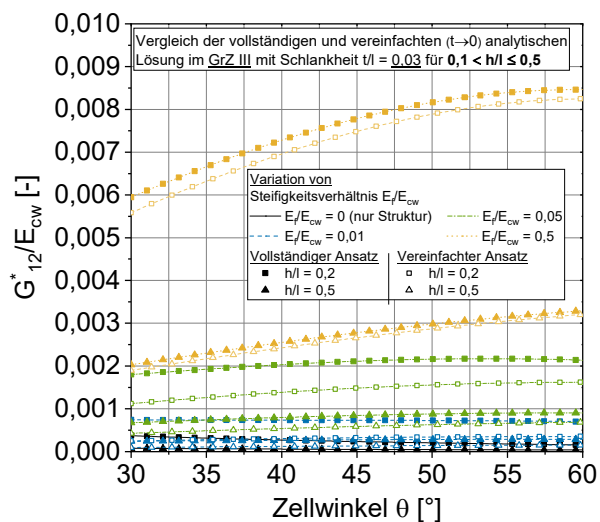


**Abb. I.4:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $E^*_{2,t}$  (links) und für  $v^*_{21,t}$  (rechts) über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,06$

Anhang I.2: Ergänzende Darstellungen zum Gültigkeitsbereich der vereinfachten Bestimmungsgleichungen im Grundzustand III bei reiner Schubbelastung in der  $x_1$ -  $x_2$ -Ebene



**Abb. I.5:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $G^*_{12}$  über die Wandschlankheit  $t/l$  bei  $\theta = 45^\circ$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$

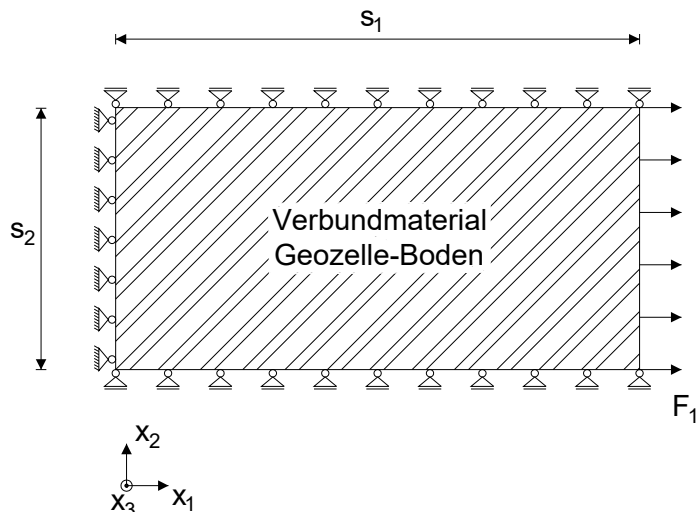


**Abb. I.6:** Vergleich der allgemeinen und vereinfachten Lösung für  $G^*_{12}$  über den Zellwinkel  $\theta$  bei  $t/l = 0,03$  und  $0,1 < h/l \leq 0,5$



## Anhang J

Anhang J.1 Alternative analytische Beispielberechnung für das mechanische Modell einer Scheibe mit der Anordnung der Zelllänge ( $L_c$ -Richtung) in Belastungsrichtung über die vereinfachten Bestimmungsgleichungen bei unendlich steifem Füllmaterial  $E_f \rightarrow \infty$



**Abb. J.1:** Scheibenbeanspruchung in der Draufsicht für den EVZ in  $x_2$ -Richtung

Die Bedingung von  $\varepsilon_2 = 0$  für den EVZ ist gleichbedeutend mit einem unendlich steifen Füllmaterial, weshalb die analytische Berechnung, anstelle der Betrachtung der unbefüllten Struktur, auch alternativ über eine Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  der Bestimmungsgleichungen für die befüllte Zellstruktur erfolgen kann.

**Tab. J.1:** Kennwerte für die Beispielrechnung des Scheibenmodells im EVZ in  $L_c$ -Richtung

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,351 m	0,224 m	0,025 m	0,1682 m	0,0017 m	41,75°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke						
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$EI_{cw}$	$GA_{cw}$			
150 MN/m <sup>2</sup>	51 kN	1,228E-5 kNm <sup>2</sup>	21,25 kN			
Materialkennwerte des Füllmaterials						
$E_f$	$\nu_f$	$c'$	$\varphi'$	$\Psi'$	$\sigma'_t$	
30 MN/m <sup>2</sup>	0	300 kN/m <sup>2</sup>	30°	0°	0 kN/m <sup>2</sup>	
Äquivalente Materialkennwerte unter ausschließlicher Berücksichtigung der Zellstruktur						
$E^*_{1,t}$	$\nu^*_{12,t}$	$\nu^*_{21,t}$	$EA^*_{1,t}$			
0,5470 kN/m <sup>2</sup>	1,755	0,5694	0,1094 kN/m			
Äquivalente Materialkennwerte bei alternativer Grenzwertbetrachtung $E_f \rightarrow \infty$						
$E^*_{1,t}$	$\nu^*_{12,t}$	$\nu^*_{21,t}$	$EA^*_{1,t}$			
1134,6 kN/m <sup>2</sup>	0	0	226,92 kN/m			

Prüfung des Gültigkeitsbereiches der vereinfachten Gleichungen

$$\frac{E_f}{E_{cw}} = \frac{30}{150} = 0,2 > 0,05$$

⇒ Gemäß Kapitel 6.5.1.1 gelten vereinfachte Bestimmungsgleichungen

Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  von vereinfachter Bestimmungsgleichung (4.46) aus Tabelle 4.4 für den äquivalenten Zugmodul  $E_{1,t}^*$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} E_{1,t}^* \right) = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw}t} \left( 1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l} \right)} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{l^2 \sin \theta} = 1134,6 \text{ kN/m}^2$$

Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  von vereinfachter Bestimmungsgleichung (4.50) und (4.52) aus Tabelle 4.5 für die äquivalenten Querdehnzahlen  $\nu_{12,t}^*$  und  $\nu_{21,t}^*$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} \nu_{12,t}^* \right) = 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} \nu_{21,t}^* \right) = 0.$$

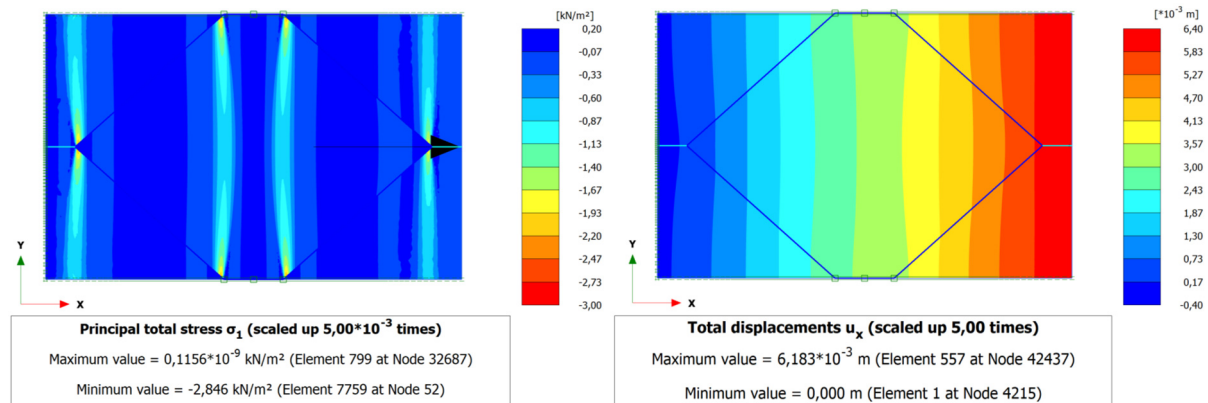
Homogene Dehnung  $\varepsilon_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{(1 - \nu_{12,t}^* \nu_{21,t}^*)}{EA_{2,t}^*} F_1 = \frac{1 - 0}{226,92} \cdot 4 = 1,7627 \%$$

Verschiebung  $u_1$

$$u_1^{Analytik} = \varepsilon_1^{Analytik} s_1 = 0,017627 \cdot 0,351 = 6,187 \text{ mm} \approx 6,183 \text{ mm} = u_1^{FEM}$$

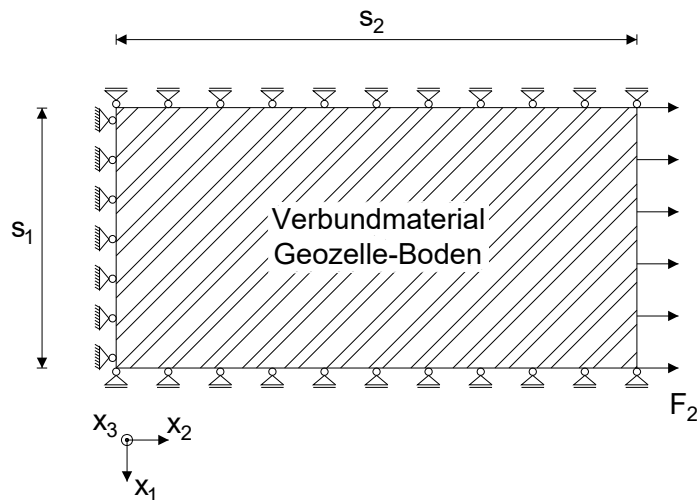
Aus alternativer analytischer Betrachtung über  $E_f \rightarrow \infty$  ergibt sich das gleich Ergebnis wie aus analytischer Berechnung über die unbefüllte Zellstruktur. Folglich stimmt auch hier das Ergebnis mit dem Ergebnis der FE-Berechnung überein.



**Abb. J.2:** Ergebnisse der FE-Berechnung im EVZ bei Zellenanordnung in  $L_c$ -Richtung anhand der maximalen Hauptspannungsverteilung (links) und der Verschiebungsverteilung (rechts)



### Anhang J.2 Beispielberechnung für das mechanische Modell einer Scheibe mit der Anordnung der Zellbreite ( $W_c$ -Richtung) in Belastungsrichtung



**Abb. J.3:** Scheibenbeanspruchung in der Draufsicht für den EVZ in  $x_1$ -Richtung

#### Kraft-Dehnungs-Beziehung

$$\varepsilon_2 = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_2} \sigma_2 = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{E_2 H_c} \sigma_2 H_c = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{EA_2} F_2$$

#### Eingangsgrößen und äquivalente Materialkennwerte

**Tab. J.2:** Kennwerte für die Beispielrechnung des Scheibenmodells im EVZ in  $W_c$ -Richtung

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,351 m	0,224 m	0,025 m	0,1682 m	0,0017 m	41,75°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke						
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$EI_{cw}$	$GA_{cw}$			
150 MN/m <sup>2</sup>	51 kN	1,228E-5 kNm <sup>2</sup>	21,25 kN			
Materialkennwerte des Füllmaterials						
$E_f$	$\nu_f$	$c'$	$\varphi'$	$\Psi'$	$\sigma'_t$	
30 MN/m <sup>2</sup>	0	300 kN/m <sup>2</sup>	30°	0°	0 kN/m <sup>2</sup>	
Äquivalente Materialkennwerte unter ausschließlicher Berücksichtigung der Zellstruktur						
$E_{2,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$	$EA_{2,t}^*$			
0,1775 kN/m <sup>2</sup>	1,755	0,5694	0,03549 kN/m			
Äquivalente Materialkennwerte bei alternativer Grenzwertbetrachtung $E_f \rightarrow \infty$						
$E_{2,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$	$EA_{2,t}^*$			
365,1 kN/m <sup>2</sup>	0	0	73,01 kN/m			

Analytisch ermittelte Dehnung für eine Linienlast von  $F_2 = 2$  kN/m

$$\varepsilon_2 = \frac{(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{EA_2} F_2 = \frac{(1 - 0,9995)}{0,03549} 2 = 2,7167 \%$$

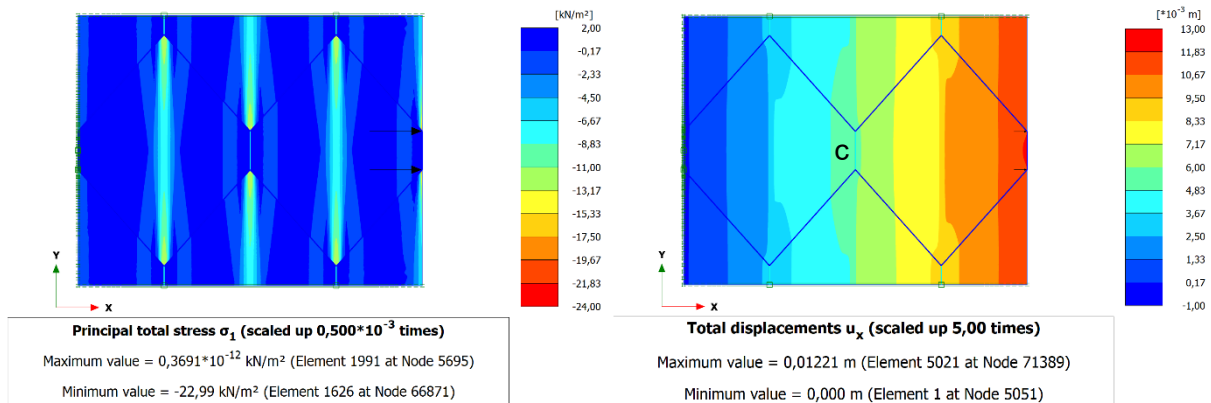
Verschiebung für Scheibenlänge von  $s_2 = W_c = 0,224 \text{ m}$

$$u_2^{Analytik} = \varepsilon_2 W_c = 0,027167 \cdot 0,224 = 6,0855 \text{ mm}$$

Äquivalente Kraft in Modellierung

$$\frac{F_2^{Analytik}}{H_c} = \bar{\sigma}_2 = \frac{F_2^{FEM}}{L_c} \Leftrightarrow F_2^{FEM} = \frac{F_2^{Analytik} L_c}{H_c} = 3,51 \text{ kN/m}$$

Ergebnisse der Finite-Elemente-Berechnung mit gleichen Eingangsgrößen



**Abb. J.4:** Ergebnisse der FE-Berechnung im EVZ bei Zellenanordnung in  $W_c$ -Richtung anhand der maximalen Hauptspannungsverteilung (links) und der Verschiebungsverteilung (rechts)

Für Verschiebung an Verbindungsstelle c ergibt sich aus FE-Berechnung ein Wert von  $u_2 = 5,873 \text{ mm}$ .

$$u_2^{Analytik} = 6,0855 \text{ mm} \approx 5,873 \text{ mm} = u_2^{FEM}$$

Durch die Spannungskonzentration überschätzt FE-Berechnung die Verschiebung um ca. 3,5 % verglichen zu analytischer Lösung. Der Unterschied ist jedoch vernachlässigbar gering.

Charakteristische Zugbeanspruchung der geneigten Zellwand

$$F_{l,k} = \frac{\bar{n}_{22}}{\sin \theta} \frac{L_c}{2} = \frac{F_2}{\sin \theta} \frac{L_c}{2} = \frac{N_{2,cw}}{\sin \theta} = \frac{0,351 \text{ kN}}{\sin 41,75^\circ} = 0,5272 \text{ kN}$$

Charakteristische Schälbeanspruchung der Verbindungsstelle

$$F_{s,k} = F_{l,k} \sin \theta = N_{2,cw} = 0,351 \text{ kN}$$

### Anhang J.3 Herleitung der äquivalenten Plattensteifigkeit bei einer zylindrischen Biegefläche für ein Plattenmaterial mit abweichendem Materialverhalten bei Druck- und Zugbeanspruchung für den EVZ in $x_2$ -Richtung (Plattenstreifen)

Orthotrope Spannungs-Dehnungs-Beziehung für  $\sigma_1$  bei gängiger Annahme von  $\sigma_3 \approx 0$  in Plattentheorien

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2$$

Für EVZ mit Dehnung von  $\varepsilon_2 = 0$  in  $x_2$ -Richtung

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1$$

Wegen Betrachtung als Platte bzw. Plattenstreifen beziehen sich die Schnittgrößen auf den laufenden Meter in  $x_2$ -Richtung. Aufgrund von ausschließlicher Biegebeanspruchung und der Verwendung der schubstarren Plattentheorie ist Normalkraft  $n_{11}$  Null und das Biegemoment  $m_{11}$  entspricht  $m_{11}^0$ . Hieraus ergeben sich folgende Gleichgewichtsbedingungen.

$$n_{11} = 0 \quad \text{und} \quad m_{11} = m_{11}^0$$

Definition der Spannungsverteilung im Druck- und Zugbereich in Abhängigkeit der  $x_3$ -Richtung und des Krümmungsradius  $\rho_{11}$  bzw. der Querschnittsverdrehung  $\psi_1$ :

$$\sigma_{1,c}(x_3) = \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \varepsilon_1(x_3) = \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \frac{x_3}{\rho_{11}} = \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \psi_{1,1} x_3$$

$$\sigma_{1,t}(x_3) = \frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}} \frac{x_3}{\rho_{11}} = \frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}} \psi_{1,1} x_3$$

Ermittlung der Normalkraft und des Biegemoments aus bereichsweiser Integration der Spannungen über die Höhe des Zugbereiches  $h_t$  und des Druckbereiches  $h_t - H_c$  (Ursprung von  $x_3$  im Querschnitt bei neutraler Ebene)

$$n_{11} = \int_{h_t - h}^0 \sigma_{1,c} d\tilde{x}_3 + \int_0^{h_t} \sigma_{1,t} d\tilde{x}_3 = 0$$

$$m_{11} = \int_{h_t - h}^0 \sigma_{1,c} x_3 d\tilde{x}_3 + \int_0^{h_t} \sigma_{1,t} x_3 d\tilde{x}_3 = m_{11}^0$$

Einsetzen und Auflösen liefern aus der Bedingung für die Normalkraft  $n_{11} = 0$  die Höhe des Zugbereiches  $h_t$  und aus der Bedingung von  $m_{11} = m_{11}^0$  den Kehrwert des Krümmungsradius  $1/\rho_{11}$ .

$$h_t = \frac{H_c \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}}}{\sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}}$$

$$\frac{1}{\rho_{11}} = \frac{3m_{11}^0}{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}} h_t^3 + \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} (h - h_t)^3}$$

Höhe des Druckspannungsbereiches

$$h_c = h_t - H_c = - \frac{H_c \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}}{\sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}}$$

Durch Einsetzen von  $1/\rho_{11}$  zusammen mit  $h_t$  in die beiden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für die Druck- und Zugspannung ergibt sich

$$\sigma_{1,c}(x_3) = \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \frac{3m_{11}^0}{H_c^3} x_3 \quad \text{und}$$

$$\sigma_{1,t}(x_3) = \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} \frac{3m_{11}^0}{H_c^3} x_3 \quad .$$

Wegen der Einheit des gegebenen Moments  $m_{11}^0$  in kNm/m bei Plattenbetrachtung erfüllen beide Ausdrücke die Dimensionsanalyse.

Definition des Biegemomentes  $m_{11}$  für die schubstarre Platte bei Orthotropie im EVZ

$$m_{11} = - \frac{E_{1,B}^*}{1 - \nu_{12,B}^* \nu_{21,B}^*} \frac{H_c^3}{12} (w_{,11} + \nu_{21,B}^* w_{,22}) = - \frac{E_{1,B}^*}{1 - \nu_{12,B}^* \nu_{21,B}^*} \frac{H_c^3}{12} w_{,11}$$

$$= \frac{E_{1,B}^*}{1 - \nu_{12,B}^* \nu_{21,B}^*} \frac{H_c^3}{12} \psi_{1,1}$$

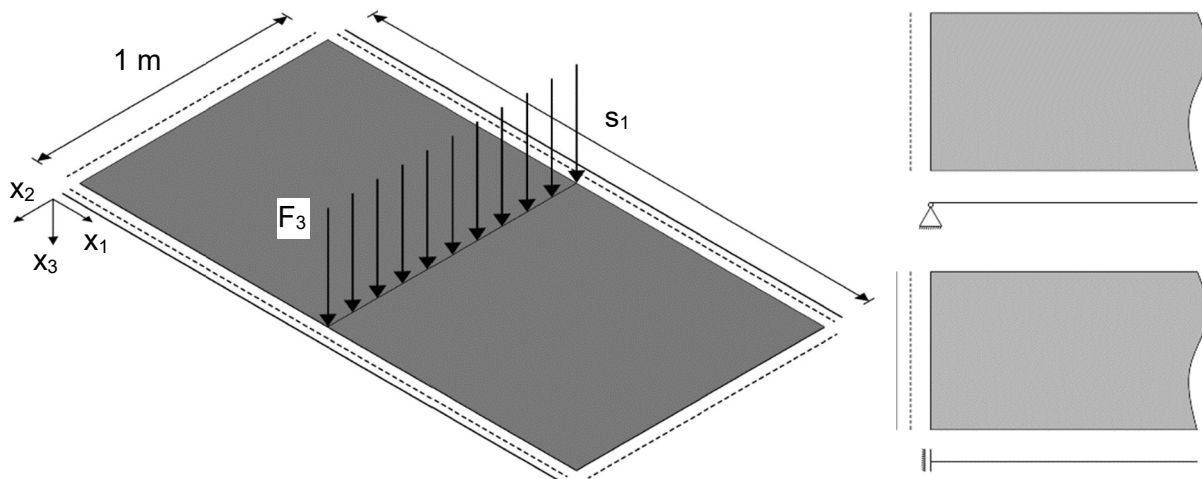
Mit:  $w_{,22} = 0$  da EVZ mit zylindrischer Biegefläche ( $w$  in  $x_2$ -Richtung konst.)  
Schubstarre Definition von Verdrehung  $w_{,11} = -\psi_{1,1}$

Bestimmung von äquivalenter Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$  durch Einsetzen von  $\sigma_{1,c}$  und  $m_{11}$  mit Definition über die Verdrehung

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,c}(x_3) &= \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \psi_{1,1} x_3 = \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \frac{3m_{11}^0}{H_c^3} x_3 \\
 \Leftrightarrow \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \psi_{1,1} x_3 &= \frac{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \frac{3}{H_c^3} \frac{E_{1,B}^*}{1 - \nu_{12,B}^*\nu_{21,B}^*} \frac{H_c^3}{12} \psi_{1,1} x_3 \\
 \Leftrightarrow E_{11}^* &= \frac{E_{1,B}^*}{1 - \nu_{12,B}^*\nu_{21,B}^*} = \frac{4 \frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}} \frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}}{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}}{1 - \nu_{12,c}\nu_{21,c}}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}}{1 - \nu_{12,t}\nu_{21,t}}} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Eine Herleitung über die Spannung  $\sigma_{1,t}$  anstelle von  $\sigma_{1,c}$  liefert das gleiche Ergebnis.

Anhang J.4 Alternative analytische Beispielberechnung für das mechanische Modell eines schubstarren Plattenstreifens mit der Anordnung der Zelllänge ( $L_c$ -Richtung) in Belastungsrichtung über die vereinfachten Bestimmungsgleichungen bei unendlich steifem Füllmaterial  $E_f \rightarrow \infty$



**Abb. J.5:** Plattenstreifen für den EVZ in  $x_2$ -Richtung

Die Bedingung von  $\varepsilon_2 = 0$  für den EVZ ist gleichbedeutend mit einem unendlich steifen Füllmaterial, weshalb die analytische Berechnung, anstelle der Betrachtung der unbefüllten Struktur, auch alternativ über eine Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  der Bestimmungsgleichungen für die befüllte Zellstruktur erfolgen kann.

**Tab J.3:** Kennwerte für die Beispielrechnung des Plattenstreifens im EVZ

Geometrische Kennwerte der Geozellen						
$L_c$	$W_c$	$h$	$l$	$t$	$\theta$	$H_c$
0,20 m	0,135 m	0,0025 m	0,1165 m	0,0017 m	35,39°	0,2 m
Steifigkeiten der Zellwände bei einfacher Wanddicke				Materialkennwerte des Füllmaterials		
$E_{cw}$	$EA_{cw}$	$EI_{cw}$	$GA_{cw}$	$E_f$	$\nu_f$	
550 MN/m <sup>2</sup>	187 kN	4,50E-5 kNm <sup>2</sup>	77,92 kN	95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> der Zellstruktur im Zugbereich (Grundzustand Ia und IIa)						
$E_{1,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$				
7,532 kN/m <sup>2</sup>	2,0837	0,4795				
Äquivalente Materialkennwerte bei alternativer Grenzwertbetrachtung $E_f \rightarrow \infty$ im Zugbereich						
$E_{1,t}^*$	$\nu_{12,t}^*$	$\nu_{21,t}^*$				
7679,57 kN/m <sup>2</sup>	0	0				
Äquivalente Materialkennwerte aus <u>nur</u> dem Füllmaterial im Druckbereich (Grundzustand Ib und IIb)						
$E_{1,c}^*$	$\nu_{12,c}^*$	$\nu_{21,c}^*$				
95 MN/m <sup>2</sup>	0,2	0,2				

Prüfung des Gültigkeitsbereiches der vereinfachten Gleichungen

$$\frac{E_f}{E_{cw}} = \frac{95}{550} = 0,172 > 0,05$$

⇒ Gemäß Kapitel 6.5.1.1 gelten vereinfachte Bestimmungsgleichungen

Prüfung der Anwendungsgrenzen zum Einfluss der Querdehnung

$$v_f = 0,2 < \underbrace{0,492 = \frac{l \sin \theta \tan \theta}{h + l \cos \theta}}_{\text{GrZ IIb}} < \underbrace{0,505 = \tan^2 \theta}_{\text{GrZ Ia}} < 1,408 = \frac{1}{\underbrace{\tan^2 \theta}_{\text{GrZ Ib \& IIa}}}$$

Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  von vereinfachter Bestimmungsgleichung (4.46) aus Tabelle 4.4 für den äquivalenten Zugmodul  $E_{1,t}^*$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} E_{1,t}^* \right) = \frac{1}{\frac{1}{E_{cw} t} \left( 1 + \frac{2h \cos^2 \theta}{l} \right)} \frac{(2h + l \cos \theta) \cos^2 \theta}{l^2 \sin \theta} = 7679,57 \text{ kN/m}^2$$

Grenzwertbetrachtung mit  $E_f \rightarrow \infty$  von vereinfachter Bestimmungsgleichung (4.50) und (4.52) aus Tabelle 4.5 für die äquivalenten Querdehnzahlen  $v_{12,t}^*$  und  $v_{21,t}^*$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} v_{12,t}^* \right) = 0 \text{ und } \lim_{t \rightarrow 0} \left( \lim_{E_f \rightarrow 0} v_{21,t}^* \right) = 0$$

Äquivalente Ersatzsteifigkeit  $E_{11}^*$

$$E_{11}^* = \frac{4 \frac{E_{1,c}^*}{(1 - v_{12,c}^* v_{21,c}^*)} \frac{E_{1,t}^*}{(1 - v_{12,t}^* v_{21,t}^*)}}{\left( \sqrt{\frac{E_{1,c}^*}{(1 - v_{12,c}^* v_{21,c}^*)}} + \sqrt{\frac{E_{1,t}^*}{(1 - v_{12,t}^* v_{21,t}^*)}} \right)^2} = 18.790,75 \text{ kN/m}^2$$

Äquivalente Plattensteifigkeit  $D_{11}^*$

$$D_{11}^* = E_{11}^* \frac{H_c^3}{12} = 12,527 \text{ kNm} \quad (9.1)$$

Maximale Durchbiegung  $w_{PB,max}$  in der Mitte des Plattenstreifens an der Stelle  $x_1 = 1,0 \text{ m}$  für  $F_3 = 3 \text{ kN/m}$  sowie eine Plattenlänge von  $s_1 = 2,0 \text{ m}$

$$w_{PB,max} = \frac{F_3 s_1^3}{48 D_{11}^*} = \frac{3 \cdot 2^3}{48 \cdot 12,53} = 3,9913 \text{ cm} \quad (9.2)$$